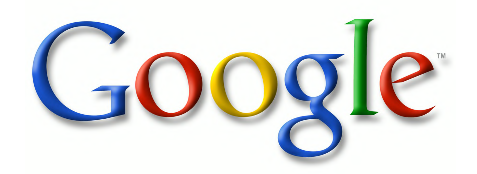
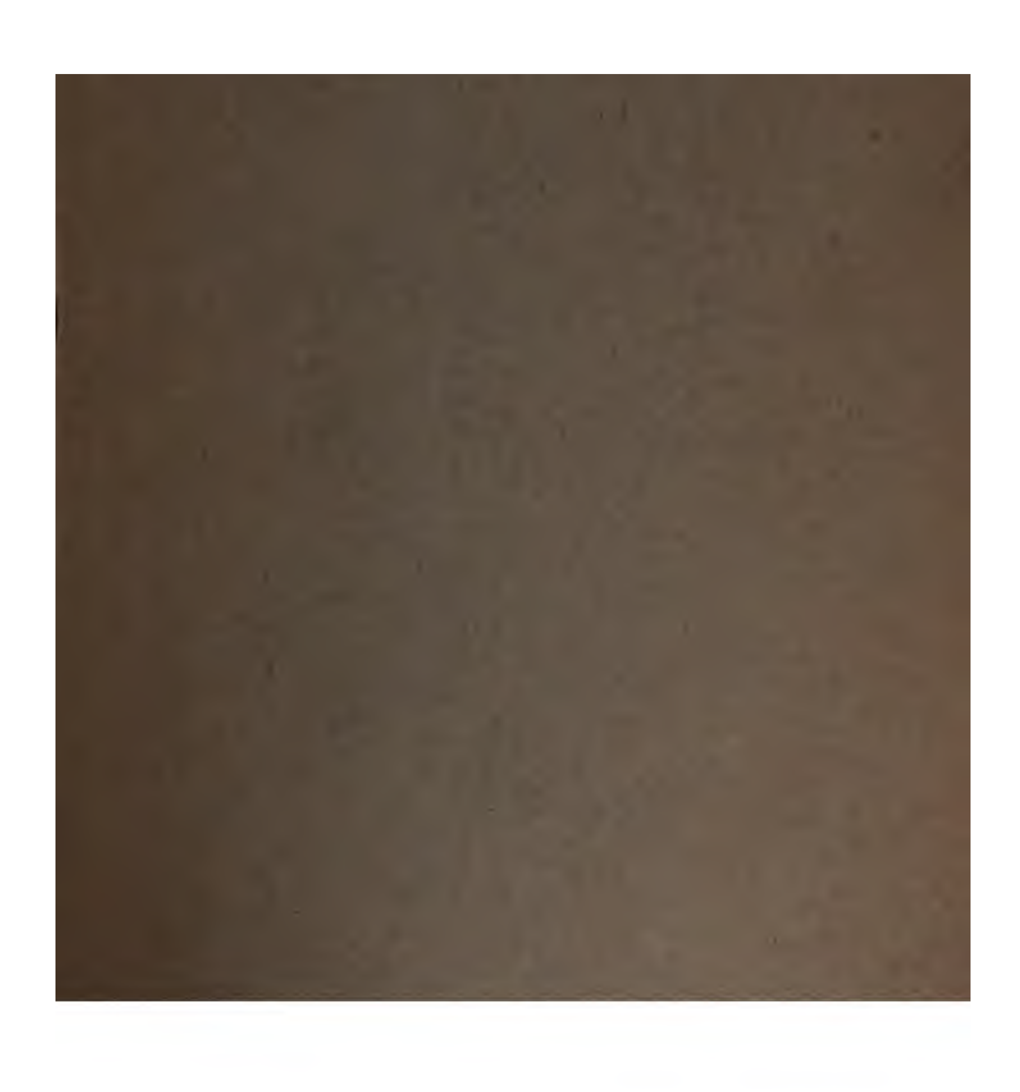



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06274641 1







Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Dreiundzwanzigster Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagshandlung

Th. Kunike.

1854.

Inhaltsverzeichniss des dreiundzwanzigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Praktische Geometrie.

M. s. Geometrie Nr. VIII. Heft II. Seite 207.

Geodäsie.

Mechanik.

Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.



Mathematikern Anerkennung finden sollte, doch mit der Zeit sich unzweifelhaft immer mehr Geltung verschaffen wird, zu welcher Annahme die beruhigende Ueberzeugung berechtigt, dass in allen Verhältnissen das Wahre doch immer endlich über das Falsche einen vollständigen Sieg davon trägt. Aber auch über die beste Darstellungsweise der auf den Begriff der Gränze als Hauptgrundlage gegründeten Theorie der Reihen dürfte bis jetzt noch nicht vollkommene Uebereinstimmung unter den Analytikern herrschen, und vielfache Versuche sind deshalb in dieser Beziehung bereits gemacht worden. Mir ist immer eine möglichst elementare Darstellung dieser Theorie als sehr wünschenswerth erschienen, die namentlich auch für den jungen Mathematiker den ungemein grossen Nutzen hat, dass sie ihn mit dem so ungemein wichtigen Begriffe der Gränze und dessen Anwendung, der bei dem ganzen weiteren Studium der Analysis sein steter Begleiter ist, so früh als möglich bekannt und vertraut macht und als die beste Vorbereitung zu dem Studium der eigentlichen Differential- und Integralrechnung für ihn zu betrachten ist. Eine solche elementare, lediglich auf den Begriff der Gränze gegründete Darstellung der Lehre von den Reihen habe ich in der vorliegenden Abhandlung zu geben versucht, die, wie es in der Natur der Sache liegt, viel mit der eigentlichen Differential- und Integralrechnung gemein haben muss, aber dessenungeachtet ganz unabhängig von diesen beiden Wissenschaften, im eigentlichen Sinne, bestehen kann und, nach meiner Absicht, bestehen soll. Auch das Taylor'sche Theorem und einer der wichtigsten Sätze der Integralrechnung müssen in dieser Abhandlung nothwendig auftreten, weil diese Theoreme die ganze Reihenentwickelung unter allgemeine Gesichtspunkte fassen, und deshalb nie entbehrt werden können. Bei dem Taylor'schen Satze habe ich den Beweis des Herrn Caqué *) benutzt. Herrn Caqué ist es aber nur gelungen, durch seine hauptsächlich auf einen wichtigen Satz der Lehre von den Mittelgrössen gegründete Darstellung zu dem von Cauchy gegebenen ersten Ausdrucke des Restes der Taylor'schen Reihe zu gelangen. Indem ich einen andern Satz von den Mittelgrössen, eigentlich das Princip des gewöhnlichen arithmetischen Mittels, benutzte, ging, was für mich von ganz besonderem Interesse war, sehr leicht auch der von Cauchy gegebene zweite Ausdruck des Restes der Taylor'schen Reihe hervor, welcher in der gewöhnlichen, von Cauchy herrührenden Darstellungsweise dem Anfänger immer einige Schwierigkeiten macht, aber nicht entbehrt werden kann, weil er schon

---

*) Liouville: Journal de Mathématiques. Octobre 1845. p. 379. Archiv der Mathematik und Physik. Thl. VIII. S. 166.

deshalb so wichtig ist, da sich ohne seine Hülfe das Binomial-Theorem nicht streng beweisen lässt, wenigstens nicht mittelst des Taylor'schen Satzes. Um diese Beweise des Taylor'schen Theorems richtig zu verstehen, muss man nur ja nie das Princip der Stetigkeit aus dem Auge verlieren, was hier von ganz besonderer Wichtigkeit ist. Um von dem eigentlich in das Gebiet der Integralrechnung gehörenden wichtigen Satze, welcher in dieser Abhandlung gleichfalls in elementarer Gestalt auftritt, eine geometrische Anwendung zu zeigen, habe ich mit dessen Hülfe die Gleichungen der Rhumblinie auf der Kugel elementar entwickelt, was für den höheren nautischen Unterricht vielleicht erwünscht sein dürfte, da jene Gleichungen in der ganzen Nautik eine so überaus wichtige Rolle spielen. — Mag man auch vielleicht sagen, dass die in dieser Abhandlung gegebenen Entwickelungen nur eine versteckte Differential- und Integralrechnung seien, so lasse ich mir dies gern gefallen, ja ich sage, dass dies gar nicht anders sein kann; aber ich glaube, dass diese Abhandlung eine wirkliche elementare Darstellung der ganzen Lehre von den Reihen liefert, die für den, der nicht weiter in der Analysis zu gehen beabsichtigt, und eine gründliche Kenntniss der Theorie der Reihen vielleicht praktischer Zwecke wegen nöthig hat, in dieser Beziehung das vollständige Studium der eigentlichen sogenannten höheren Analysis entbehrlich macht, jedenfalls auf dasselbe ihn sehr zweckmässig vorbereitet. Durch diese Abhandlung auch dazu beizutragen, dass immer mehr und mehr die völlige Unwissenschaftlichkeit der sogenannten Methode der unbestimmten Coefficienten und ähnlicher Methoden, auch einiger in neuerer Zeit in Vorschlag gebrachter Surrogate, durch die man in völlig verunglückter Weise die strengen Ausdrücke der Reste der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe und deren Anwendung bei Reihenentwickelungen hat umgehen und entbehrlich machen wollen, und dadurch das Studium der Differential- und Integralrechnung für Anfänger erleichtern zu können gemeint hat, erkannt und solche Unwissenschaftlichkeit immer mehr und mehr aus der Analysis verbannt werden möge, ist mein grösster Wunsch.

I.

Vorbereitende arithmetische Sätze.

§. 1.

Die Entwickelungen, mit denen wir uns in dieser Abhandlung

beschäftigen werden, nehmen die Kenntniss einiger arithmetischen Sätze in Anspruch, die zwar bekannt sind, dessenungeachtet aber, um das Verständniss des Folgenden möglichst zu erleichtern, hier zusammengestellt und mit strengen, möglichst einfachen Beweisen versehen werden sollen.

Der erste dieser Sätze ist der folgende

Lehrsatz.

Wenn x eine beliebige positive Grösse und n eine positive ganze Zahl bezeichnet, so nähert der Bruch

$$\frac{x^n}{1.2.3....n}$$

sich der Null, wenn n in's Unendliche wächst, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Beweis.

Man nehme die positive ganze Zahl k so an, dass $k+1>x$, also

$$\frac{x}{k+1}<1$$

ist, was offenbar immer möglich ist. Nun ist

$$\frac{x^{k+1}}{1....(k+1)}=\frac{x^k}{1....k}\cdot\frac{x}{k+1},$$

$$\frac{x^{k+2}}{1....(k+2)}=\frac{x^k}{1....k}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2},$$

$$\frac{x^{k+3}}{1....(k+3)}=\frac{x^k}{1....k}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\frac{x}{k+3},$$

$$\frac{x^{k+4}}{1....(k+4)}=\frac{x^k}{1....k}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdot\frac{x}{k+3}\cdot\frac{x}{k+4},$$

u. s. w.

Also ist, weil

$$\frac{x}{k+1},\ \frac{x}{k+2},\ \frac{x}{k+3},\ \frac{x}{k+4},\ldots.$$

eine Reihe fortwährend abnehmender ächter Brüche ist:

$$\frac{x^{k+1}}{1\ldots(k+1)}=\frac{x^k}{1\ldots k}\cdot\frac{x}{k+1},$$

$$\frac{x^{k+2}}{1\ldots(k+2)}<\frac{x^k}{1\ldots k}\cdot\left(\frac{x}{k+1}\right)^2,$$

$$\frac{x^{k+3}}{1\ldots(k+3)}<\frac{x^k}{1\ldots k}\cdot\left(\frac{x}{k+1}\right)^3,$$

$$\frac{x^{k+4}}{1\ldots(k+4)}<\frac{x^k}{1\ldots k}\cdot\left(\frac{x}{k+1}\right)^4,$$

u. s. w.,

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K=\frac{x^k}{1\ldots k}$$

setzen:

$$\frac{x^{k+1}}{1\ldots(k+1)}=K\frac{x}{k+1},$$

$$\frac{x^{k+2}}{1\ldots(k+2)}<K\left(\frac{x}{k+1}\right)^2,$$

$$\frac{x^{k+3}}{1\ldots(k+3)}<K\left(\frac{x}{k+1}\right)^3,$$

$$\frac{x^{k+4}}{1\ldots(k+4)}<K\left(\frac{x}{k+1}\right)^4,$$

u. s. w.

Die Potenzen

$$\frac{x}{k+1},\ \left(\frac{x}{k+1}\right)^2,\ \left(\frac{x}{k+1}\right)^3,\ \left(\frac{x}{k+1}\right)^4,\ldots.$$

des ächten Bruchs $\frac{x}{k+1}$ nähern sich nun bekanntlich der Null immer mehr und mehr und können der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur den Potenzexponenten gross genug werden lässt. Also nähern sich auch die Grössen

$$K\frac{x}{k+1},\ K\left(\frac{x}{k+1}\right)^2,\ K\left(\frac{x}{k+1}\right)^3,\ K\left(\frac{x}{k+1}\right)^4,\ldots,$$

und nach dem Obigen folglich um so mehr die Grössen

$$\frac{x^{k+1}}{1\ldots(k+1)},\ \frac{x^{k+2}}{1\ldots(k+2)},\ \frac{x^{k+3}}{1\ldots(k+3)},\ \frac{x^{k+4}}{1\ldots(k+4)},\ldots.$$

der Null, und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man diese Reihe nur weit genug fortsetzt oder die Glieder weit genug von ihrem Anfang entfernt nimmt, wobei nach dem Obigen natürlich immer vorausgesetzt wird, dass $k+1>x$, also $\frac{x}{k+1}<1$ sei, eine Bedingung, deren Erfüllbarkeit in keinem Falle einem Zweifel unterliegt. Hierdurch ist also unser Satz vollständig bewiesen.

Zusatz.

Der absolute Werth des Bruchs

$$\frac{x^n}{1.2.3....n},$$

wo x eine beliebige positive oder negative Grösse, n eine positive ganze Zahl bezeichnet, nähert sich der Null, wenn n in's Unendliche wächst, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

§. 2.

Ein anderer arithmetischer Satz, von dem wir in dieser Abhandlung Gebrauch machen werden, ist der folgende

Lehrsatz.

Der Bruch

$$\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+....+n^m}{n^{m+1}},$$

wo m eine bestimmte unveränderliche positive ganze Zahl bezeichnen soll, nähert sich, wenn die positive ganze Zahl n in's Unendliche wächst, der Gränze

$$\frac{1}{m+1}$$

bis zu jedem beliebigen Grade.

Beweis.

Von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{(1+u)^k-1}{(1+u)-1}=\frac{(1+u)^k-1}{u}=1+(1+u)+(1+u)^2+....+(1+u)^{k-1}$$

überzeugt man sich auf der Stelle, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $(1+u)-1$ multiplicirt. Setzen wir nun u als positiv voraus, so folgt auf der Stelle aus dieser Gleichung

$$\frac{(1+u)^k-1}{u} > 1+1+1+\ldots.+1,$$

wo k die Anzahl der Glieder der Reihe auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens ist; und

$$\frac{(1+u)^k-1}{u} < (1+u)^{k-1}+(1+u)^{k-1}+(1+u)^{k-1}+\ldots.+(1+u)^{k-1},$$

wo wieder k die Anzahl der Glieder der Reihe auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens ist. Also ist

$$\frac{(1+u)^k-1}{u} > k \text{ und } \frac{(1+u)^k-1}{u} < k(1+u)^{k-1},$$

was man kürzer auf folgende Art ausdrücken kann:

$$k < \frac{(1+u)^k-1}{u} < k(1+u)^{k-1}.$$

Zu bemerken ist indess hierbei noch, dass, wenn dies richtig sein soll, $k>1$ sein muss, wie sich leicht aus den vorhergehenden Schlüssen von selbst ergiebt; für $k=1$ ist offenbar

$$1 = \frac{(1+u)^1-1}{u} = 1.(1+u)^{1-1}.$$

Setzt man nun, k grösser als die Einheit vorausgesetzt, $\frac{1}{x}$ für u, so erhält man:

$$k < \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^k-1}{\frac{1}{x}} < k\left(1+\frac{1}{x}\right)^{k-1},$$

also, wenn man mit x^{k-1} multiplicirt:

$$kx^{k-1} < x^k.\frac{(1+x)^k-x^k}{x^k} < k(1+x)^{k-1}$$

oder

$$kx^{k-1} < (1+x)^k-x^k < k(1+x)^{k-1}.$$

Folglich ist

$$x^{k-1} < \frac{(1+x)^k-x^k}{k}, \quad (1+x)^{k-1} > \frac{(1+x)^k-x^k}{k}.$$

oder, wenn man in der zweiten dieser beiden Gleichungen x $1+x$, also $x-1$ für x setzt:

$$x^{k-1} < \frac{(x+1)^k - x^k}{k}, \quad x^{k-1} > \frac{x^k - (x-1)^k}{k};$$

also:

$$\frac{(x+1)^k - x^k}{k} > x^{k-1} > \frac{x^k - (x-1)^k}{k}.$$

Setzt man hierin nach und nach

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots. n$$

und $k-1=m$, $k=m+1$; so erhält man:

$$\frac{2^{m+1}-1^{m+1}}{m+1} > 1^m > \frac{1^{m+1}}{m+1},$$

$$\frac{3^{m+1}-2^{m+1}}{m+1} > 2^m > \frac{2^{m+1}-1^{m+1}}{m+1},$$

$$\frac{4^{m+1}-3^{m+1}}{m+1} > 3^m > \frac{3^{m+1}-2^{m+1}}{m+1},$$

u. s. w.

$$\frac{(n+1)^{m+1}-n^{m+1}}{m+1} > n^m > \frac{n^{m+1}-(n-1)^{m+1}}{m+1}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Addition auf beiden Seiten:

$$\frac{(n+1)^{m+1}-1^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m + \ldots. + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1},$$

also um so mehr:

$$\frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m + \ldots. + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1},$$

und, wenn man mit n^{m+1} dividirt:

$$\frac{1}{m+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1} > \frac{1^m + 2^m + 3^m + \ldots. + n^m}{n^{m+1}} > \frac{1}{m+1}.$$

Lässt man nun n in's Unendliche wachsen, so nähert

$$\frac{1}{m+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1}$$

sich der Gränze $\frac{1}{m+1}$ bis zu jedem beliebigen Grade, und muss also offenbar der zwischen

$$\frac{1}{m+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m+1} \text{ und } \frac{1}{m+1}$$

liegende Bruch

$$\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}$$

sich auch der Gränze $\frac{1}{m+1}$ bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn n in's Unendliche wächst, wie bewiesen werden sollte.

Zusatz.

Auch der Bruch

$$\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}}$$

nähert sich der Gränze

$$\frac{1}{m+1}$$

bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n in's Unendliche wächst.

Dies erhellet auf der Stelle, wenn man nur überlegt, dass

$$\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}}=\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}-\frac{1}{n}$$

ist, und dass sich $\frac{1}{n}$ der Null nähert, wenn n in's Unendliche wächst, so dass sich also unter dieser Voraussetzung die Brüche

$$\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}}$$

und

$$\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}$$

derselben Gränze nähern müssen.

§. 3.

Ausser den beiden vorhergehenden Sätzen brauchen wir im Folgenden noch ein Paar Sätze von den Mittelgrössen, die wir jetzt beweisen wollen.

1. Erklärung.

Jede Grösse, welche nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste unter mehreren Grössen a, a_1, a_2, a_3,.... ist, heisst eine Mittelgrösse zwischen diesen Grössen, und soll im Folgenden durch

$$M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$$

bezeichnet werden.

Es erhellet aus dieser Erklärung, dass es zwischen Grössen, die nicht sämmtlich unter einander gleich sind, unendlich viele verschiedene Mittelgrössen geben kann. Sind aber die gegebenen Grössen sämmtlich einander gleich, so kann man nur jede dieser Grössen selbst eine Mittelgrösse zwischen allen nennen.

Zusatz.

Jede Grösse, welche eine Mittelgrösse zwischen zwei beliebigen der Grössen a, a_1, a_2, a_3,.... ist, ist eine Mittelgrösse zwischen allen diesen Grössen.

2. Lehrsatz.

Wenn a und b zwei beliebige Grössen sind, so ist das Product

$$\{a-M(a, b)\}\{M(a, b)-b\},$$

wo $M(a, b)$ eine beliebige Mittelgrösse zwischen a und b bezeichnet, jederzeit positiv, wenn man nur dieses Product auch dann, wenn es verschwindet, als positiv betrachtet.

Beweis.

Wenn $a > b$ ist, so sind nach 1. die Differenzen

$$a-M(a, b),\quad M(a, b)-b$$

beide positiv, und das Product

$$\{a-M(a, b)\}\{M(a, b)-b\}$$

ist folglich positiv.

Wenn $a < b$ ist, so ist nach dem so eben Bewiesenen das Product

$$\{b-M(a,b)\}\{M(a,b)-a\}$$

positiv. Also ist auch das Product

$$\{a-M(a,b)\}\{M(a,b)-b\}$$

positiv.

Wenn $a=b$ ist, so verschwinden die Differenzen

$$a-M(a,b),\quad M(a,b)-b$$

beide, und das Product

$$\{a-M(a,b)\}\{M(a,b)-b\}$$

ist folglich, weil es verschwindet, wieder positiv.

3. Lehrsatz.

Wenn das Product

$$(a-A)(A-b)$$

positiv ist, so ist A jederzeit eine Mittelgrösse zwischen a und b, oder es ist

$$A=M(a,b).$$

Beweis.

Wenn das Product

$$(a-A)(A-b)$$

verschwindet, so ist entweder $A=a$ oder $A=b$, in beiden Fällen also A nach 1. eine Mittelgrösse zwischen a und b. Wenn das Product

$$(a-A)(A-b)$$

nicht verschwindet, so verschwindet keiner seiner beiden Factoren, und die beiden Factoren haben, weil das Product nach der Voraussetzung positiv ist, gleiche Vorzeichen. Ist also $a-A>0$, so ist auch $A-b>0$, oder es ist $a>A>b$, folglich A nach 1. eine Mittelgrösse zwischen a und b. Ist $a-A<0$, so ist auch $A-b<0$, oder es ist $a<A<b$, folglich A nach 1. wieder eine Mittelgrösse zwischen a und b. Unter der gemachten Voraussetzung ist also A immer eine Mittelgrösse zwischen a und b, wie bewiesen werden sollte.

4. Lehrsatz.

Wenn

$$A = M(a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

ist, so ist für jedes positive oder negative ϱ

$$\varrho A = M(\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots).$$

Beweis.

Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

seien respective α und γ, so ist nach der Voraussetzung und nacl

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Folglich ist nach 2. das Product

$$(\alpha - A)(A - \gamma)$$

positiv. Weil nun ϱ^2 immer positiv ist, so ist auch das Pro

$$\varrho^2(\alpha - A)(A - \gamma),$$

oder das Product

$$\varrho(\alpha - A) . \varrho(A - \gamma),$$

also auch das Product

$$(\varrho\alpha - \varrho A)(\varrho A - \varrho\gamma)$$

positiv, folglich nach 3.:

$$\varrho A = M(\varrho\alpha, \varrho\gamma).$$

Weil nun die Grössen $\varrho\alpha$ und $\varrho\gamma$ jedenfalls unter den Grössen

$$\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots$$

vorkommen, so ist nach 1. Zusatz

$$\varrho A = M(\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots),$$

wie bewiesen werden sollte.

Zusatz.

Wenn

$$M(\varrho a, \varrho a_1, \varrho a_2, \varrho a_3, \varrho a_4, \ldots)$$

eine Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$\varrho a,\ \varrho a_1,\ \varrho a_2,\ \varrho a_3,\ \varrho a_4, \ldots.$$

ist, so lässt sich immer

$$M(\varrho a,\ \varrho a_1,\ \varrho a_2,\ \varrho a_3,\ \varrho a_4, \ldots.) = \varrho M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots.)$$

setzen, wo wie gewöhnlich

$$M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots.)$$

eine gewisse Mittelgrösse zwischen den Grössen a, a_1, a_2, a_3, ... bezeichnet.

Weil nämlich nach der Voraussetzung

$$M(\varrho a,\ \varrho a_1,\ \varrho a_2,\ \varrho a_3,\ \varrho a_4, \ldots.)$$

eine Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$\varrho a,\ \varrho a_1,\ \varrho a_2,\ \varrho a_3,\ \varrho a_4, \ldots.$$

ist, so ist nach unserem obigen Lehrsatze

$$\frac{1}{\varrho} M(\varrho a,\ \varrho a_1,\ \varrho a_2,\ \varrho a_3,\ \varrho a_4, \ldots.)$$

eine Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$\frac{\varrho a}{\varrho},\ \frac{\varrho a_1}{\varrho},\ \frac{\varrho a_2}{\varrho},\ \frac{\varrho a_3}{\varrho},\ \frac{\varrho a_4}{\varrho}, \ldots.$$

also eine Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots.;$$

folglich kann man setzen:

$$\frac{1}{\varrho} M(\varrho a,\ \varrho a_1,\ \varrho a_2,\ \varrho a_3,\ \varrho a_4, \ldots.) = M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots.),$$

woraus

$$M(\varrho a,\ \varrho a_1,\ \varrho a_2,\ \varrho a_3,\ \varrho a_4, \ldots.) = \varrho M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots.)$$

folgt, wie bewiesen werden sollte.

5. *Lehrsatz.*

Wenn

$$A = M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots.)$$

ist, so ist für jedes ϱ mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$A \pm \varrho = M(a \pm \varrho,\ a_1 \pm \varrho,\ a_2 \pm \varrho,\ a_3 \pm \varrho, \ldots).$$

Beweis.

Die kleinste und grösste unter den Grössen

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

seien respective α und γ, so ist nach der Voraussetzung und nach 1.:

$$A = M(\alpha, \gamma).$$

Also ist nach 2. das Product

$$(\alpha - A)(A - \gamma);$$

und folglich offenbar auch das Product

$$\{\alpha \pm \varrho - (A \pm \varrho)\}\{(A \pm \varrho) - (\gamma \pm \varrho)\}$$

positiv. Daher ist nach 3.:

$$A \pm \varrho = M(\alpha \pm \varrho,\ \gamma \pm \varrho).$$

Weil nun die Grössen $\alpha \pm \varrho$ und $\gamma \pm \varrho$ offenbar beide unter den Gliedern der Reihe

$$a \pm \varrho,\ a_1 \pm \varrho,\ a_2 \pm \varrho,\ a_3 \pm \varrho, \ldots$$

vorkommen, so ist nach 1. Zusatz:

$$A \pm \varrho = M(a \pm \varrho,\ a_1 \pm \varrho,\ a_2 \pm \varrho,\ a_3 \pm \varrho, \ldots),$$

wie bewiesen werden sollte.

6. Lehrsatz.

Wenn $a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ beliebige, dagegen $b, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ sämmtlich Grössen mit einerlei Vorzeichen sind, deren Anzahl in beiden Reihen dieselbe ist, so ist jederzeit

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots} = M\left(\frac{a}{b},\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3}, \ldots\right).$$

Beweis.

Wenn α und γ die kleinste und grösste unter den Grössen

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}, \ldots$$

sind; so sind die Differenzen

$$\frac{a}{b}-\alpha, \quad \frac{a_1}{b_1}-\alpha, \quad \frac{a_2}{b_2}-\alpha, \quad \frac{a_3}{b_3}-\alpha, \ldots$$

und auch die Differenzen

$$\gamma-\frac{a}{b}, \quad \gamma-\frac{a_1}{b_1}, \quad \gamma-\frac{a_2}{b_2}, \quad \gamma-\frac{a_3}{b_3}, \ldots$$

sämmtlich positiv. Da nun nach der Voraussetzung die Grössen $b, b_1, b_2, b_3, \ldots$ alle gleiche Vorzeichen haben, so haben auch die Producte

$$b\left(\frac{a}{b}-\alpha\right), \quad b_1\left(\frac{a_1}{b_1}-\alpha\right), \quad b_2\left(\frac{a_2}{b_2}-\alpha\right), \quad b_3\left(\frac{a_3}{b_3}-\alpha\right), \ldots;$$

$$b\left(\gamma-\frac{a}{b}\right), \quad b_1\left(\gamma-\frac{a_1}{b_1}\right), \quad b_2\left(\gamma-\frac{a_2}{b_2}\right), \quad b_3\left(\gamma-\frac{a_3}{b_3}\right), \ldots;$$

und folglich auch die diesen Producten gleichen Differenzen

$$a-\alpha b, \quad a_1-\alpha b_1, \quad a_2-\alpha b_2, \quad a_3-\alpha b_3, \ldots;$$

$$\gamma b-a, \quad \gamma b_1-a_1, \quad \gamma b_2-a_2, \quad \gamma b_3-a_3, \ldots$$

sämmtlich gleiche Vorzeichen. Also haben auch die Summen dieser Differenzen

$$a+a_1+a_2+a_3+\ldots-\alpha(b+b_1+b_2+b_3+\ldots),$$

$$\gamma(b+b_1+b_2+b_3+\ldots)-(a+a_1+a_2+a_3+\ldots);$$

und folglich auch die Quotienten

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots-\alpha(b+b_1+b_2+b_3+\ldots)}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots},$$

$$\frac{\gamma(b+b_1+b_2+b_3+\ldots)-(a+a_1+a_2+a_3+\ldots)}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots};$$

nämlich die Grössen

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots}-\alpha, \quad \gamma-\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots}$$

oder

$$\alpha-\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots}, \quad \frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots}-\gamma$$

gleiche Vorzeichen. Daher ist das Product

$$\left(\alpha-\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots.}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}\right)\left(\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots.}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}-\gamma\right)$$

positiv, folglich nach 3.:

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots.}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}=M(\alpha,\gamma).$$

Also ist nach 1. Zusatz auch

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots.}{b+b_1+b_2+b_3+\ldots.}=M\left(\frac{a}{b},\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ldots.\right),$$

wie bewiesen werden sollte.

Erster Zusatz.

Setzt man im Vorhergehenden $b=b_1=b_2=b_3=\ldots.=1$ und bezeichnet die Anzahl der in jeder der beiden Reihen $a, a_1, a_2, a_3,\ldots.$ und $b, b_1, b_2, b_3,\ldots.$ enthaltenen Glieder durch n; so ergiebt sich aus dem vorigen Lehrsatze unmittelbar die Gleichung

$$\frac{a+a_1+a_2+a_3+\ldots.}{n}=M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots.),$$

wo $a, a_1, a_2, a_3,\ldots.$ ganz beliebige Grössen bezeichnen.

Zweiter Zusatz.

Sind $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3,\ldots.$ beliebige Grössen mit einerlei Vorzeichen, so haben, da auch die Grössen $b, b_1, b_2, b_3,\ldots.$ sämmtlich gleiche Vorzeichen haben, auch die Producte

$$b\varrho,\ b_1\varrho_1,\ b_2\varrho_2,\ b_3\varrho_3,\ldots.$$

sämmtlich einerlei Vorzeichen, und es ist folglich nach dem obigen Lehrsatze:

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots.}{b\varrho+b_1\varrho_1+b_2\varrho_2+b_3\varrho_3+\ldots.}=M\left(\frac{a\varrho}{b\varrho},\ \frac{a_1\varrho_1}{b_1\varrho_1},\ \frac{a_2\varrho_2}{b_2\varrho_2},\ \frac{a_3\varrho_3}{b_3\varrho_3},\ldots.\right),$$

also

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots.}{b\varrho+b_1\varrho_1+b_2\varrho_2+b_3\varrho_3+\ldots.}=M\left(\frac{a}{b},\ \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ldots.\right).$$

Für $b=b_1=b_2=b_3=\ldots.=1$ ist folglich

$$\frac{a\varrho+a_1\varrho_1+a_2\varrho_2+a_3\varrho_3+\ldots.}{\varrho+\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots.}=M(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots.)$$

oder

$$a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots = (\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots) M(a, a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

In dieser Gleichung ist der folgende in vielen Beziehungen wichtige Satz enthalten:

Wenn $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ beliebige, dagegen $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ Grössen mit einerlei Vorzeichen sind, so wird das Aggregat

$$a\varrho + a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + a_3\varrho_3 + \ldots$$

jederzeit erhalten, wenn man das Aggregat

$$\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots$$

mit einer gewissen Mittelgrösse zwischen den Grössen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ multiplicirt.

II.

Von den Gränzen der Differenzenverhältnisse der Functionen.

§. 1.

Wenn $y = f(x)$ eine beliebige Function von x ist, und man lässt in derselben die veränderliche Grösse x die beliebige Veränderung Δx erleiden, wodurch x in $x + \Delta x$ übergeht, so wird die Function $f(x)$ in $f(x + \Delta x)$ übergehen, folglich die Veränderung

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$

erleiden. Diese Veränderung der Function $f(x)$ pflegt man auch die **Differenz**, eigentlich die **erste Differenz**, der Function $y = f(x)$ zu nennen, und durch $\Delta f(x)$ oder Δy zu bezeichnen, so dass also

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ist.

Wenn man $\Delta y = \Delta f(x)$ als eine neue Function von x betrachtet, und darin wieder x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, so nennt man die dadurch herbeigeführte Veränderung von $\Delta y = \Delta f(x)$, nämlich nach dem Vorhergehenden die erste Differenz von $\Delta y = \Delta f(x)$, die **zweite Differenz** von $y = f(x)$, und bezeichnet dieselbe durch $\Delta^2 y$ oder $\Delta^2 f(x)$, so dass also

$$\Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = \Delta\Delta y = \Delta\Delta f(x)$$

ist.

Betrachtet man $\Delta^2 y = \Delta^2 f(x)$ wieder als eine Function von und lässt x in $x+\Delta x$ übergehen, so nennt man die dadurch h beigeführte Veränderung von $\Delta^2 y = \Delta^2 f(x)$, nämlich nach d Vorhergehenden die erste Differenz von $\Delta^2 y = \Delta^2 f(x)$, die dri Differenz von $y = f(x)$, und bezeichnet dieselbe durch $\Delta^3 y$ o $\Delta^3 f(x)$, so dass also

$$\Delta^3 y = \Delta^3 f(x) = \Delta\Delta^2 y = \Delta\Delta^2 f(x)$$

ist.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hiera schon mit völliger Deutlichkeit, und es ist daher allgemein

$$\Delta^{n+1} y = \Delta^{n+1} f(x) = \Delta\Delta^n y = \Delta\Delta^n f(x).$$

§. 2.

Die Verhältnisse oder Quotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3},$$

u. s. w.

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

u. s. w.

nennt man nach der Reihe das erste, zweite, dritte, ...*n*te,. Differenzenverhältniss der Function $y = f(x)$.

Wenn man nun Δx sich der Null nähern lässt, so nähe sich freilich auch die Differenzen

$$\Delta y = \Delta f(x),\quad \Delta^2 y = \Delta^2 f(x),\quad \Delta^3 y = \Delta^3 f(x),\quad \Delta^4 y = \Delta^4 f(x),\ldots.$$

jede für sich offenbar der Null. Dagegen werden sich unter de selben Voraussetzung, wenn nämlich Δx sich der Null nähert, di Differenzenverhältnisse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3},$$

u. s. w.

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

u. s. w.

ganz bestimmten endlichen Gränzen, welche der Null gleich, aber auch von Null verschieden sein können, nähern können, denen man diese Verhältnisse beliebig nahe bringen kann, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt. Dies hier durch Beispiele zu erläutern, würde ganz unnütz sein, weil wir im Folgenden sehr viele Fälle betrachten werden, wo sich die wirkliche Existenz solcher Gränzen mit grösster Bestimmtheit und Deutlichkeit nachweisen lässt, womit jedoch auf der anderen Seite keineswegs die Behauptung ausgesprochen sein soll, dass es in allen Fällen dergleichen Gränzen wirklich geben müsse, was zu einer ganz falschen Ansicht von der Sache führen würde; vielmehr muss die Existenz dieser Gränzen in jedem einzelnen Falle besonders nachgewiesen werden, was auch im Folgenden immer geschehen wird; wo wir aber von solchen Gränzen im Allgemeinen sprechen, soll jederzeit stillschweigend vorausgesetzt werden, dass deren wirkliche Existenz durch irgend ein Verfahren schon streng nachgewiesen worden sei.

Wir werden die Gränzen der Verhältnisse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3},$$

u. s. w.

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

u. s. w.

unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert, respective durch

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3},$$

u. s. w.

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

u. s. w.

wo Lim das abgekürzte lateinische Wort Limes ist, oder respective auch durch

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ldots,\ f^{(n)}(x),\ldots$$

bezeichnen, so dass also

$$f'(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

$$f''(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2},$$

$$f'''(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3},$$

u. s. w.

$$f^{(n)}(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

u. s. w.

ist.

§. 3.

Die Gränzen der Differenzenverhältnisse der Functionen, nach der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Definition derselben, sind in der ganzen Analysis von dem vielfachsten und wichtigsten Gebrauche, und es lassen sich von denselben auch eine ziemlich grosse Anzahl allgemeiner Sätze beweisen.

Um ein Beispiel eines solchen allgemeinen Satzes zu geben, sei einmal

$$F(x) = af(x),$$

wo a einen constanten Factor bezeichnet. Dann ist

$$F(x + \Delta x) - F(x) = a\{f(x + \Delta x) - f(x)\},$$

also

$$\Delta F(x) = a\Delta f(x).$$

Folglich ist ganz eben so

$$\Delta\Delta F(x) = a\Delta\Delta f(x)$$

oder

$$\Delta^2 F(x) = a\Delta^2 f(x).$$

Hieraus ergiebt sich auf dieselbe Weise

$$\Delta\Delta^2 F(x) = a\Delta\Delta^2 f(x),$$

also

$$\Delta^3 F(x) = a\Delta^3 f(x).$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich allgemein:

$$\Delta^n F(x) = a\Delta^n f(x),$$

also auch

$$\frac{\Delta^n F(x)}{\Delta x^n} = a\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern, so ergiebt sich hieraus auf der Stelle durch eine ganz einfache Betrachtung auch die Gleichung

$$\mathrm{Lim}\frac{\Delta^n F(x)}{\Delta x^n} = a\,\mathrm{Lim}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

oder in der im vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnung:

$$F^{(n)}(x) = af^{(n)}(x).$$

Wenn also

$$F(x) = af(x)$$

ist, so ist immer auch

$$F^{(n)}(x) = af^{(n)}(x);$$

oder wenn

$$Y = ay$$

ist, wo y und Y Functionen von x bezeichnen, so ist immer au

$$\frac{\Delta^n Y}{\Delta x^n} = a\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

und

$$\text{Lim}\frac{\Delta^n Y}{\Delta x^n} = a\,\text{Lim}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}.$$

Aehnliche allgemeine Sätze von den Gränzen der Differenz verhältnisse wie dieser giebt es eine grössere Anzahl; dieselt sind jedoch sämmtlich so einfach und durch sich selbst sogle verständlich, dass ich eine besondere Erörterung derselben h nicht für nöthig halte, indem diese Sätze, wo sie im Folgenc zur Anwendung kommen werden, gewiss einem Jeden sogleich v selbst einleuchten werden. Nur ein Satz dieser Art scheint n eine nähere und genauere Erläuterung zu bedürfen, die ich da im folgenden Paragraphen zu geben versuchen werde.

§. 4.

Wir wollen

$$\Delta^{n-1}f(x) = \varphi(x, \Delta x)$$

und, immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähe

$$f^{(n-1)}(x) = \text{Lim}\frac{\Delta^{n-1}f(x)}{\Delta x^{n-1}} = \text{Lim}\frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}} = \psi(x),$$

also, wenn i eine beliebige, aber bestimmte Grösse bezeichnet, au

$$\text{Lim}\frac{\varphi(x+i, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}} = \psi(x+i)$$

setzen. Nun ist offenbar

$$\text{Lim}\left\{\frac{1}{i}\cdot\frac{\varphi(x+i, \Delta x) - \varphi(x, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}}\right\}$$

$$= \text{Lim}\left\{\frac{1}{i}\cdot\frac{\varphi(x+i, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}} - \frac{1}{i}\cdot\frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}}\right\}$$

$$= \text{Lim}\left\{\frac{1}{i}\cdot\frac{\varphi(x+i, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}}\right\} - \text{Lim}\left\{\frac{1}{i}\cdot\frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{i}\text{Lim}\frac{\varphi(x+i, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}} - \frac{1}{i}\text{Lim}\frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{i}\psi(x+i) - \frac{1}{i}\psi(x) = \frac{\psi(x+i) - \psi(x)}{i}.$$

Lässt man nun Δx und i sich zugleich der Null nähern und setzt eben deshalb auch Δx für i, so erhält man aus vorstehender Gleichung die Gleichung:

$$\mathrm{Lim}\frac{\varphi(x+\Delta x,\Delta x)-\varphi(x,\Delta x)}{\Delta x^n}=\mathrm{Lim}\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\Delta^n f(x)=\Delta\Delta^{n-1}f(x)=\varphi(x+\Delta x,\Delta x)-\varphi(x,\Delta x)$$

und

$$\Delta\,\mathrm{Lim}\frac{\Delta^{n-1}f(x)}{\Delta x^{n-1}}=\psi(x+\Delta x)-\psi(x);$$

also

$$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}=\frac{\varphi(x+\Delta x,\Delta x)-\varphi(x,\Delta x)}{\Delta x^n}$$

und

$$\frac{\Delta\,\mathrm{Lim}\frac{\Delta^{n-1}f(x)}{\Delta x^{n-1}}}{\Delta x}=\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\mathrm{Lim}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}=\mathrm{Lim}\frac{\Delta\,\mathrm{Lim}\frac{\Delta^{n-1}f(x)}{\Delta x^{n-1}}}{\Delta x},$$

oder, weil bekanntlich

$$\mathrm{Lim}\frac{\Delta^{n-1}f(x)}{\Delta x^{n-1}}=f^{(n-1)}(x),\quad \mathrm{Lim}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}=f^{(n)}(x)$$

ist:

$$f^{(n)}(x)=\mathrm{Lim}\frac{\Delta f^{(n-1)}(x)}{\Delta x},$$

eine für das Folgende sehr wichtige Gleichung, von der wir häufig Anwendung zu machen Gelegenheit finden werden.

Wenn $y=f(x)$ ist, so kann man diese Gleichung auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\mathrm{Lim}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\mathrm{Lim}\frac{\Delta\,\mathrm{Lim}\frac{\Delta^{n-1}y}{\Delta x^{n-1}}}{\Delta x}.$$

Dieselbe wird gebraucht, um $f^{(n)}(x)$ aus $f^{(n-1)}(x)$ oder

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} \text{ aus } \operatorname{Lim}\frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}}$$

abzuleiten, und ist daher, wie schon erinnert, sehr wichti

III.

Die Fundamentaltheoreme der Entwickelung der Functionen in Reihen.

§. 1.

Wenn $y=f(x)$ eine beliebige Function der veränderlichen Grösse x bezeichnet, so wollen wir für jede durch k bezeichnete positive ganze Zahl

$$1)\quad y_k=f(x+k\Delta x)$$

setzen. Dann haben wir in gewöhnlicher Bezeichnung die folgenden Gleichungen:

$$y_1-y=\Delta y,$$

$$y_2-y_1=\Delta y_1,$$

$$y_3-y_2=\Delta y_2,$$

u. s. w.

$$y_k-y_{k-1}=\Delta y_{k-1};$$

durch deren Addition auf der Stelle die Gleichung

$$y_k-y=\Delta y+\Delta y_1+\Delta y_2+\ldots+\Delta y_{k-1}$$

erhalten wird. Also ist

$$2)\quad y_k=y+\Delta y+\Delta y_1+\Delta y_2+\ldots+\Delta y_{k-1}.$$

Lässt man in dieser Gleichung x in $x+\Delta x$ übergehen und zieht von der dadurch hervorgehenden Gleichung die Gleichung 2) ab, so erhält man offenbar die Gleichung

$$\Delta y_k=\Delta y+\Delta\Delta y+\Delta\Delta y_1+\ldots+\Delta\Delta y_{k-1},$$

also in abkürzender Bezeichnung:

$$3)\quad \Delta y_k=\Delta y+\Delta^2 y+\Delta^2 y_1+\Delta^2 y_2+\ldots+\Delta^2 y_{k-1};$$

folglich nach 2):

$$y_k = y + \Delta y$$
$$+ \Delta y + \Delta^2 y$$
$$+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1$$
$$+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2$$

u. s. w.

$$+ \Delta y + \Delta^2 y + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \ldots + \Delta^2 y_{k-2},$$

also

$$4) \quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k-1}{1}\Delta^2 y + \frac{k-2}{1}\Delta^2 y_1 + \frac{k-3}{1}\Delta^2 y_2 + \ldots + \frac{1}{1}\Delta^2 y_{k-2}.$$

Lässt man in der Gleichung 3) die Grösse x in $x + \Delta x$ übergehen und zieht von der dadurch sich ergebenden Gleichung die Gleichung 3) ab, so erhält man offenbar die Gleichung

$$\Delta\Delta y_k = \Delta\Delta y + \Delta\Delta^2 y + \Delta\Delta^2 y_1 + \ldots + \Delta\Delta^2 y_{k-1},$$

also in abkürzender Bezeichnung:

$$5) \quad \Delta^2 y_k = \Delta^2 y + \Delta^3 y + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \ldots + \Delta^3 y_{k-1};$$

folglich nach 4):

$$y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k-1}{1}\Delta^2 y$$
$$+ \frac{k-2}{1}\Delta^2 y + \frac{k-2}{1}\Delta^3 y$$
$$+ \frac{k-3}{1}\Delta^2 y + \frac{k-3}{1}\Delta^3 y + \frac{k-3}{1}\Delta^3 y_1$$

u. s. w.

$$+ \frac{1}{1}\Delta^2 y + \frac{1}{1}\Delta^3 y + \frac{1}{1}\Delta^3 y_1 + \ldots + \frac{1}{1}\Delta^3 y_{k-3},$$

also nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$6) \quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y$$
$$+ \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^3 y_1 + \ldots + \frac{2.1}{1.2}\Delta^3 y_{k-3}.$$

Lässt man in der Gleichung 5) die Grösse x in $x + \Delta x$ übergehen und zieht von der dadurch erhaltenen Gleichung die Gleichung 5) ab, so erhält man offenbar die Gleichung

$$\Delta\Delta^2 y_k = \Delta\Delta^2 y + \Delta\Delta^3 y + \Delta\Delta^3 y_1 + \ldots + \Delta\Delta^3 y_{k-1},$$

also in abkürzender Bezeichnung:

$$7)\quad \Delta^3 y_k = \Delta^3 y + \Delta^4 y + \Delta^4 y_1 + \Delta^4 y_2 + \ldots + \Delta^4 y_{k-1};$$

folglich nach 6):

$$y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{(k-1).(k-2)}{1.2}\Delta^3 y$$
$$+ \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\Delta^3 y + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}$$

u. s. w.

$$+ \frac{2.1}{1.2}\Delta^3 y + \frac{2.1}{1.2}\Delta^4 y + \ldots + \frac{2.1}{1.2}\Delta^4 y_{k-}$$

also nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$8)\quad y_k = y + \frac{k}{1}\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\Delta^3 y$$
$$+ \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3}\Delta^4 y + \frac{(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3}\Delta^4 y_1$$
$$+ \ldots + \frac{3.2.1}{1.2.3}\Delta^4 y_{k-4}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hier sch mit völliger Deutlichkeit, und es ist daher allgemein für je positive ganze n, welches nicht grösser als $k-1$ ist, wenn uns der bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten bedien

$$9)\quad y_k = y + k_1\Delta y + k_2\Delta^2 y + k_3\Delta^3 y + \ldots + k_n\Delta^n y$$
$$+ (k-1)_n\Delta^{n+1} y + (k-2)_n\Delta^{n+1} y_1 + (k-3)_n\Delta^{n+1} y_2$$
$$+ \ldots + n_n\Delta^{n+1} y_{k-n-1},$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$10)\quad R_n = (k-1)_n\Delta^{n+1} y + (k-2)_n\Delta^{n+1} y_1 + (k-3)_n\Delta^{n+1} y_2$$
$$+ \ldots + n_n\Delta^{n+1} y_{k-n-1}$$

gesetzt wird:

$$11)\quad y_k = y + k_1\Delta y + k_2\Delta^2 y + k_3\Delta^3 y + \ldots + k_n\Delta^n y + R_n.$$

§. 2.

Setzen wir jetzt

$$12)\quad i = k\Delta x,\ \text{also}\ k = \frac{i}{\Delta x};$$

so ist nach 11), wie leicht gefunden wird:

$$13)\quad f(x+i)=y+\frac{i}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+\frac{i(i-\Delta x)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$

u. s. w.

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

$$+R_n;$$

und wenn wir der Kürze wegen

$$14)\quad \Omega_n=$$

$$\frac{(k-1)_n\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}+(k-2)_n\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}+(k-3)_n\frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}+\ldots+n_n\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}}{(k-1)_n+(k-2)_n+(k-3)_n+\ldots+n_n}$$

setzen, so ist nach 10):

$$R_n=\{(k-1)_n+(k-2)_n+(k-3)_n+\ldots+n_n\}\,\Omega_n\Delta x^{n+1},$$

also, weil nach der Lehre von den figurirten Zahlen

$$k_{n+1}=(k-1)_n+(k-2)_n+(k-3)_n+\ldots+n_n$$

ist:

$$15)\quad R_n=k_{n+1}\,\Omega_n\Delta x^{n+1},$$

oder, wie man sogleich übersieht:

$$16)\quad R_n=\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots(i-n\Delta x)}{1.2.3\ldots(n+1)}\,\Omega_n.$$

Weil aber die Grössen

$$(k-1)_n,\ (k-2)_n,\ (k-3)_n,\ \ldots,\ n_n$$

offenbar sämmtlich positiv sind, so ist wegen des Ausdrucks 14) nach einem bekannten Satze von den Mittelgrössen (I. §. 3.6. Zweiter Zusatz.):

$$17)\quad \Omega_n=M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}},\ldots,\ \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right),$$

und folglich nach 16):

$$18)\quad R_n = \frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots.(i-n\Delta x)}{1.2.3\ldots.(n+1)} M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \ldots, \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-}}{\Delta x^{n+1}}\right.$$

also nach 13):

$$19)\quad f(x+i) = y + \frac{i}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+\frac{i(i-\Delta x)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$$

u. s. w.

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots.(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots.n}\cdot\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

$$+\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots.(i-n\Delta x)}{1.2.3\ldots.(n+1)} M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \ldots, \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-}}{\Delta x^{n+1}}\right.$$

§. 3.

Wenn man nun k in's Unendliche wachsen lässt, so näh wegen der Gleichung

$$i = k\Delta x, \text{ also } \Delta x = \frac{i}{k},$$

die Grösse Δx sich der Null, und die Grössen

$$\frac{i(i-\Delta x)}{1.2},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)}{1.2.3},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)}{1.2.3.4},$$

u. s. w.

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots.(i-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots.n},$$

$$\frac{i(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\ldots.(i-n\Delta x)}{1.2.3\ldots.(n+1)};$$

wobei man nicht unbeachtet lassen muss, dass n hierbei als constant zu betrachten ist, nähern sich folglich respective den Gränzen

$$\frac{i^2}{1.2},\ \frac{i^3}{1.2.3},\ \frac{i^4}{1.2.3.4},\ \ldots\ \frac{i^n}{1.2.3\ldots n},\ \frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Ferner nähern sich, weil Δx sich der Null nähert, die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2},\ \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3},\ \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4},\ \ldots\ \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

respective den Gränzen

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x).$$

Weil endlich bekanntlich nach 1):

$$y = f(x),$$
$$y_1 = f(x + \Delta x),$$
$$y_2 = f(x + 2\Delta x),$$
$$y_3 = f(x + 3\Delta x),$$
u. s. w.
$$y_{k-n-1} = f(x + (k-n-1)\Delta x) = f(x + i - (n+1)\Delta x)$$

ist, und offenbar, wenn Δx sich der Null nähert, die Reihe der Grössen

$$x,\ x + \Delta x,\ x + 2\Delta x,\ \ldots,\ x + i - (n+1)\Delta x$$

desto genauer, je näher Δx der Null kommt, die stetige Zahlenreihe von x bis $x+i$ darstellt; so stellt die Reihe

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{k-n-1}$$

desto genauer, je näher Δx der Null kommt, die Reihe der Werthe dar, welche die Function $f(u)$ erhält, wenn man sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt; und die Reihe

$$\frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1} y_1}{\Delta x^{n+1}},\ \frac{\Delta^{n+1} y_2}{\Delta x^{n+1}},\ \ldots,\ \frac{\Delta^{n+1} y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}$$

stellt daher desto genauer, je näher Δx der Null kommt, die Reihe der Werthe dar, welche $f^{(n+1)}(u)$ erhält, wenn man sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt.

Verändert sich nun aber $f^{(n+1)}(u)$ selbst stetig, wenn man sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, so muss offen-

bar jede Mittelgrösse zwischen allen den Werthen, welche $f^{(n+1)}(u)$ erhält, wenn man sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, einem dieser Werthe von $f^{(n+1)}(u)$ gleich sein, welchen $f^{(n+1)}(u)$ erhält, wenn man für u einen gewissen bestimmten, zwischen x und $x+i$ liegenden Werth setzt; und da man, wenn ϱ eine gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet, jede Mittelgrösse zwischen x und $x+i$ offenbar durch $x+\varrho i$ darstellen kann *), so wird man jede Mittelgrösse zwischen allen den Werthen, welche $f^{(n+1)}(u)$ erhält, wenn man sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, unter der Voraussetzung einer stetigen Veränderung von $f^{(n+1)}(u)$ in dem Intervalle $u=x$ und $u=x+i$, durch $f^{(n+1)}(x+\varrho i)$ ausdrücken können, und es wird also nach dem Vorhergehenden, immer unter der Voraussetzung, dass k in's Unendliche wächst, offenbar

$$M\left(\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \ldots, \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n-1}}\right) = f^{(n+1)}(x+\varrho i)$$

gesetzt werden können.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so wird man unmittelbar zu dem folgenden wichtigen Satze geführt:

Lehrsatz.

Wenn $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ sämmtlich endliche völlig bestimmte Grössen sind, und $f^{(n+1)}(u)$ sich stetig verändert, wenn man sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, so ist

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}f'(x) + \frac{i^2}{1.2}f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)$$

$$+ \ldots + \frac{i^n}{1 \ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{i^{n+1}}{1 \ldots (n+1)}f^{(n+1)}(x+\varrho i),$$

wo ϱ eine gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

Setzt man in vorstehender Gleichung $x=0$ und $i=x$, so erhält man den folgenden Satz:

---

*) Wenn ϱ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse, also eine Mittelgrösse zwischen 0 und 1 ist, so ist $\varrho = M(0, 1)$, folglich nach bekannten Sätzen von den Mittelgrössen (I. §. 3. 4.) $\varrho i = M(0, i)$; also ferner $x+\varrho i = M(x, x+i)$, nach I. §. 3. 5.

Lehrsatz.

Wenn $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{IV}(0)$,...., $f^{(n)}(0)$ sämmtlich endliche völlig bestimmte Grössen sind und $f^{(n+1)}(u)$ sich stetig verändert, wenn man sich u von $u=0$ bis $u=x$ stetig verändern lässt, so ist

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+....+\frac{x^n}{1....n}f^{(n)}(0)$$
$$+\frac{x^{n+1}}{1....(n+1)}f^{(n+1)}(\varrho x),$$

wo ϱ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

§. 4.

Die Anzahl der Glieder der Grösse

$$R_n=(k-1)_n\Delta^{n+1}y+(k-2)_n\Delta^{n+1}y_1+(k-3)_n\Delta^{n+1}y_2+...+n_n\Delta^{n+1}y_{k-n-1}$$

ist $k-n$, und nach einem bekannten Satze von den Mittelgrössen (I. §. 3. 6. Erster Zusatz.) ist folglich

$$\frac{(k-1)_n\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}+(k-2)_n\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}+(k-3)_n\frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}+....+n_n\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}}{k-n}$$

eine Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$(k-1)_n\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ (k-2)_n\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ (k-3)_n\frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}},\ ....,\ n_n\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}},$$

die wir durch

$$M\left\{(k-1)_n\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ (k-2)_n\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},\ (k-3)_n\frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}},....,n_n\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\right\}$$

bezeichnen wollen. Folglich ist nach dem Obigen

$$R_n=(k-n)\Delta x^{n+1}M\{(k-1)_n\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ (k-2)_n\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},....$$
$$....,n_n\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\},$$

oder

$$R_n=(k-n)\Delta x.\Delta x^n M\{(k-1)_n\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},\ (k-2)_n\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},....$$
$$....,n_n\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}\},$$

also, wenn wir mit Δx^n unter dem Zeichen M multipliciren, was nach der Lehre von den Mittelgrössen (I. §. 3. 4.) bekanntlich verstattet ist, und bemerken, dass offenbar

$$(k-n)\Delta x = i - n\Delta x$$

und

$$(k-1)_n \Delta x^n = \frac{(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\dots(i-n\Delta x)}{1.2.3\dots n},$$

$$(k-2)_n \Delta x^n = \frac{(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)\dots(i-(n+1)\Delta x)}{1.2.3\dots n},$$

$$(k-3)_n \Delta x^n = \frac{(i-3\Delta x)(i-4\Delta x)\dots(i-(n+2)\Delta x)}{1.2.3\dots n},$$

u. s. w.

$$n_n \Delta x^n = \frac{(i-(k-n)\Delta x)(i-(k-n+1)\Delta x)\dots(i-(k-1)\Delta x)}{1.2.3\dots n}$$

ist:

$$R_n = (i-n\Delta x)M \left\{ \begin{array}{l} \frac{(i-\Delta x)(i-2\Delta x)\dots(i-n\Delta x)}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \\ \frac{(i-2\Delta x)(i-3\Delta x)\dots(i-(n+1)\Delta x)}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \\ \text{u. s. w.} \\ \frac{(i-(k-n)\Delta x)(i-(k-n+1)\Delta x)\dots(i-(k-1)\Delta x)}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{\Delta^{n+1}y_{k-n}}{\Delta x^{n+1}} \end{array} \right.$$

oder, wenn wir den Factor

$$\frac{i^n}{1.2.3\dots n}$$

vor das Zeichen M nehmen, was nach dem schon vorher angewandten Satze von den Mittelgrössen (I. §. 3. 4. Zusatz.) verstattet ist:

$$R_n = \frac{i^n(i-n\Delta x)}{1.2.3\dots n} M \left\{ \begin{array}{l} (1-\frac{\Delta x}{i})(1-\frac{2\Delta x}{i})\dots(1-\frac{n\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}}, \\ (1-\frac{2\Delta x}{i})(1-\frac{3\Delta x}{i})\dots(1-\frac{(n+1)\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}}, \\ (1-\frac{3\Delta x}{i})(1-\frac{4\Delta x}{i})\dots(1-\frac{(n+2)\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}}, \\ \text{u. s. w.} \\ (1-\frac{(k-n)\Delta x}{i})(1-\frac{(k-n+1)\Delta x}{i})\dots(1-\frac{(k-1)\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n}}{\Delta x^{n+1}} \end{array} \right.$$

Stellt man nun die Grössen

$$(1-\frac{\Delta x}{i})(1-\frac{2\Delta x}{i})(1-\frac{3\Delta x}{i})\,....\,(1-\frac{n\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}y}{\Delta x^{n+1}},$$

$$(1-\frac{2\Delta x}{i})(1-\frac{3\Delta x}{i})(1-\frac{4\Delta x}{i})\,....\,(1-\frac{(n+1)\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}y_1}{\Delta x^{n+1}},$$

$$(1-\frac{3\Delta x}{i})(1-\frac{4\Delta x}{i})(1-\frac{5\Delta x}{i})\,....\,(1-\frac{(n+2)\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}y_2}{\Delta x^{n+1}},$$

u. s. w.

$$(1-\frac{(k-n)\Delta x}{i})(1-\frac{(k-n+1)\Delta x}{i})(1-\frac{(k-n+2)\Delta x}{i})\,....\,(1-\frac{(k-1)\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}y_{k-n-1}}{\Delta x^{n+1}}$$

auf folgende Art dar:

$$(1-\frac{\Delta x}{i}-\frac{0\Delta x}{i})(1-\frac{2\Delta x}{i}-\frac{0\Delta x}{i})(1-\frac{3\Delta x}{i}-\frac{0\Delta x}{i})\,....\,(1-\frac{n\Delta x}{i}-\frac{0\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}f(x+0\Delta x)}{\Delta x^{n+1}},$$

$$(1-\frac{\Delta x}{i}-\frac{1\Delta x}{i})(1-\frac{2\Delta x}{i}-\frac{1\Delta x}{i})(1-\frac{3\Delta x}{i}-\frac{1\Delta x}{i})\,....\,(1-\frac{n\Delta x}{i}-\frac{1\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}f(x+1\Delta x)}{\Delta x^{n+1}},$$

$$(1-\frac{\Delta x}{i}-\frac{2\Delta x}{i})(1-\frac{2\Delta x}{i}-\frac{2\Delta x}{i})(1-\frac{3\Delta x}{i}-\frac{2\Delta x}{i})\,....\,(1-\frac{n\Delta x}{i}-\frac{2\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}f(x+2\Delta x)}{\Delta x^{n+1}},$$

u. s. w.

$$(1-\frac{\Delta x}{i}-\frac{k\Delta x}{i}+\frac{(n+1)\Delta x}{i})(1-\frac{2\Delta x}{i}-\frac{k\Delta x}{i}+\frac{(n+1)\Delta x}{i})(1-\frac{3\Delta x}{i}-\frac{k\Delta x}{i}+\frac{(n+1)\Delta x}{i})\,....\,(1-\frac{n\Delta x}{i}-\frac{k\Delta x}{i}+\frac{(n+1)\Delta x}{i})\frac{\Delta^{n+1}f(x+k\Delta x-(n+1)\Delta x)}{\Delta x^{n+1}};$$

und erinnert sich, dass n constant und $k\varDelta x = i$ ist, so erhellet mit völliger Deutlichkeit, dass diese Reihe desto genauer, je näher $\varDelta x$ der Null kommt, mit der Reihe der Werthe zusammenfällt, welche die Function

$$(1-\frac{u}{i})(1-\frac{u}{i})(1-\frac{u}{i})\ldots.(1-\frac{u}{i})f^{(n+1)}(x+u),$$

wo die Anzahl der gleichen Factoren n ist und $f^{(n+1)}(x+u)$ aus $f^{(n+1)}(x)$ erhalten wird, wenn man darin $x+u$ für x setzt, also die Function

$$(1-\frac{u}{i})^n f^{(n+1)}(x+u),$$

erhält, wenn man sich in derselben u von 0 bis i stetig verändern lässt; und ändert sich nun $f^{(n+1)}(x+u)$, also natürlich *) auch

$$(1-\frac{u}{i})^n f^{(n+1)}(x+u),$$

stetig, wenn man sich u von 0 bis i stetig verändern lässt, so wird man, indem man sich immer k ins Unendliche wachsend denkt, jede Mittelgrösse zwischen den obigen Grössen durch

$$(1-\frac{\varrho i}{i})^n f^{(n+1)}(x+\varrho i)$$

bezeichnen können, wo ϱ wieder eine gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bedeutet, also durch

$$(1-\varrho)^n f^{(n+1)}(x+\varrho i).$$

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich, immer n als constant, k als unendlich gross, also $\varDelta x$ der Null unendlich nahe kommend gedacht, unmittelbar der folgende Ausdruck:

$$R_n = \frac{i^{n+1}(1-\varrho)^n}{1.2.3\ldots.n} f^{(n+1)}(x+\varrho i),$$

und wir haben daher jetzt den folgenden Satz:

Lehrsatz.

Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$,.... $f^{(n)}(x)$ sämmtlich endliche völlig bestimmte Grössen sind und $f^{(n+1)}(u)$ sich stetig verändert, wenn man sich u von $u=x$ bis $u=x+i$ stetig verändern lässt, so ist

*) Weil n eine positive ganze Zahl ist.

$$f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots+\frac{i^n}{1\ldots n}f^{(n)}(x)$$
$$+\frac{i^{n+1}(1-\varrho)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(x+\varrho i),$$

wo ϱ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

Setzt man in vorstehender Gleichung $x=0$ und $i=x$, so erhält man den folgenden Satz:

Lehrsatz.

Wenn $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ... $f^{(n)}(0)$ sämmtlich endliche völlig bestimmte Grössen sind und $f^{(n+1)}(u)$ sich stetig verändert, wenn man sich u von $u=0$ bis $u=x$ stetig verändern lässt, so ist

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}(0)$$
$$+\frac{x^{n+1}(1-\varrho)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(\varrho x),$$

wo ϱ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet.

§. 5.

Zwei bestimmte Werthe der veränderlichen Grösse x in der Function $f(x)$ wollen wir jetzt durch a und der Kürze wegen durch x selbst bezeichnen. Theilen wir dann die Differenz oder das Intervall $x-a$ in n gleiche Theile, wo natürlich n eine positive ganze Zahl bezeichnet, und setzen der Kürze wegen

$$i=\frac{x-a}{n},$$

so ist nach §. 3., wenn wir alle dort wegen der Stetigkeit der Functionen gemachten Voraussetzungen auch hier ohne weitere besondere Bemerkung stets festhalten, indem

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ldots\ \varrho_{n-1}$$

lauter positive, die Einheit nicht übersteigende Grössen bezeichnen:

$$f(a+i)=f(a)+\frac{i}{1}f'(a)+\frac{i^2}{1.2}f''(a+\varrho_0 i),$$

$$f(a+2i)=f(a+i)+\frac{i}{1}f'(a+i)+\frac{i^2}{1.2}f''(a+i+\varrho_1 i),$$

$$f(a+3i)=f(a+2i)+\frac{i}{1}f'(a+2i)+\frac{i^2}{1.2}f''(a+2i+\varrho_2 i),$$

$$f(a+4i)=f(a+3i)+\frac{i}{1}f'(a+3i)+\frac{i^2}{1.2}f''(a+3i+\varrho_3 i),$$

u. s. w.

$$f(a+ni)=f(a+(n-1)i)+\frac{i}{1}f'(a+(n-1)i)+\frac{i^2}{1.2}f''(a+(n-1)i+\varrho_n$$

also

$$f(a+i)-f(a)=if'(a)+\tfrac{1}{2}i^2f''(a+\varrho_0 i),$$

$$f(a+2i)-f(a+i)=if'(a+i)+\tfrac{1}{2}i^2f''(a+i+\varrho_1 i),$$

$$f(a+3i)-f(a+2i)=if'(a+2i)+\tfrac{1}{2}i^2f''(a+2i+\varrho_2 i),$$

$$f(a+4i)-f(a+3i)=if'(a+3i)+\tfrac{1}{2}i^2f''(a+3i+\varrho_3 i),$$

u. s. w.

$$f(a+ni)-f(a+(n-1)i)=if'(a+(n-1)i)+\tfrac{1}{2}i^2f''(a+(n-1)i+\varrho_n$$

Addirt man alle diese Gleichungen zusammen und hebt was sich aufheben lässt, bemerkt auch zugleich, dass

$$a+ni=x$$

ist, so erhält man:

$$f(x)-f(a)=i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots+f'(a+(n-1)i)$$
$$+\tfrac{1}{2}i^2\{f''(a+\varrho_0 i)+f''(a+i+\varrho_1 i)+f''(a+2i+\varrho_2 i)+\ldots+f''(a+(n-1)i+\varrho_n$$

Nach einem bekannten Satze von den Mittelgrössen (I. §. Erster Zusatz.) ist aber jederzeit

$$\frac{f''(a+\varrho_0 i)+f''(a+i+\varrho_1 i)+f''(a+2i+\varrho_2 i)+\ldots+f''(a+(n-1)i+\varrho_n}{n}$$

eine Mittelgrösse zwischen den Grössen

$$f''(a+\varrho_0 i),\ f''(a+i+\varrho_1 i),\ f''(a+2i+\varrho_2 i),\ldots,\ f''(a+(n-1)+\varrho_n$$

also

$$\frac{f''(a+\varrho_0 i)+f''(a+i+\varrho_1 i)+f''(a+2i+\varrho_2 i)+\ldots+f''(a+(n-1)i+\varrho_n}{n}$$
$$=M\{f''(a+\varrho_0 i),\ f''(a+i+\varrho_1 i),\ f''(a+2i+\varrho_2 i),\ldots,\ f''(a+(n-1)i+\varrho_n$$

folglich

$$f''(a+\varrho_0 i)+f''(a+i+\varrho_1 i)+f''(a+2i+\varrho_2 i)+\ldots+f''(a+(n-1)i+\varrho_n$$
$$=nM\{f''(a+\varrho_0 i),\ f''(a+i+\varrho_1 i),\ f''(a+2i+\varrho_2 i),\ldots,\ f''(a+(n-1)i+\varrho_n-$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$f(x)-f(a)=i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots+f'(a+(n-1)i)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}i^2.nM\{f''(a+\varrho_0 i),\ f''(a+i+\varrho_1 i),\ f''(a+2i+\varrho_2 i),\ldots,$$
$$f''(a+(n-1)i+\varrho_{n-1}i)\},$$

oder, weil $ni=x-a$ ist:

$$f(x)-f(a)=i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots+f'(a+(n-1)i)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}i(x-a)M\{f''(a+\varrho_0 i),\ f''(a+i+\varrho_1 i),\ldots,\ f''(a+(n-1)i+\varrho_{n-1}i)\}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ldots\ \varrho_{n-1}$$

lauter positive, die Einheit nicht übersteigende Grössen sind, so sind

$$a+\varrho_0 i,\ a+i+\varrho_1 i,\ a+2i+\varrho_2 i,\ldots\ a+(n-1)i+\varrho_{n-1}i$$

lauter Mittelgrössen zwischen a und $a+ni$, d. i. zwischen a und x, und unter der Voraussetzung, dass $f''(u)$ sich stetig verändert, wenn man sich u von $u=a$ bis $u=x$ stetig verändern lässt, wird man also nach einer schon im Vorhergehenden mehrmals angewandten Betrachtung

$$M\{f''(a+\varrho_0 i),\ f''(a+i+\varrho_1 i),\ f''(a+2i+\varrho_2 i),\ldots,\ f''(a+(n-1)i+\varrho_{n-1}i)\}$$
$$=f''(a+\varrho(x-a))$$

setzen können, wo ϱ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet. Also ist nach dem Obigen

$$f(x)-f(a)=i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots+f'(a+(n-1)i)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}i(x-a)f''(a+\varrho(x-a)).$$

Lässt man nun n in's Unendliche wachsen, also i sich der Null nähern, so nähert, weil unter den gemachten Voraussetzungen offenbar

$$(x-a)f''(a+\varrho(x-a))$$

eine endliche völlig bestimmte Grösse ist, die Grösse

$$\tfrac{1}{2}i(x-a)f''(a+\varrho(x-a))$$

sich offenbar der Null, und nach dem Obigen nähert sich folglich

$$i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots+f'(a+(n-1)i)\}$$

der Gränze

$$f(x)-f(a).$$

Weil

$$if'(a+ni) = if'(x)$$

sich offenbar der Null nähert, wenn n in's Unendliche wächs[t], also i sich der Null nähert, so kann man auch sagen, dass

$$i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots.+f'(a+ni)\}$$

sich der Gränze

$$f(x)-f(a)$$

nähert, oder dass

$$f(x)-f(a)$$

die Gränze ist, welcher

$$i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots.+f'(a+ni)\}$$

sich nähert, wenn n in's Unendliche wächst, also i sich der Nu[ll] nähert.

Hierdurch gelangen wir also zu den folgenden Sätzen:

Lehrsatz.

Wenn $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$ endliche völlig bestimm[te] Werthe behalten oder sich stetig ändern, wenn man sic[h] u von $u=a$ bis $u=x$ stetig verändern lässt, und

$$i=\frac{x-a}{n}$$

gesetzt wird, so nähert sich

$$i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots.+f'(a+(n-1)i)\}$$

der Gränze

$$f(x)-f(a),$$

oder es ist

$$f(x)-f(a)$$
$$=\mathrm{Lim}.\,i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots.+f'(a+(n-1)i)\},$$

wenn man n in's Unendliche wachsen, also i sich de[r] Null nähern lässt.

Diesen Satz kann man auch auf folgende Art aussprechen:

Lehrsatz.

Wenn $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$ endliche, völlig bestimmte Werthe behalten oder sich stetig ändern, wenn man sich u von $u=a$ bis $u=x$ stetig verändern lässt, so nähert sich

$$\frac{x-a}{n}\{f'(a)+f'(a+\frac{x-a}{n})+f'(a+2\frac{x-a}{n})+\ldots+f'(a+(n-1)\frac{x-a}{n})\}$$

der Gränze

$$f(x)-f(a),$$

oder es ist

$$f(x)-f(a)$$

$$=\text{Lim.}\frac{x-a}{n}\{f'(a)+f'(a+\frac{x-a}{n})+f'(a+2\frac{x-a}{n})+\ldots+f'(a+(n-1)\frac{x-a}{n})\},$$

wenn man die positive ganze Zahl n in's Unendliche wachsen lässt.

Nur eine wenig veränderte Form dieser Sätze sind die folgenden Sätze:

Lehrsatz.

Wenn $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$ endliche, völlig bestimmte Werthe behalten oder sich stetig ändern, wenn man sich u von $u=a$ bis $u=x$ stetig verändern lässt, und

$$i=\frac{x-a}{n}$$

gesetzt wird, so nähert sich

$$i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots+f'(a+ni)\}$$

der Gränze

$$f(x)-f(a),$$

oder es ist

$$f(x)-f(a)$$

$$=\text{Lim.}\,i\{f'(a)+f'(a+i)+f'(a+2i)+\ldots+f'(a+ni)\},$$

wenn man n in's Unendliche wachsen, also i sich der Null nähern lässt;

oder:

Lehrsatz.

Wenn $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$ endliche, völlig bestimmte Werthe behalten oder sich stetig ändern, wenn man sich u von $u=a$ bis $u=x$ stetig verändern lässt, so nähert sich

$$\frac{x-a}{n}\{f'(a)+f'(a+\frac{x-a}{n})+f'(a+2\frac{x-a}{n})+\ldots+f'(a+n\frac{x-a}{n})\}$$

der Gränze

$$f(x)-f(a),$$

oder es ist

$$f(x)-f(a)$$

$$=\text{Lim.}\frac{x-a}{n}\{f'(a)+f'(a+\frac{x-a}{n})+f'(a+2\frac{x-a}{n})+\ldots+f'(a+n\frac{x-a}{n})\},$$

wenn man die positive ganze Zahl n in's Unendliche wachsen lässt.

IV.

Ueber die Function $(1+x)^\mu$.

§. 1.

Wir wollen zuerst für

$$y=f(x)=(a+bx)^\mu,$$

wo μ eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bezeichnen soll, die Grösse $f'(x)$, nämlich die Gränze zu bestimmen suchen, welcher der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert.

Zunächst wollen wir den Fall betrachten, wenn μ eine positive ganze Zahl ist. Offenbar ist

$$(a+b(x+\Delta x))^\mu-(a+bx)^\mu$$

$$=(a+b(x+\Delta x))(a+b(x+\Delta x))^{\mu-1}-(a+bx)^\mu,$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$(a+b(x+\Delta x))^\mu-(a+bx)^\mu$$
$$=b(a+b(x+\Delta x))^{\mu-1}\Delta x+(a+bx)\{(a+b(x+\Delta x))^{\mu-1}-(a+bx)^{\mu-1}\},$$

und folglich

$$\frac{(a+b(x+\Delta x))^\mu-(a+bx)^\mu}{\Delta x}$$
$$=b(a+b(x+\Delta x))^{\mu-1}+(a+bx)\frac{(a+b(x+\Delta x))^{\mu-1}-(a+bx)^{\mu-1}}{\Delta x}.$$

Lässt man jetzt in dieser Gleichung Δx sich der Null nähern und geht zu den Gränzen über, so erhält man offenbar die Gleichung

$$\operatorname{Lim}\frac{(a+b(x+\Delta x))^\mu-(a+bx)^\mu}{\Delta x}$$
$$=b(a+bx)^{\mu-1}+(a+bx)\operatorname{Lim}\frac{(a+b(x+\Delta x))^{\mu-1}-(a+bx)^{\mu-1}}{\Delta x},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\varphi(\mu)=\operatorname{Lim}\frac{(a+b(x+\Delta x))^\mu-(a+bx)^\mu}{\Delta x}$$

setzt, die Gleichung:

$$\varphi(\mu)=b(a+bx)^{\mu-1}+(a+bx)\varphi(\mu-1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Relation ergiebt sich nach und nach, weil μ nach der Voraussetzung eine positive ganze Zahl ist:

$$\varphi(\mu)=b(a+bx)^{\mu-1}+(a+bx)\varphi(\mu-1),$$
$$\varphi(\mu-1)=b(a+bx)^{\mu-2}+(a+bx)\varphi(\mu-2),$$
$$\varphi(\mu-2)=b(a+bx)^{\mu-3}+(a+bx)\varphi(\mu-3),$$

u. s. w.

$$\varphi(3)=b(a+bx)^2+(a+bx)\varphi(2),$$
$$\varphi(2)=b(a+bx)^1+(a+bx)\varphi(1).$$

Multiplicirt man jetzt diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$(a+bx)^0,\ (a+bx)^1,\ (a+bx)^2,\ldots,\ (a+bx)^{\mu-3},\ (a+bx)^{\mu-2};$$

addirt sie dann zu einander und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung

$$\varphi(\mu)=(\mu-1)b(a+bx)^{\mu-1}+(a+bx)^{\mu-1}\varphi(1).$$

Nun ist aber

$$\varphi(1) = \text{Lim}\frac{(a+b(x+\Delta x))^1-(a+bx)^1}{\Delta x} = \text{Lim}\frac{b\Delta x}{\Delta x},$$

also, weil immer, d. h. für jedes Δx,

$$\frac{b\Delta x}{\Delta x} = b$$

ist, offenbar

$$\varphi(1) = b$$

zu setzen; folglich nach dem Vorhergehenden

$$\varphi(\mu) = \mu b(a+bx)^{\mu-1},$$

also

$$\text{Lim}\frac{(a+b(x+\Delta x))^\mu-(a+bx)^\mu}{\Delta x} = \mu b(a+bx)^{\mu-1},$$

oder in bekannter Bezeichnung:

$$f'(x) = \mu b(a+bx)^{\mu-1}.$$

Wenn ferner μ eine negative ganze Zahl ist, so setze man

$$y = f(x) = \frac{1}{(a+bx)^{-\mu}},$$

wo nun $-\mu$ eine positive ganze Zahl ist. Also ist

$$\Delta y = \frac{1}{(a+b(x+\Delta x))^{-\mu}} - \frac{1}{(a+bx)^{-\mu}}$$

$$= -\frac{(a+b(x+\Delta x))^{-\mu}-(a+bx)^{-\mu}}{(a+bx)^{-\mu}(a+b(x+\Delta x))^{-\mu}},$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -(a+bx)^\mu(a+b(x+\Delta x))^\mu\frac{(a+b(x+\Delta x))^{-\mu}-(a+bx)^{-\mu}}{\Delta x}.$$

Lässt man nun in dieser Gleichung Δx sich der Null nähern und geht zu den Gränzen über, so erhält man offenbar die folgende Gleichung:

$$\text{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -(a+bx)^{2\mu}\text{Lim}\frac{(a+b(x+\Delta x))^{-\mu}-(a+bx)^{-\mu}}{\Delta x}.$$

Weil nun aber $-\mu$ eine positive ganze Zahl ist, so ist nach dem vorher betrachteten Falle eines positiven ganzen Exponenten:

$$\text{Lim}\frac{(a+b(x+\Delta x))^{-\mu}-(a+bx)^{-\mu}}{\Delta x} = -\mu b(a+bx)^{-\mu-1},$$

lso nach dem Vorhergehenden:

$$\mathrm{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-(a+bx)^{2\mu}.-\mu b(a+bx)^{-\mu-1},$$

olglich

$$f'(x)=\mu b(a+bx)^{\mu-1},$$

velche Formel ganz mit dem im vorhergehenden Falle gefundenen Resultate übereinstimmt.

Wenn μ ein positiver oder negativer Bruch ist, so wollen wir

$$\mu=\frac{p}{q}$$

etzen, wo p eine positive oder negative, q eine positive ganze ahl sein soll, was immer anzunehmen verstattet ist. Dann ist

$$y=f(x)=(a+bx)^{\frac{p}{q}},$$

lso

$$y^q=(a+bx)^p.$$

assen wir nun x in $x+\Delta x$ übergehen, so geht y in $y+\Delta y$ ber, und vorstehende Gleichung wird:

$$(y+\Delta y)^q=(a+b(x+\Delta x))^p,$$

olglich durch Subtraction der vorhergehenden Gleichung von dieser:

$$(y+\Delta y)^q-y^q=(a+b(x+\Delta x))^p-(a+bx)^p,$$

lso

$$\frac{(y+\Delta y)^q-y^q}{\Delta y}.\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(a+b(x+\Delta x))^p-(a+bx)^p}{\Delta x},$$

nd hieraus:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{(a+b(x+\Delta x))^p-(a+bx)^p}{\Delta x}}{\frac{(y+\Delta y)^q-y^q}{\Delta y}}.$$

Nähert sich nun Δx der Null, so nähert sich natürlich auch Δy der Null, und es ist also für der Null sich nähernde Δx und Δy offenbar:

$$\mathrm{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{Lim}\frac{(a+b(x+\Delta x))^p-(a+bx)^p}{\Delta x}}{\mathrm{Lim}\frac{(y+\Delta y)^q-y^q}{\Delta y}}.$$

Weil aber p und q ganze Zahlen sind, so ist nach den beiden vorhergehenden Fällen:

$$\operatorname{Lim} \frac{(a+b(x+\Delta x))^p-(a+bx)^p}{\Delta x}=pb(a+bx)^{p-1},$$

$$\operatorname{Lim} \frac{(y+\Delta y)^q-y^q}{\Delta y}=qy^{q-1};$$

also nach dem Obigen:

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x}=b\frac{p}{q}\cdot\frac{(a+bx)^{p-1}}{y^{q-1}}$$

oder

$$f'(x)=b\frac{p}{q}\cdot\frac{(a+bx)^{p-1}}{y^{q-1}}.$$

Folglich ist auch

$$f'(x)=b\frac{p}{q}\cdot\frac{(a+bx)^p}{y^{q-1}(a+bx)},$$

oder weil

$$(a+bx)^p=y^q$$

ist:

$$f'(x)=b\frac{p}{q}\cdot\frac{y}{a+bx},$$

also

$$f'(x)=\mu b\frac{y}{a+bx},$$

oder, weil $y=(a+bx)^\mu$ ist:

$$f'(x)=\mu b(a+bx)^{\mu-1}.$$

Hierbei ist aber noch Folgendes zu bemerken. Wir wollen den Bruch μ immer in den kleinsten Zahlen ausgedrückt annehmen. Wenn dann der Nenner von μ eine gerade Zahl ist, so darf $a+bx$ nur positiv sein, weil sonst $y=(a+bx)^\mu$ imaginär sein würde, wir aber natürlich bei diesen Gränzenbetrachtungen alle Grössen als reell vorauszusetzen genöthigt sind. Weil wir nun vorher

$$f'(x)=\mu b\frac{y}{a+bx}$$

fanden, so hat in diesem Ausdrucke in dem Falle, wo der Nenner von μ eine gerade Zahl ist, der Bruch

$$\frac{y}{a+bx}$$

mit $y=(a+bx)^\mu$ gleiches Vorzeichen; und da nun vorher

$$\frac{y}{a+bx}=(a+bx)^{\mu-1}$$

gesetzt wurde, so muss in dem in Rede stehenden Falle in der Formel

$$f'(x)=\mu b(a+bx)^{\mu-1}$$

auch $(a+bx)^{\mu-1}$ stets mit

$$y=f(x)=(a+bx)^\mu$$

von gleichem Vorzeichen genommen werden.

Aus allem Vorhergehenden ergiebt sich, dass für

$$y=f(x)=(a+bx)^\mu$$

in völliger Allgemeinheit

$$f'(x)=\mu b(a+bx)^{\mu-1}$$

ist, wenn man nur beachtet, dass in dieser Formel in dem Falle, wo μ ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit geradem Nenner ist, immer

$$(a+bx)^{\mu-1}$$

mit demselben Vorzeichen wie

$$y=f(x)=(a+bx)^\mu$$

genommen werden muss.

§. 2.

Bekanntlich (II. §. 4.) ist allgemein

$$f^{(n)}(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Um nun diese Gleichung auf die im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Function

$$y=f(x)=(a+bx)^\mu$$

anzuwenden, haben wir zuvörderst nach §. 1.:

$$f''(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta.\mu b(a+bx)^{\mu-1}}{\Delta x}=\mu b\operatorname{Lim}\frac{\Delta.(a+bx)^{\mu-1}}{\Delta x},$$

und folglich, weil nach §. 1., wenn man $\mu-1$ für das dortige μ setzt,

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta.(a+bx)^{\mu-1}}{\Delta x}=(\mu-1)b(a+bx)^{\mu-2}$$

ist:

$$f''(x)=\mu(\mu-1)b^2(a+bx)^{\mu-2}.$$

Ferner ist

$$f'''(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f''(x)}{\Delta x}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta.\mu(\mu-1)b^2(a+bx)^{\mu-2}}{\Delta x}$$

$$=\mu(\mu-1)b^2\operatorname{Lim}\frac{\Delta.(a+bx)^{\mu-2}}{\Delta x},$$

also, weil nach §. 1., wenn man $\mu-2$ für das dortige μ setzt,

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta.(a+bx)^{\mu-2}}{\Delta x}=(\mu-2)b(a+bx)^{\mu-3}$$

ist:

$$f'''(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)b^3(a+bx)^{\mu-3}.$$

Auf ähnliche Art ist

$$f^{IV}(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f'''(x)}{\Delta x}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta.\mu(\mu-1)(\mu-2)b^3(a+bx)^{\mu-3}}{\Delta x}$$

$$=\mu(\mu-1)(\mu-2)b^3\operatorname{Lim}\frac{\Delta.(a+bx)^{\mu-3}}{\Delta x},$$

also, weil nach §. 1., wenn man $\mu-3$ für das dortige μ setzt,

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta.(a+bx)^{\mu-3}}{\Delta x}=(\mu-3)b(a+bx)^{\mu-4}$$

ist:

$$f^{IV}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)b^4(a+bx)^{\mu-4}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, und auch das allgemeine Gesetz der gefundenen Ausdrücke, erhellet hier schon mit völliger Deutlichkeit. Wenn nämlich

$$y=f(x)=(a+bx)^{\mu}$$

ist, so ist für jedes positive ganze n:

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-n+1)b^n(a+bx)^{\mu-n},$$

mit der Bedingung, dass man, wenn μ ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit geradem Nenner ist, in der vorstehenden Formel $(a+bx)^{\mu-n}$ immer mit demselben Vorzeichen wie

$$y = f(x) = (a + bx)^{\mu}$$

ehmen muss, was in der Folge, auch ohne besondere Bemerung, stets festgehalten werden soll.

Für

$$y = f(x) = x^{\mu}$$

rgiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar:

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots (\mu - n + 1)x^{\mu - n}.$$

Ist μ eine positive ganze Zahl, so kann man $n = \mu$ setzen, nd erhält aus dem Obigen, wenn

$$y = f(x) = (a + bx)^{\mu}$$

st, in diesem Falle:

$$f^{(\mu)}(x) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots 3.2.1.b^{\mu},$$

lso eine constante Grösse.

Für

$$y = f(x) = x^{\mu}$$

st in dem Falle, wenn μ eine positive ganze Zahl ist:

$$f^{(\mu)}(x) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots 3.2.1.$$

§. 3.

Wir wollen jetzt die Function

$$y = f(x) = (1 + x)^{\mu},$$

nter der Voraussetzung, dass wir diese Potenz in dem Falle, o μ ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit geradem enner ist, positiv nehmen, einer genaueren Betrachtung unterwerfen.

Nach §. 2. ist allgemein

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots (\mu - n + 1)(1 + x)^{\mu - n},$$

so

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3 \ldots n} = \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots (\mu - n + 1)}{1.2.3 \ldots n}(1 + x)^{\mu - n},$$

ler in abkürzender Bezeichnung:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3 \ldots n} = \mu_n(1 + x)^{\mu - n},$$

glich für $x = 0$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3....n}=\mu_n.$$

Also (III. §. 4.) ist, wenn ϱ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet:

$$(1+x)^\mu=1+\mu_1x+\mu_2x^2+\mu_3x^3+....+\mu_nx^n$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)....(\mu-n)}{1.2.3....n}x^{n+1}(1-\varrho)^n(1+\varrho x)^{\mu-n-1}.$$

Wenn zuvörderst μ eine positive ganze Zahl ist, so ist es verstattet, $n=\mu$ zu setzen, wodurch man in diesem Falle aus vorstehender Gleichung sogleich

$$(1+x)^\mu=1+\mu_1x+\mu_2x^2+\mu_3x^3+....+\mu_\mu x^\mu$$

oder

$$(1+x)^\mu=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3+...+\frac{\mu(\mu-1)....1}{1.2.3....\mu}x^\mu$$

erhält.

Wenn aber μ keine positive ganze Zahl ist, so wollen wir annehmen, dass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit, oder dass

$$-1<x<+1$$

sei, und wollen unter dieser Voraussetzung den obigen sogenannten Rest

$$\frac{\mu(\mu-1)....(\mu-n)}{1.2.3....n}x^{n+1}(1-\varrho)^n(1+\varrho x)^{\mu-n-1}$$

einer genauen Untersuchung unterwerfen.

Zu dem Ende stellen wir diesen Rest auf folgende Art dar:

$$\frac{\mu(\mu-1)....(\mu-n)}{1.2.3....n}x^{n+1}.(1+\varrho x)^{\mu-1}.\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^n,$$

und betrachten jeden der drei Factoren

$$\frac{\mu(\mu-1)....(\mu-n)}{1.2.3....n}x^{n+1},\ (1+\varrho x)^{\mu-1},\ \left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^n$$

besonders.

Was zuerst den letzten Factor

$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^n$$

betrifft, so ist, weil der absolute Werth von x kleiner als die

inheit, ϱ aber positiv und nicht kleiner als die Einheit ist, klar, ass der stets positive Nenner $1+\varrho x$ niemals kleiner als der ets positive Zähler $1-\varrho$ sein kann, dass also auch

$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^n$$

ie Einheit niemals übersteigen wird.

Was ferner den zweiten Factor $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ betrifft, so hat ian bei dessen Betrachtung die folgenden Fälle zu unterscheiden.

Wenn x positiv und $\mu-1$ positiv ist, so erreicht $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ einen grössten Werth, wenn ϱ seinen grössten Werth erreicht, ›lglich für $\varrho=1$, so dass also in diesem Falle $(1+x)^{\mu-1}$ der rösste Werth ist, welchen $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ überhaupt erreichen kann.

Wenn x positiv und $\mu-1$ negativ ist, so erreicht $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ einen grössten Werth, wenn ϱ seinen kleinsten Werth erreicht, ›lglich für $\varrho=0$, so dass also in diesem Falle die Einheit der rösste Werth ist, welchen $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ überhaupt erreichen kann.

Wenn x negativ und $\mu-1$ positiv ist, so erreicht $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ einen grössten Werth, wenn ϱ seinen kleinsten Werth erreicht, ›lglich für $\varrho=0$, so dass also in diesem Falle die Einheit der rösste Werth ist, welchen $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ überhaupt erreichen kann.

Wenn x negativ und $\mu-1$ negativ ist, so erreicht $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ einen grössten Werth, wenn ϱ seinen grössten Werth erreicht, ›lglich für $\varrho=1$, so dass also in diesem Falle $(1+x)^{\mu-1}$ der rösste Werth ist, welchen $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ überhaupt erreichen kann.

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich, ass $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ niemals eine endliche, völlig bestimmte Grösse bersteigt, welche entweder $(1+x)^{\mu-1}$ oder die Einheit ist. Uns enügt es aber für das Folgende, überhaupt nur zu wissen, dass $(1+\varrho x)^{\mu-1}$ niemals eine endliche, völlig bestimmte Grösse überteigt, auf deren wirklichen Werth es uns hier weiter gar nicht ıkommt.

Was nun endlich den Factor

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.(\mu-n)}{1.2.3\ldots.n}x^{n+1}$$

trifft, so wollen wir denselben der Kürze wegen durch t_n beichnen. Dann ist, wie man sogleich übersieht:

$$t_{n+1} = -t_n(1-\frac{\mu}{n+1})x,$$

$$t_{n+2} = -t_{n+1}(1-\frac{\mu}{n+2})x,$$

$$t_{n+3} = -t_{n+2}(1-\frac{\mu}{n+3})x,$$

$$t_{n+4} = -t_{n+3}(1-\frac{\mu}{n+4})x,$$

u. s. w.

also:

$$t_{n+1} = -t_n(1-\frac{\mu}{n+1})x,$$

$$t_{n+2} = \quad t_n(1-\frac{\mu}{n+1})(1-\frac{\mu}{n+2})x^2,$$

$$t_{n+3} = -t_n(1-\frac{\mu}{n+1})(1-\frac{\mu}{n+2})(1-\frac{\mu}{n+3})x^3,$$

$$t_{n+4} = \quad t_n(1-\frac{\mu}{n+1})(1-\frac{\mu}{n+2})(1-\frac{\mu}{n+3})(1-\frac{\mu}{n+4})x^4,$$

u. s. w.

Die absoluten Werthe von x und t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}, ... wollen wir im Folgenden respective durch ξ und τ_n, τ_{n+1}, τ_{n+2}, τ_{n+3}, ... bezeichnen, und nun die beiden folgenden Fälle unterscheiden.

1. Wenn μ positiv ist, so wollen wir uns, was offenbar verstattet ist, $n+1$ grösser als μ genommen denken. Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\tau_{n+1} = \tau_n(1-\frac{\mu}{n+1})\xi,$$

$$\tau_{n+2} = \tau_n(1-\frac{\mu}{n+1})(1-\frac{\mu}{n+2})\xi^2,$$

$$\tau_{n+3} = \tau_n(1-\frac{\mu}{n+1})(1-\frac{\mu}{n+2})(1-\frac{\mu}{n+3})\xi^3,$$

$$\tau_{n+4} = \tau_n(1-\frac{\mu}{n+1})(1-\frac{\mu}{n+2})(1-\frac{\mu}{n+3})(1-\frac{\mu}{n+4})\xi^4,$$

u. s. w.

ist, so ist unter der gemachten Voraussetzung offenbar

$$\tau_{n+1} < \tau_n\xi,\quad \tau_{n+2} < \tau_n\xi^2,\quad \tau_{n+3} < \tau_n\xi^3,\quad \tau_{n+4} < \tau_n\xi^4,\ldots.$$

d da nun bekanntlich $\xi < 1$ ist, so nähern sich die Grössen

$$\tau_n,\quad \tau_{n+1},\quad \tau_{n+2},\quad \tau_{n+3},\quad \tau_{n+4},\ldots.$$

enn nur erst $n+1$ grösser als μ geworden ist, offenbar immer ehr und mehr der Null, und können derselben auch beliebig he gebracht werden, wenn man sie nur weit genug vom Annge der vorstehenden Reihe entfernt nimmt.

2. Wenn μ negativ ist, so wollen wir grösserer Deutlichkeit egen $-\mu$ für μ schreiben, wo dann μ selbst positiv ist, und glich nach dem Obigen

$$\tau_{n+1} = \tau_n\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\xi,$$

$$\tau_{n+2} = \tau_n\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\left(1+\frac{\mu}{n+2}\right)\xi^2,$$

$$\tau_{n+3} = \tau_n\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\left(1+\frac{\mu}{n+2}\right)\left(1+\frac{\mu}{n+3}\right)\xi^3,$$

$$\tau_{n+4} = \tau_n\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\left(1+\frac{\mu}{n+2}\right)\left(1+\frac{\mu}{n+3}\right)\left(1+\frac{\mu}{n+4}\right)\xi^4,$$

u. s. w.

tzen. In diesem Falle ist also offenbar

$$\tau_{n+1} = \tau_n\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\xi,$$

$$\tau_{n+2} < \tau_n\left\{\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\xi\right\}^2,$$

$$\tau_{n+3} < \tau_n\left\{\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\xi\right\}^3,$$

$$\tau_{n+4} < \tau_n\left\{\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\xi\right\}^4,$$

u. s. w.

un kann man aber immer $n+1$ so gross annehmen, dass

$$\left(1+\frac{\mu}{n+1}\right)\xi < 1$$

t. Denn diese Bedingung ist jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$1+\frac{\mu}{n+1} < \frac{1}{\xi},$$

also wenn die Bedingung

$$\frac{\mu}{n+1} < \frac{1}{\xi} - 1, \quad \frac{\mu}{n+1} < \frac{1-\xi}{\xi},$$

also wenn die Bedingung

$$\frac{n+1}{\mu} > \frac{\xi}{1-\xi},$$

folglich, wenn die Bedingung

$$n+1 > \frac{\mu\xi}{1-\xi}$$

erfüllt ist; und da sich diese letztere Bedingung offenbar immer erfüllen lässt, wobei man nur stets zu beachten hat, dass $\xi < 1$ ist, so wird sich durch hinreichend grosse Annahme von $n+1$ offenbar auch immer die Bedingung

$$(1 + \frac{\mu}{n+1})\xi < 1$$

erfüllen lassen. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so nähern sich offenbar die Grössen

$$\tau_n, \quad \tau_{n+1}, \quad \tau_{n+2}, \quad \tau_{n+3}, \quad \tau_{n+4}, \ldots$$

immer mehr und mehr der Null, und können derselben auch beliebig nahe gebracht werden, wenn man sie nur weit genug von dem Anfange der vorstehenden Reihe entfernt nimmt.

Hieraus ergiebt sich nun mit völliger Deutlichkeit, dass der absolute Werth von

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n)}{1.2.3\ldots n} x^{n+1},$$

wenn n nur erst eine gewisse endliche, völlig bestimmte Grösse überstiegen hat, und dann fernerhin wächst, immer der Null zustrebt und derselben auch beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt.

Nehmen wir jetzt alles Vorhergehende zusammen, so sehen wir, dass von den drei Factoren des Restes

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{1.2.3\ldots n} x^{n+1}.(1+\varrho x)^{\mu-1}.\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x}\right)^n$$

jeder der beiden letzten nie eine gewisse endliche, völlig bestimmte Grösse übersteigen kann, der erste dagegen jederzeit,

enn n nur erst eine gewisse endliche, völlig bestimmte Grösse berstiegen hat, und dann fernerhin wächst, der Null zustrebt und uch der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur gross genug nimmt. Also wird der vorstehende Rest, wenn n ächst, offenbar auch selbst immer endlich einmal anfangen, der Null zuzustreben, und wird auch der Null beliebig nahe gebracht erden können, wenn man nur n gross genug nimmt.

Folglich kann man nach dem Obigen unter der Voraussetzung, lass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit, oder dass

$$-1 < x < +1$$

st, immer

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \mu_4 x^4 + \dots,$$

vo

$$\mu_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)}{1.2.3\dots n}$$

st, setzen, was wir im Folgenden in der Kürze durch

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \mu_4 x^4 + \dots$$
$$(-1 < x < +1)$$

ezeichnen wollen.

§. 4.

Man könnte versuchen, die am Ende des vorhergehenden Paragraphen gefundene wichtige Gleichung auch nach III. §. 3. aus er Gleichung

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \dots + \mu_n x^n + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n)}{1.2.3\dots(n+1)} x^{n+1} (1+\varrho x)^{\mu-n-1}$$

ler

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \dots + \mu_n x^n + \mu_{n+1} x^{n+1} (1+\varrho x)^{\mu-n-1},$$

o ϱ eine gewisse positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse zeichnet, abzuleiten. Dies geht aber ohne erhebliche Schwierigkeiten nur dann an, wenn x positiv und kleiner als die Einheit t. Im Falle eines negativen x, dessen absoluter Werth kleiner s die Einheit ist, würde man aber immer wieder zu der im vorgehenden Paragraphen angewandten Entwickelung seine Zu-

flucht nehmen müssen. Wie man sich bei der in Rede stehenden Ableitung, wenn x positiv und kleiner als die Einheit ist, zu verhalten hat, wollen wir jedoch nun noch zeigen, weil wir Ableitungen dieser Art, auch wenn sie nicht allen Anforderungen zu genügen geeignet sein sollten, immer für besonders lehrreich halten.

Den Rest

$$\mu_{n+1}\, x^{n+1}\,(1+\varrho x)^{\mu-n-1},$$

auf dessen Betrachtung es hier lediglich ankommt, kann man auf folgende Art ausdrücken:

$$\mu_{n+1}\, x^{n+1}.\left(\frac{1}{1+\varrho x}\right)^{n+1}.(1+\varrho x)^{\mu}.$$

Dass $(1+\varrho x)^{\mu}$ nie eine gewisse endliche, völlig bestimmte Grösse übersteigen kann, ist schon im vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden; und da wir x als positiv voraussetzen, auch ϱ positiv ist, so kann

$$\frac{1}{1+\varrho x},\ \text{also auch}\ \left(\frac{1}{1+\varrho x}\right)^{n+1},$$

nie grösser als die Einheit sein.

Ferner ist

$$\mu_{n+k+1}\, x^{n+k+1} = \mu_{n+1}\, x^{n+1}.\frac{\mu-n-1}{n+2}.\frac{\mu-n-2}{n+3}\dots\frac{\mu-n-k}{n+k+1}x^k$$

$$=(-1)^k\mu_{n+1}x^{n+1}.(1-\frac{\mu+1}{n+2})(1-\frac{\mu+1}{n+3})\dots(1-\frac{\mu+1}{n+k+1})x^k.$$

Ist nun $\mu+1$ positiv und $n+2$ grösser als $\mu+1$ geworden, so sind die Grössen

$$1-\frac{\mu+1}{n+2},\ 1-\frac{\mu+1}{n+3},\dots,\ 1-\frac{\mu+1}{n+k+1}$$

sämmtlich positiv und kleiner als die Einheit. Da ferner x kleiner als die Einheit ist, so nähert sich, wenn k wächst, x^k der Null und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur k gross genug nimmt. Alles dieses zusammengenommen zeigt, dass im Falle eines positiven $\mu+1$, wenn nur erst $n+2$ grösser als $\mu+1$ geworden ist, und dann k wächst, die Grösse

$$\mu_{n+k+1}\, x^{n+k+1}$$

der Null zustrebt, und der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur k gross genug werden lässt. Folglich wird in dem Falle eines positiven $\mu+1$ auch, wenn n wächst, die Grösse

$$\mu_{n+1} x^{n+1}$$

mer endlich einmal anfangen, der Null zuzustreben, und wird ch der Null beliebig nahe gebracht werden können, wenn man r n gross genug werden lässt.

Ist dagegen $\mu+1$ negativ, so setze man $\mu+1=-\lambda$, wo n λ positiv ist; dann ist nach dem Obigen

$$_{+k+1} x^{n+k+1} = (-1)^k \mu_{n+1} x^{n+1} . (1+\frac{\lambda}{n+2})(1+\frac{\lambda}{n+3})...(1+\frac{\lambda}{n+k+1})x^k,$$

)

$$(1+\frac{\lambda}{n+2})(1+\frac{\lambda}{n+3})....(1+\frac{\lambda}{n+k+1})x^k$$

mer kleiner als

$$\{(1+\frac{\lambda}{n+2})x\}^k$$

. Nun kann man aber immer n so gross annehmen, dass

$$(1+\frac{\lambda}{n+2})x<1$$

; denn diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Bedingung

$$1+\frac{\lambda}{n+2}<\frac{1}{x},$$

o wenn die Bedingung

$$\frac{\lambda}{n+2}<\frac{1}{x}-1, \quad \frac{\lambda}{n+2}<\frac{1-x}{x},$$

o wenn die Bedingung

$$\frac{n+2}{\lambda}>\frac{x}{1-x},$$

glich wenn die Bedingung

$$n+2>\frac{\lambda x}{1-x}$$

üllt ist; und da diese Bedingung sich offenbar immer erfüllen st, so kann auch die Bedingung

$$(1+\frac{\lambda}{n+2})x<1$$

mer als erfüllt vorausgesetzt werden. Wenn aber diese Bedinng erfüllt ist, und dann k wächst, so nähert sich

$$\{(1+\frac{\lambda}{n+2})x\}^k,$$

also um so mehr auch

$$(1+\frac{\lambda}{n+2})(1+\frac{\lambda}{n+3})\ldots.(1+\frac{\lambda}{n+k+1})x^k$$

der Null, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur k gross genug nimmt. Also wird auch in dem Falle eines negativen $\mu+1$, wenn nur erst $n+2$ eine gewisse bestimmte Grösse überstiegen hat, und dann k wächst, die Grösse

$$\mu_{n+k+1}\, x^{n+k+1}$$

der Null zustreben und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur k gross genug annimmt. Folglich wird auch in dem Falle eines negativen $\mu+1$, wenn n wächst, die Grösse

$$\mu_{n+1}\, x^{n+1}$$

immer endlich einmal anfangen, der Null zuzustreben, und wird auch der Null beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt.

Weil nun $(1+\varrho x)^\mu$ nie eine gewisse endliche völlig bestimmte Grösse, der Bruch

$$\left(\frac{1}{1+\varrho x}\right)^{n+1}$$

nie die Einheit übersteigt, und die Grösse

$$\mu_{n+1}\, x^{n+1},$$

wenn n wächst, immer endlich einmal anfängt, der Null zuzustreben, und der Null beliebig nahe kommen kann, wenn man nur n gross genug werden lässt; so wird auch der Rest

$$\mu_{n+1}\, x^{n+1}\,(1+\varrho x)^{\mu-n-1},$$

wenn n wächst, immer endlich einmal anfangen, der Null zuzustreben, und wird auch der Null beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt, was aber durch das Vorhergehende nur für ein positives x, welches kleiner als die Einheit ist, bewiesen worden ist.

Also ist für jedes positive x, welches kleiner als die Einheit ist, nach dem Obigen:

$$(1+x)^\mu = 1+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\mu_3 x^3+\mu_4 x^4+\ldots.,$$

oder es ist in abkürzender Bezeichnung:

$$(1+x)^\mu = 1+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\mu_3 x^3+\mu_4 x^4+\ldots.$$

$$(0 \overline{\gtrless} x < 1).$$

Dass in weit grösserer Allgemeinheit

$$(1+x)^\mu = 1+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\mu_3 x^3+\mu_4 x^4+\ldots.$$

$$(-1 < x < +1)$$

st, haben wir im vorhergehenden Paragraphen bewiesen; das in iesem Paragraphen angewandte Verfahren, oder ein demselben ähnches, scheint nicht zur Erreichung dieser Allgemeinheit geeignet u sein.

V.

Ueber die Function a^x.

§. 1.

Unter der Voraussetzung, dass

$$-1 < ux < +1$$

t, haben wir nach dem vorhergehenden Kapitel die folgende leichung:

$$(1+ux)^{\frac{1}{u}} = 1+\frac{\frac{1}{u}}{1}ux$$

$$+\frac{\frac{1}{u}\left(\frac{1}{u}-1\right)}{1.2}u^2x^2$$

$$+\frac{\frac{1}{u}\left(\frac{1}{u}-1\right)\left(\frac{1}{u}-2\right)}{1.2.3}u^3x^3$$

$$+\frac{\frac{1}{u}\left(\frac{1}{u}-1\right)\left(\frac{1}{u}-2\right)\left(\frac{1}{u}-3\right)}{1.2.3.4}u^4x^4$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so, wie man hieraus leicht erhält:

$$(1+ux)^{\frac{1}{u}} = 1 + \frac{x}{1}$$
$$+ \left(\frac{1}{1}-u\right)\frac{x^2}{2}$$
$$+ \left(\frac{1}{1}-u\right)\left(\frac{1}{2}-u\right)\frac{x^3}{3}$$
$$+ \left(\frac{1}{1}-u\right)\left(\frac{1}{2}-u\right)\left(\frac{1}{3}-u\right)\frac{x^4}{4}$$
$$+ \left(\frac{1}{1}-u\right)\left(\frac{1}{2}-u\right)\left(\frac{1}{3}-u\right)\left(\frac{1}{4}-u\right)\frac{x^5}{5}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Weil nach der gemachten Voraussetzung

$$-1 < ux < +1,$$

also ux eine Mittelgrösse zwischen -1 und $+1$, oder

$$ux = M(-1, +1)$$

ist, so ist (I. §. 3. 4.)

$$\frac{ux}{u} = M(-\frac{1}{u}, +\frac{1}{u}), \quad x = M(-\frac{1}{u}, +\frac{1}{u})$$

und die obige Gleichung gilt für jedes, der Null noch so nah kommende u, wenn nur x der Bedingung

$$x = M(-\frac{1}{u}, +\frac{1}{u})$$

genügt. Lässt man nun in der in Rede stehenden obigen Gleichung u sich der Null nähern und geht zu den Gränzen über, s erhält man auf der Stelle die folgende wichtige Gleichung:

$$1)\quad \text{Lim}.(1+ux)^{\frac{1}{u}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$(-\infty < x < +\infty)$$

wobei angenommen ist, dass in

$$(1+ux)^{\frac{1}{u}}$$

die Grösse u sich der Null nähere, indem x ungeändert bleibt.

Für $x=1$ erhalten wir aus der Gleichung 1):

$$2)\quad \text{Lim.}(1+u)^{\frac{1}{u}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots,$$

und bezeichnen wir also die Summe der Reihe

$$1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3},\ \frac{1}{1.2.3.4},\ \ldots$$

durch e, setzen also

$$3)\quad e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots,$$

wo annähernd

$$4)\quad e=2{,}7182818284590$$

gefunden wird, so ist

$$5)\quad \text{Lim.}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e,$$

immer unter der Voraussetzung, dass u sich der Null nähert.

Folglich ist auch für jedes x unter der Voraussetzung, dass u sich der Null nähert:

$$\text{Lim.}(1+ux)^{\frac{1}{ux}}=e,$$

also

$$\{\text{Lim.}(1+ux)^{\frac{1}{ux}}\}^x=e^x.$$

Offenbar ist aber

$$\{\text{Lim.}(1+ux)^{\frac{1}{ux}}\}^x=\text{Lim.}\{(1+ux)^{\frac{1}{ux}}\}^x,$$

also

$$\{\text{Lim.}(1+ux)^{\frac{1}{ux}}\}^x=\text{Lim.}(1+ux)^{\frac{1}{u}},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\text{Lim.}(1+ux)^{\frac{1}{u}}=e^x.$$

Nun ist aber nach 1)

$$\text{Lim.}(1+ux)^{\frac{1}{u}}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots,$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

also ist:

$$6)\quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

§. 2.

Die Grösse e betrachtet man als die Basis eines logarithmischen Systems, welches man das natürliche Logarithmen-System nennt, und bezeichnet die Logarithmen dieses Systems bloss durch den Buchstaben l, so dass also, wenn a irgend eine positive Zahl bezeichnet, immer

$$7)\quad a = e^{la},$$

folglich

$$8)\quad a^x = e^{xla}$$

ist. Also ist nach der Gleichung 6), da diese Gleichung für jedes reelle x gilt:

$$9)\quad a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

wobei a als positiv angenommen wird.

§. 3.

Setzt man

$$y = f(x) = a^x,$$

so ist

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

und folglich, indem man sich Δx der Null nähern lässt:

$$\text{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \,\text{Lim}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Weil nun die Gleichung 9) für jedes reelle x gilt, so ist auch für jedes reelle Δx:

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{la}{1}\Delta x + \frac{(la)^2}{1.2}\Delta x^2 + \frac{(la)^3}{1.2.3}\Delta x^3 + \ldots,$$

lso

$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{la}{1}+\frac{(la)^2}{1.2}\Delta x+\frac{(la)^3}{1.2.3}\Delta x^2+\frac{(la)^4}{1\ldots4}\Delta x^3+\ldots,$$

und folglich offenbar, indem Δx sich der Null nähert:

$$\operatorname{Lim}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=la.$$

Daher ist nach dem Vorhergehenden:

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x la,$$

also

$$10)\quad f'(x)=a^x la.$$

Bekanntlich (II. §. 4.) ist allgemein

$$f^{(n)}(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Also ist nach 10)

$$f''(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta.a^x la}{\Delta x}=la\operatorname{Lim}\frac{\Delta.a^x}{\Delta x},$$

und folglich, weil nach 10)

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta.a^x}{\Delta x}=a^x la$$

st:

$$11)\quad f''(x)=a^x(la)^2.$$

Ferner ist hiernach:

$$f'''(x)=\operatorname{Lim}\frac{\Delta f''(x)}{\Delta x}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta.a^x(la)^2}{\Delta x}=(la)^2\operatorname{Lim}\frac{\Delta.a^x}{\Delta x},$$

so, weil nach 10)

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta.a^x}{\Delta x}=a^x la$$

t:

$$12)\quad f'''(x)=a^x(la)^3.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hier schon t völliger Deutlichkeit, und es ist folglich allgemein:

$$13)\quad f^{(n)}(x)=a^x(la)^n.$$

VI.

Ueber die Function $\log(1+x)$.

§. 1.

Unter der Voraussetzung, dass $a+bx$ eine positive, nicht verschwindende Grösse ist, wollen wir

$$y=f(x)=\log(a+bx)$$

setzen, wo die durch log bezeichneten Logarithmen sich auf die Basis B beziehen sollen. Lassen wir nun x in $x+\Delta x$ übergehen, so wird

$$\begin{aligned}\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)&=\log(a+b(x+\Delta x))-\log(a+bx)\\&=\log(a+bx+b\Delta x)-\log(a+bx),\end{aligned}$$

also, wenn man

$$a+bx+b\Delta x=(a+bx)(1+\frac{b\Delta x}{a+bx})$$

setzt, offenbar

$$\Delta y=\log(1+\frac{b\Delta x}{a+bx}),$$

wo immer Δx so nahe bei Null angenommen gedacht wird, dass auch

$$1+\frac{b\Delta x}{a+bx}$$

eben so wie $a+bx$ eine positive Grösse ist. Folglich ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log(1+\frac{b\Delta x}{a+bx}),$$

oder, wenn wir

$$u=\frac{b\Delta x}{a+bx}, \text{ also } \Delta x=\frac{a+bx}{b}u$$

setzen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{b}{a+bx}\cdot\frac{1}{u}\log(1+u),$$

also auch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{b}{a+bx}\log\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\}.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern, so nähert wegen der Gleichung

$$u = \frac{b\Delta x}{a+bx}$$

auch u sich der Null, und es ist also unter der Voraussetzung, dass Δx und u sich der Null nähern:

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b}{a+bx}\operatorname{Lim}\log\{1+u)^{\frac{1}{u}}\}.$$

Wenn aber u sich der Null nähert, so nähert

$$(1+u)^{\frac{1}{u}}$$

sich bekanntlich (V. §. 1. 5)) der Gränze e; also nähert sich unter derselben Voraussetzung offenbar

$$\log\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\}$$

der Gränze $\log e$, oder es ist

$$\operatorname{Lim}\log\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\} = \log e,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b\log e}{a+bx},$$

oder in bekannter Bezeichnung:

$$1) \quad f'(x) = \frac{b\log e}{a+bx},$$

oder

$$1^*) \quad f'(x) = b\log e(a+bx)^{-1}.$$

Nun ist bekanntlich (II. §. 4.) allgemein

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{Lim}\frac{\Delta f^{(n-1)}(x)}{\Delta x},$$

so nach 1*)

$$f''(x) = \operatorname{Lim}\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x} = \operatorname{Lim}\frac{\Delta . b\log e(a+bx)^{-1}}{\Delta x}$$

$$= b\log e\operatorname{Lim}\frac{\Delta . (a+bx)^{-1}}{\Delta x}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta . (a+bx)^{-1}}{\Delta x} = -1 . b(a+bx)^{-2},$$

also

$$2) \quad f''(x) = -1.b^2 \log e (a+bx)^{-2}.$$

Ferner ist nach 2)

$$f'''(x) = \operatorname{Lim} \frac{\Delta f''(x)}{\Delta x} = \operatorname{Lim} \frac{\Delta . -1.b^2 \log e (a+bx)^{-2}}{\Delta x}$$
$$= -1.b^2 \log e \operatorname{Lim} \frac{\Delta .(a+bx)^{-2}}{\Delta x};$$

aber bekanntlich

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta .(a+bx)^{-2}}{\Delta x} = -2.b(a+bx)^{-3},$$

also

$$3) \quad f'''(x) = 1.2.b^3 \log e (a+bx)^{-3}.$$

Eben so ist nach 3)

$$f^{IV}(x) = \operatorname{Lim} \frac{\Delta f'''(x)}{\Delta x} = \operatorname{Lim} \frac{\Delta .1.2.b^3 \log e (a+bx)^{-3}}{\Delta x}$$
$$= 1.2.b^3 \log e \operatorname{Lim} \frac{\Delta .(a+bx)^{-3}}{\Delta x};$$

aber bekanntlich

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta .(a+bx)^{-3}}{\Delta x} = -3.b(a+bx)^{-4},$$

also

$$4) \quad f^{IV}(x) = -1.2.3.b^4 \log e (a+bx)^{-4}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Also ist allgemein

$$5) \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.1.2.3....(n-1)b^n \log e (a+bx)^{-n}$$

oder

$$5^*) \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3....(n-1)b^n \log e}{(a+bx)^n}.$$

§. 2.

Wir wollen jetzt die Function

$$y = f(x) = \log(1+x)$$

betrachten, indem wir annehmen, dass x, insofern es positiv ist, nicht grösser als die Einheit, wenn es aber negativ ist, absolut genommen kleiner als die Einheit sei, was wir durch

$$-1 < x = +1$$

bezeichnen wollen. Dann ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$f'(x) = \frac{\log e}{1+x},$$

und folglich, weil $f(0) = 0$, also

$$f(x) - f(0) = f(x)$$

ist, nach einem bekannten Satze (III. §. 5.) für ein in's Unendliche wachsendes n, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$\log(1+x) = \text{Lim.}\frac{x}{n}\left\{\frac{\log e}{1} + \frac{\log e}{1+\frac{x}{n}} + \frac{\log e}{1+2\frac{x}{n}} + \ldots + \frac{\log e}{1+n\frac{x}{n}}\right\},$$

oder

$$\log(1+x) = \text{Lim.}\frac{x}{n}\left\{\frac{\log e}{1} + \frac{\log e}{1+\frac{x}{n}} + \frac{\log e}{1+2\frac{x}{n}} + \ldots + \frac{\log e}{1+(n-1)\frac{x}{n}}\right\},$$

oder auch

$$\log(1+x) = \log e \text{Lim.}\frac{x}{n}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\frac{x}{n}} + \frac{1}{1+2\frac{x}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)\frac{x}{n}}\right\}.$$

Nach der elementaren Lehre von den geometrischen Reihen ist nun

$$1 + u + u^2 + u^3 + \ldots + u^k = \frac{1-u^{k+1}}{1-u} = \frac{1}{1-u} - \frac{u^{k+1}}{1-u},$$

und da, wenn der absolute Werth von u kleiner als die Einheit ist, der Bruch

$$\frac{u^{k+1}}{1-u},$$

wenn k wächst, der Null zustrebt, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur k gross genug nimmt, so ist unter der gemachten Voraussetzung

$$1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \ldots = \frac{1}{1-u}.$$

Weil nach der Voraussetzung der absolute Werth von x jedenfalls nicht grösser als die Einheit ist, so sind die absoluten Werthe der Grössen

$$\frac{x}{n},\ 2\frac{x}{n},\ 3\frac{x}{n},\ 4\frac{x}{n},\ldots,\ (n-1)\frac{x}{n}$$

sämmtlich kleiner als die Einheit. Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{n}}=1-\frac{x}{n}+\left(\frac{x}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^3+\left(\frac{x}{n}\right)^4-\ldots,$$

$$\frac{1}{1+2\frac{x}{n}}=1-2\frac{x}{n}+2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2-2^3\left(\frac{x}{n}\right)^3+2^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\ldots,$$

$$\frac{1}{1+3\frac{x}{n}}=1-3\frac{x}{n}+3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2-3^3\left(\frac{x}{n}\right)^3+3^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\ldots,$$

u. s. w.

$$\frac{1}{1+(n-1)\frac{x}{n}}=1-(n-1)\frac{x}{n}+(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2-(n-1)^3\left(\frac{x}{n}\right)^3+(n-1)^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\ldots;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\log(1+x)$$

$$=\log e\,\mathrm{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}1\\+1-\frac{x}{n}+\left(\frac{x}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^3+\ldots\\+1-2\frac{x}{n}+2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2-2^3\left(\frac{x}{n}\right)^3+\ldots\\+1-3\frac{x}{n}+3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2-3^3\left(\frac{x}{n}\right)^3+\ldots\\\quad\text{u. s. w.}\\+1-(n-1)\frac{x}{n}+(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2-(n-1)^3\left(\frac{x}{n}\right)^3+\ldots\end{array}\right\};$$

also:

$$\log(1+x)=\log e\,\mathrm{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}n-(1+2+3+\ldots+(n-1))\frac{x}{n}\\+(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)\frac{x^2}{n^2}\\-(1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3)\frac{x^3}{n^3}\\+(1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4)\frac{x^4}{n^4}\\-\ldots\end{array}\right\}$$

ler

$$\log(1+x) = \log e.\text{Lim}\left\{\begin{array}{l} x-\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}x^2 \\ +\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}x^3 \\ -\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3}{n^4}x^4 \\ +\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5}x^5 \\ - \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Wächst nun aber n in's Unendliche, so nähern nach einem bekannten Satze (I. §. 2. Zusatz.) die Grössen

$$\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2},$$

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3},$$

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3}{n^4},$$

$$\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5},$$

u. s. w.

ich respective den Gränzen

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots;$$

also ist nach dem Obigen offenbar

$$6) \quad \log(1+x) = \log e.(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\ldots)$$

$$(-1 < x = +1).$$

Für $x=1$ ist z. B.

$$7) \quad \log 2 = \log e.(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots).$$

Für $x=-1$ hat $\log(1+x)$ keinen endlichen bestimmten Werth mehr, weshalb es nicht verstattet ist, $x=-1$ zu setzen. Man kann auch leicht zeigen, dass die Summe der Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots,$$

welche, negativ genommen, für $x=-1$ aus der Reihe

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\ldots$$

hervorgeht, unendlich gross ist, d. h. eigentlich, dass die Summen

$$1,$$

$$1+\frac{1}{2},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5},$$

u. s. w.

über alle Gränzen, oder, wie man gewöhnlich in der Kürze zu sagen pflegt, in's Unendliche wachsen, wenn man nur eine hinreichende Anzahl der Grössen

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ldots$$

vom Anfange an zu einander addirt. Setzen wir nämlich

$$s_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2^k},$$

so ist

$$s_k=1+\frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$

$$+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\frac{1}{2^{k-1}+3}+\ldots+\frac{1}{2^k},$$

also offenbar:

$$s_k > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{2^k},$$

wenn nur $k > 1$ ist. Folglich ist, wenn nur $k > 1$ ist, offenbar

$$s_k > 1 + \frac{k}{2}$$

oder

$$s_k > \frac{k+2}{2},$$

und da nun $\frac{k+2}{2}$ über alle Gränzen wächst, wenn k in's Unendliche wächst, so wächst um so mehr auch s_k über alle Gränzen, wenn k in's Unendliche wächst, wodurch offenbar unsere obige Behauptung bewiesen ist.

§. 3.

Für jedes x, dessen absoluter Werth kleiner als die Einheit ist, ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\log(1+x) = \log e.(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots),$$

$$\log(1-x) = -\log e.(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots);$$

also durch Subtraction:

$$8)\quad \log\frac{1+x}{1-x} = 2\log e.(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots)$$

$$(-1 < x < +1).$$

Setzt man

$$x = \frac{u-1}{u+1},$$

so ist für jedes Null übersteigende u offenbar x dem absoluten Werthe nach kleiner als die Einheit, und folglich, weil aus vorstehender Gleichung sich

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{u-1}{u+1}}{1-\frac{u-1}{u+1}} = \frac{(u+1)+(u-1)}{(u+1)-(u-1)} = u$$

ergiebt, nach 8):

$$9)\quad \log u = 2\log e.\left\{\frac{u-1}{u+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^7+\ldots\right\}$$

$$(0 < u < \infty).$$

Mittelst dieser Reihe lässt sich der Logarithmus jeder positiven Zahl berechnen, wenn man $\log e$ kennt.

Setzt man aber $u=B$, was verstattet ist, so erhält man aus 9):

$$\log B = 2\log e.\left\{\frac{B-1}{B+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^7+\ldots\right\},$$

also, weil $\log B=1$ ist:

$$10)\quad \log e = \frac{1}{2\left\{\frac{B-1}{B+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^7+\ldots\right\}},$$

mittelst welcher Formel man $\log e$ für jede Basis B berechnen kann.

Setzt man in der Formel 9) für das Zeichen log das Zeichen l, so erhält man, weil $\mathrm{l}e=1$ ist, da e die Basis der durch l bezeichneten Logarithmen darstellt, für $u=B$:

$$11)\quad \mathrm{l}B = 2\left\{\frac{B-1}{B+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^7+\ldots\right\},$$

was, mit 10) verglichen, zu der Gleichung

$$12)\quad \log e.\mathrm{l}B=1$$

führt.

Die Grösse

$$\log e = \frac{1}{\mathrm{l}B}$$

nennt man den Modulus des logarithmischen Systems, dessen Basis B ist, und bezeichnet denselben durch M, so dass also

$$13)\quad M = \log e = \frac{1}{\mathrm{l}B}$$

ist; und zur Berechnung des Logarithmus jeder Null übersteigenden positiven Zahl u für die Basis B hat man nach 10) und 9) die Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\left\{\frac{B-1}{B+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^7+\ldots\right\}}, \\ \log u &= 2M\left\{\frac{u-1}{u+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^7+\ldots\right\}\end{aligned}\right.$$

$$(0 < u < \infty).$$

Man kann diese Formeln noch auf eine etwas andere Art dar-
ellen. Setzt man nämlich in der Gleichung 9) u^2 für u, so er-
ilt man:

$$\log u = \log e . \left\{\frac{u^2-1}{u^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^5+\ldots\right\},$$

$$(0 < u < \infty),$$

o für $u = B$:

$$= \log e . \left\{\frac{B^2-1}{B^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)+\ldots\right\},$$

glich

$$\log e = \frac{1}{\frac{B^2-1}{B^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^7+\ldots}.$$

Daher hat man zur Berechnung des Logarithmus jeder Null
ersteigenden positiven Zahl u für die Basis B auch die folgen-
n Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} M &= \frac{1}{\frac{B^2-1}{B^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^7+\ldots}, \\ \log u &= M\left\{\frac{u^2-1}{u^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^7+\ldots\right\};\end{aligned}\right.$$

$$(0 < u < \infty)$$

er auch die eine Formel:

$$\log u = \frac{\frac{u^2-1}{u^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)^7+\ldots}{\frac{B^2-1}{B^2+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{B^2-1}{B^2+1}\right)^7+\ldots},$$

$$(0 < u < \infty)$$

er nach dem Obigen auch:

$$19)\quad \log u = \frac{\frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^7 + \ldots}{\frac{B-1}{B+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^7 + \ldots}$$

$$(0 < u < \infty).$$

Der Modulus des natürlichen Logarithmen-Systems ist die Einheit, wie aus 13) sogleich folgt.

VII.

Ueber die Functionen $\sin x$ und $\cos x$.

§. 1.

Man setze

$$y = f(x) = \sin x$$

und lasse x in $x + \Delta x$ übergehen, so wird

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x,$$

also nach einer bekannten goniometrischen Zerlegung:

$$\Delta y = 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x),$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\cos(x+\tfrac{1}{2}\Delta x).$$

Lässt man sich nun Δx der Null nähern, so nähert $\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)$ sich der Gränze $\cos x$, und es ist also offenbar

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \operatorname{Lim}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x},$$

oder

$$f'(x) = \cos x \operatorname{Lim}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Um aber

$$\operatorname{Lim}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

zu finden, kann man auf folgende Art schliessen.

Zuvörderst übersieht man auf der Stelle, dass für der Null sehr nahe kommende Δx, auf die es hier nur ankommt, das Verhältniss

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

ungeändert bleibt, Δx mag positiv oder negativ sein, wenn es nur seinen absoluten Werth nicht ändert. Es wird also hinreichen, Δx im Folgenden nur als positiv zu betrachten. Weil nun die gerade Linie zwischen zwei Punkten die kürzeste ist, so ist

$$\text{Chord}\,\Delta x < \Delta x,$$

also

$$2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x < \Delta x,$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta x < \tfrac{1}{2}\Delta x.$$

Bezeichnen wir ferner den dem Bogen $\frac{1}{2}\Delta x$ entsprechenden Kreissector durch $\text{Sect}\frac{1}{2}\Delta x$, so ist nach einem bekannten geometrischen Satze, weil der Halbmesser des Kreises hier immer der Einheit gleich gesetzt wird:

$$\text{Sect}\tfrac{1}{2}\Delta x = \tfrac{1}{2}.1.\tfrac{1}{2}\Delta x = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\Delta x.$$

Bezeichnen wir ferner den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Grundlinie und Höhe $\text{tang}\frac{1}{2}\Delta x$ und der Kreishalbmesser sind, durch D, so ist bekanntlich

$$D = \tfrac{1}{2}.1.\text{tang}\tfrac{1}{2}\Delta x = \tfrac{1}{2}\text{tang}\tfrac{1}{2}\Delta x.$$

Weil nun aber die Tangente immer ausserhalb des Kreises liegt, so ist offenbar

$$D > \text{Sect}\tfrac{1}{2}\Delta x,$$

also nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{2}\text{tang}\tfrac{1}{2}\Delta x > \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\Delta x,$$

folglich

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\Delta x > \tfrac{1}{2}\Delta x.$$

Aus

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta x < \tfrac{1}{2}\Delta x,\quad \text{tang}\tfrac{1}{2}\Delta x > \tfrac{1}{2}\Delta x$$

folgt

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\sin\frac{1}{2}\Delta x} > \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x},\quad \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\text{tang}\frac{1}{2}\Delta x} < \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x};$$

also

$$1 > \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\Delta x < \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

oder

$$1 > \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} > \cos\tfrac{1}{2}\Delta x.$$

Hieraus sieht man, dass

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

zwischen 1 und $\cos\frac{1}{2}\Delta x$ liegt, und da bekanntlich, wenn Δx sich der Null nähert, $\cos\frac{1}{2}\Delta x$ sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit nähert, so muss sich, wenn Δx sich der Null nähert, das zwischen 1 und $\cos\frac{1}{2}\Delta x$ liegende

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

um so mehr immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit als seiner Gränze nähern. Also ist

$$\text{Lim}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$1)\quad f'(x) = \cos x.$$

§. 2.

Setzen wir

$$y = f(x) = \cos x$$

und lassen x in $x + \Delta x$ übergehen, so erhalten wir

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \cos(x+\Delta x) - \cos x,$$

also nach einer bekannten goniometrischen Zerlegung:

$$\Delta y = -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x \sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x),$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x).$$

Nähert sich nun Δx der Null, so nähert $\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)$ sich offenbar der Gränze $\sin x$, und es ist also

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x\,\text{Lim}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

oder

$$f'(x) = -\sin x\,\text{Lim}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber

$$\text{Lim}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1,$$

also

$$2)\quad f'(x) = -\sin x.$$

§. 3.

Setzen wir wieder

$$y = f(x) = \sin x,$$

so ist nach §. 1.

$$f'(x) = \cos x.$$

Nun ist ferner bekanntlich (II. §. 4.)

$$f''(x) = \text{Lim}\,\frac{\Delta f'(x)}{\Delta x} = \text{Lim}\,\frac{\Delta \cos x}{\Delta x},$$

also nach §. 2.

$$f''(x) = -\sin x.$$

Eben so ist (II. §. 4.)

$$f'''(x) = \text{Lim}\,\frac{\Delta f''(x)}{\Delta x} = \text{Lim}\,\frac{\Delta(-\sin x)}{\Delta x} = -\text{Lim}\,\frac{\Delta \sin x}{\Delta x},$$

also nach §. 1.

$$f'''(x) = -\cos x.$$

Ferner ist (II. §. 4.)

$$f^{IV}(x) = \text{Lim}\,\frac{\Delta f'''(x)}{\Delta x} = \text{Lim}\,\frac{\Delta(-\cos x)}{\Delta x} = -\text{Lim}\,\frac{\Delta \cos x}{\Delta x};$$

also nach §. 2.

$$f^{IV}(x) = \sin x.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Für

$$y = f(x) = \sin x$$

ist folglich:

$$f'(x) = \cos x,$$
$$f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{IV}(x) = \sin x,$$
$$f^{V}(x) = \cos x,$$
u. s. w.

folglich allgemein:

$$3)\quad \begin{cases} f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \\ f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x. \end{cases}$$

§. 4.

Setzen wir ferner

$$y = f(x) = \cos x,$$

so ist nach §. 2.

$$f'(x) = -\sin x.$$

Nun ist ferner bekanntlich (II. §. 4. und §. 2.)

$$f''(x) = \text{Lim}\frac{\varDelta f'(x)}{\varDelta x} = \text{Lim}\frac{\varDelta(-\sin x)}{\varDelta x} = -\text{Lim}\frac{\varDelta \sin x}{\varDelta x},$$

also nach §. 1.

$$f''(x) = -\cos x.$$

Auf ähnliche Art ist (II. §. 4.)

$$f'''(x) = \text{Lim}\frac{\varDelta f''(x)}{\varDelta x} = \text{Lim}\frac{\varDelta(-\cos x)}{\varDelta x} = -\text{Lim}\frac{\varDelta \cos x}{\varDelta x},$$

also nach §. 2.

$$f'''(x) = \sin x.$$

Ferner ist (II. §. 4.)

$$f^{IV}(x) = \text{Lim}\frac{\varDelta f'''(x)}{\varDelta x} = \text{Lim}\frac{\varDelta \sin x}{\varDelta x},$$

also nach §. 1.

$$f^{IV}(x) = \cos x.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Für

$$y = f(x) = \cos x$$

folglich:

$$f'(x) = -\sin x,$$
$$f''(x) = -\cos x,$$
$$f'''(x) = \sin x,$$
$$f^{IV}(x) = \cos x,$$
$$f^{V}(x) = -\sin x,$$
u. s. w.

glich allgemein:

$$4) \begin{cases} f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x, \\ f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x. \end{cases}$$

§. 5.

Für

$$y = f(x) = \sin x$$

t nun bekanntlich (III. §. 3.), wenn ϱ eine positive, die Einheit icht übersteigende Grösse bezeichnet:

$$\sin x = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1 \ldots n} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} f^{(n+1)}(\varrho x).$$

Also ist nach §. 3.:

$$\sin x = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{1 \ldots (2n-1)} f^{(2n-1)}(0)$$
$$+ \frac{x^{2n}}{1 \ldots 2n} \cdot (-1)^n \sin(\varrho x)$$

nd

$$\sin x = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{2n}}{1 \ldots 2n} f^{(2n)}(0)$$
$$+ \frac{x^{2n+1}}{1 \ldots (2n+1)} \cdot (-1)^n \cos(\varrho x).$$

Nach einem bekannten Satze (I. §. 1.) nähert sich aber für jedes x, wenn n in's Unendliche wächst, die Grösse

$$\frac{x^n}{1 \ldots n}$$

is zu jedem beliebigen Grade der Null. Also nähern sich, weil ie absoluten Werthe von $\sin(\varrho x)$ und $\cos(\varrho x)$ nie grösser als die inheit sind, offenbar auch

$$\frac{x^{2n}}{1\ldots.2n}\cdot(-1)^n\sin(\varrho x),\quad \frac{x^{2n+1}}{1\ldots.(2n+1)}\cdot(-1)^n\cos(\varrho x)$$

für jedes x bis zu jedem beliebigen Grade der Null, wenn n in Unendliche wächst. Daher ist nach dem Obigen:

$$\sin x = f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots.$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

Nun ist aber nach §. 3.

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{IV}(0)=0,\ f^{V}(0)=1,\ldots$$

also ist

$$5)\quad \sin x = x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1\ldots5}-\frac{x^7}{1\ldots7}+\ldots.$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

§. 6.

Für

$$y=f(x)=\cos x$$

ist bekanntlich (III. §. 3.), wenn ϱ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet:

$$\cos x = f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots.+\frac{x^n}{1\ldots.n}f^{(n)}(0)$$
$$+\frac{x^{n+1}}{1\ldots.(n+1)}f^{(n+1)}(\varrho x).$$

Also ist nach §. 4.

$$\cos x = f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots.+\frac{x^{2n-1}}{1\ldots.(2n-1)}f^{(2n-1)}(0)$$
$$+\frac{x^{2n}}{1\ldots.2n}\cdot(-1)^n\cos(\varrho x)$$

und

$$\cos x = f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots.+\frac{x^{2n}}{1\ldots.2n}f^{(2n)}(0)$$
$$+\frac{x^{2n+1}}{1\ldots.(2n+1)}\cdot(-1)^{n+1}\sin(\varrho x).$$

Auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen nähern sich auch hier für jedes x die Reste

$$\frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}\cdot(-1)^n\cos(\varrho x),\quad \frac{x^{2n+1}}{1\ldots(2n+1)}\cdot(-1)^{n+1}\sin(\varrho x)$$

er Null bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n in's Unendliche ächst. Also ist

$$\cos x = f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots.$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

un ist aber nach §. 4.

$$(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,\ f^{IV}(0)=1,\ f^{V}(0)=0,\ldots;$$

so ist

$$6)\quad \cos x = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1\ldots 4}-\frac{x^6}{1\ldots 6}+\frac{x^8}{1\ldots 8}-\ldots$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

VIII.

Ueber die Functionen Arcsin$x$ und Arctang$x$.

§. 1.

Man setze

$$y = f(x) = \text{Arcsin}\, x.$$

ann ist

$$y+\Delta y = f(x+\Delta x) = \text{Arcsin}(x+\Delta x).$$

olglich ist umgekehrt:

$$x+\Delta x = \sin(y+\Delta y),\quad x=\sin y;$$

lso

$$\Delta x = \sin(y+\Delta y)-\sin y,$$

ıd hieraus:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}$$

ler

$$\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}.$$

Lässt man nun $\varDelta x$ sich der Null nähern, so nähert natürlich auch $\varDelta y$ sich der Null, und aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich folglich für der Null sich nähernde $\varDelta x$ und $\varDelta y$ die Gleichung .

$$\frac{1}{\operatorname{Lim}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}}=\operatorname{Lim}\frac{\sin(y+\varDelta y)-\sin y}{\varDelta y},$$

also, weil bekanntlich (VII. §. 1.)

$$\operatorname{Lim}\frac{\sin(y+\varDelta y)-\sin y}{\varDelta y}=\cos y$$

ist:

$$\frac{1}{\operatorname{Lim}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}}=\cos y,$$

folglich

$$\operatorname{Lim}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{1}{\cos y},$$

oder

$$f'(x)=\frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\{\cos(\operatorname{Arcsin} x)\}^2=1-x^2,$$

also

$$\cos(\operatorname{Arcsin} x)=\pm\sqrt{1-x^2},$$

indem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem Arcsin x sich im ersten oder vierten oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt. Folglich ist

$$f'(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem

$$y=f(x)=\operatorname{Arcsin} x$$

sich im ersten oder vierten oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt.

§. 2.

Man setze

$$y=f(x)=\operatorname{Arctang} x.$$

Dann ist

$$y + \varDelta y = f(x + \varDelta x) = \text{Arctang}\,(x + \varDelta x).$$

Folglich ist umgekehrt:

$$x + \varDelta x = \text{tang}\,(y + \varDelta y), \quad x = \text{tang}\,y;$$

also

$$\varDelta x = \text{tang}\,(y + \varDelta y) - \text{tang}\,y,$$

und hieraus:

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta y} = \frac{\text{tang}\,(y + \varDelta y) - \text{tang}\,y}{\varDelta y},$$

oder

$$\frac{1}{\frac{\varDelta y}{\varDelta x}} = \frac{\text{tang}\,(y + \varDelta y) - \text{tang}\,y}{\varDelta y};$$

folglich, wenn sich $\varDelta x$, also auch $\varDelta y$ der Null nähert:

$$\frac{1}{\text{Lim}\,\frac{\varDelta y}{\varDelta x}} = \text{Lim}\,\frac{\text{tang}\,(y + \varDelta y) - \text{tang}\,y}{\varDelta y}.$$

Nun ist aber

$$\text{tang}\,(y + \varDelta y) - \text{tang}\,y = \frac{\sin \varDelta y}{\cos y \cos (y + \varDelta y)},$$

folglich

$$\frac{\text{tang}\,(y + \varDelta y) - \text{tang}\,y}{\varDelta y} = \frac{\frac{\sin \varDelta y}{\varDelta y}}{\cos y \cos (y + \varDelta y)},$$

woraus sich auf der Stelle

$$\text{Lim}\,\frac{\text{tang}\,(y + \varDelta y) - \text{tang}\,y}{\varDelta y} = \frac{\text{Lim}\,\frac{\sin \varDelta y}{\varDelta y}}{\cos y^2},$$

also, weil bekanntlich

$$\text{Lim}\,\frac{\sin \varDelta y}{\varDelta y} = 1$$

ist,

$$\text{Lim}\,\frac{\text{tang}\,(y + \varDelta y) - \text{tang}\,y}{\varDelta y} = \frac{1}{\cos y^2}$$

ergiebt. Daher ist nach dem Obigen:

$$\frac{1}{\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\cos y^2},$$

folglich

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos y^2,$$

oder

$$f'(x)=\{\cos(\operatorname{Arctang} x)\}^2.$$

Nun ist aber

$$\{\cos(\operatorname{Arctang} x)\}^2=\frac{1}{1+x^2};$$

also

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

§. 3.

Setzen wir wieder

$$y=f(x)=\operatorname{Arcsin} x,$$

so dass also nach §. 1.

$$f'(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem Arcsin x sich im ersten oder vierten oder im zweiten oder dritten Quadranten endigt, und denken uns, dass, indem x sich von 0 bis x stetig verändert, sich $f(x)=\operatorname{Arcsin} x$ von 0 an bis zu dem sich immer im ersten oder vierten Quadranten endigenden absolut genommen kleinsten Werthe von Arcsin x stetig verändere, so muss man für alle entsprechenden Werthe von $f'(x)$ in dem obigen allgemeinen Ausdrucke von $f'(x)$ das obere Zeichen nehmen, und erhält nun, wenn von jetzt an Arcsin x den Bogen, dessen Sinus die Grösse x ist, welcher absolut genommen den kleinsten Werth hat, bezeichnet, nach einem bekannten Satze (III. §. 5.) auf der Stelle die folgende Gleichung:

$$\operatorname{Arcsin} x-\operatorname{Arcsin} 0=\operatorname{Arcsin} x$$

$$=\operatorname{Lim}.\frac{x}{n}\left\{1+\frac{1}{\sqrt{1-1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}}\right\}$$

ei angenommen wird, dass auf der rechten Seite dieser Gleing die positive ganze Zahl n in's Unendliche wachse. Weil aber x als ein Sinus seinem absoluten Werthe nach natürlich grösser als die Einheit sein kann, so sind die absoluten Werthe Grössen

$$1\frac{x}{n},\ 2\frac{x}{n},\ 3\frac{x}{n},\ 4\frac{x}{n},\ \ldots,\ (n-1)\frac{x}{n}$$

mtlich kleiner als die Einheit, und nach einem früher bewieen Satze (IV. §. 3.) ist folglich:

$$\frac{1}{\sqrt{1-1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}}=\left\{1-1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.1^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.1^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}}=\left\{1-2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$1-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.2^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.2^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}}=\left\{1-3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$1-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.3^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.3^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots,$$

u. s. w.

$$\frac{1}{\sqrt{1-(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}}=\left\{1-(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$1-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.(n-1)^4\left(\frac{x}{n}\right)^4$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.(n-1)^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots$$

so ist nach dem Obigen:

$$=\mathrm{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}
+1-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.1^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.1^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots.\\
+1-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.2^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.2^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots.\\
+1-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.3^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.3^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots.\\
\text{u. s. w.}\\
+1-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.(n-1)^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.(n-1)^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots.
\end{array}\right\}$$

oder

$$\mathrm{Arcsin}\,x$$

$$=\mathrm{Lim}.\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}
n-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.(1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n-1)^2)\frac{x^2}{n^2}\\
+\left(-\frac{1}{2}\right)_2.(1^4+2^4+3^4+\ldots.+(n-1)^4)\frac{x^4}{n^4}\\
-\left(-\frac{1}{2}\right)_3.(1^6+2^6+3^6+\ldots.+(n-1)^6)\frac{x^6}{n^6}\\
+\left(-\frac{1}{2}\right)_4.(1^8+2^8+3^8+\ldots.+(n-1)^8)\frac{x^8}{n^8}\\
-\;\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

er

$$\text{Arcsin}\,x$$

$$=\text{Lim}\left\{\begin{array}{l} x-\left(-\frac{1}{2}\right)_1.\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+(n-1)^2}{n^3}x^3 \\ +\left(-\frac{1}{2}\right)_2.\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots+(n-1)^4}{n^5}x^5 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)_3.\frac{1^6+2^6+3^6+\ldots\ldots+(n-1)^6}{n^7}x^7 \\ +\left(-\frac{1}{2}\right)_4.\frac{1^8+2^8+3^8+\ldots\ldots+(n-1)^8}{n^9}x^9 \\ -\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \end{array}\right\};$$

l weil nun (I. §. 2. Zusatz.), wenn n in's Unendliche wächst, Grössen

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+(n-1)^2}{n^3},$$

$$\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots+(n-1)^4}{n^5},$$

$$\frac{1^6+2^6+3^6+\ldots\ldots+(n-1)^6}{n^7},$$

$$\frac{1^8+2^8+3^8+\ldots\ldots+(n-1)^8}{n^9},$$

u. s. w.

ch respective den Gränzen

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ldots\ldots$$

hern, weil ferner ausserdem bekanntlich

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_1=-\frac{1}{2},\ \left(-\frac{1}{2}\right)_2=\frac{1.3}{2.4},\ \left(-\frac{1}{2}\right)_3=-\frac{1.3.5}{2.4.6},\ldots\ldots$$

; so ist

$$\text{Arcsin}\,x=x+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots$$

$$(-1=x=+1),$$

Arcsin x den absolut genommen kleinsten Bogen bezeichnet, ssen Sinus die Grösse x ist.

Für $x=1$ z. B. ist

$$\text{Arcsin}\,1=\frac{1}{2}\pi,$$

also

$$\frac{1}{2}\pi=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots.$$

Für $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist

$$\text{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{4}\pi,$$

also

$$\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\}$$

oder

$$\pi=2\sqrt{2}.\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\}.$$

§. 4.

Für

$$y=f(x)=\text{Arctang}\,x$$

ist nach §. 3.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Denken wir uns nun wieder, dass, indem x sich von 0 bis x stetig verändert, sich $f(x)=\text{Arctang}\,x$ von 0 an bis zu dem absolut genommen kleinsten Werthe von Arctang$\,x$ stetig verändere, so ist, wenn von jetzt an Arctang$\,x$ den Bogen, dessen Tangente die Grösse x ist, welcher absolut genommen den kleinsten Werth hat, bezeichnet, offenbar nach einem bekannten Satze (III. §. 5.):

$$\text{Arctang}\,x-\text{Arctang}\,0=\text{Arctang}\,x$$

$$=\text{Lim}\cdot\frac{x}{n}\{1+\frac{1}{1+1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}\},$$

wobei angenommen wird, dass auf der rechten Seite dieser Gleichung n in's Unendliche wachse. Setzen wir nun aber x seinem absoluten Werthe nach nicht grösser als die Einheit voraus, so sind die absoluten Werthe der Grössen

$$1\frac{x}{n},\quad 2\frac{x}{n},\quad 3\frac{x}{n},\quad 4\frac{x}{n},\ldots,\quad (n-1)\frac{x}{n}$$

immtlich kleiner als die Einheit, und es ist folglich bekanntlich V. §. 3.):

$$\frac{1}{1+1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}=1-1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+1^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-1^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots,$$

$$\frac{1}{1+2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}=1-2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+2^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-2^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots,$$

$$\frac{1}{1+3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}=1-3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+3^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-3^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots,$$

u. s. w.

$$\frac{1}{(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2}=1-(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+(n-1)^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-(n-1)^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots;$$

nach dem Obigen:

$$\text{Arctang}\,x$$

$$\text{Lim.}\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}1\\ +1-1^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+1^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-1^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots\\ +1-2^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+2^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-2^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots\\ +1-3^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+3^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-3^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots\\ \qquad\qquad \text{u. s. w.}\\ +1-(n-1)^2\left(\frac{x}{n}\right)^2+(n-1)^4\left(\frac{x}{n}\right)^4-(n-1)^6\left(\frac{x}{n}\right)^6+\ldots\end{array}\right\}$$

r

$$\text{Arctang}\,x$$

$$=\text{Lim.}\frac{x}{n}\left\{\begin{array}{l}n\\ -(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)\frac{x^2}{n^2}\\ +(1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4)\frac{x^4}{n^4}\\ -(1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6)\frac{x^6}{n^6}\\ +(1^8+2^8+3^8+\ldots+(n-1)^8)\frac{x^8}{n^8}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

oder

$$\text{Arctang}\,x$$

$$=\text{Lim}\left\{\begin{array}{l} x-\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}x^3 \\ +\dfrac{1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4}{n^5}x^5 \\ -\dfrac{1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6}{n^7}x^7 \\ +\dfrac{1^8+2^8+3^8+\ldots+(n-1)^8}{n^9}x^9 \\ -\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Lässt man nun in dieser Gleichung n in's Unendliche w sen und geht zu den Gränzen über, so erhält man auf ganz liche Art wie im vorhergehenden Paragraphen:

$$\text{Arctang}\,x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\ldots.$$

$$(-1=x=+1),$$

wo $\text{Arctang}\,x$ den absolut genommen kleinsten Bogen bezeic dessen Tangente die Grösse x ist.

Für $x=1$, welche Annahme obiger Gleichung zufolge stattet ist, ist

$$\text{Arctang}\,1=\frac{1}{4}\pi,$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{1}{4}\pi=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots.$$

IX.

Eine geometrische Anwendung der im Vorhergehe bewiesenen Sätze.

§. 1.

Um eine geometrische Anwendung der im Vorhergeh bewiesenen Sätze zu zeigen, wollen wir mittelst derselbe

Gleichungen der Loxodrome auf einer Kugel entwickeln, eine Entwickelung, die wir glauben als eine elementare bezeichnen zu können, weil wir der Meinung sind, dass die Methoden, nach welchen wir die in Rede stehenden Sätze im Obigen bewiesen haben, nicht über den Kreis des sogenannten Elementaren hinausgehen. Weil die Theorie der Loxodrome für die praktische Nautik von so ungemein grosser Bedeutung ist, indem der ganze nicht astronomische Theil dieser wichtigen Wissenschaft und Kunst lediglich auf dieser Theorie beruht, so dürften wir uns vielleicht nicht täuschen, wenn wir hoffen, durch die folgenden, nach unserer Meinung elementaren, Entwickelungen höheren nautischen Lehranstalten einen Dienst geleistet zu haben.

Jede auf der Oberfläche der Erde, die wir hier als eine Kugelfläche betrachten, gezogene Linie, welche alle Meridiane unter einem und demselben Winkel schneidet, wird eine **Loxodrome** oder **Rhumblinie** genannt. Jedoch sind dabei noch die folgenden näheren Bestimmungen erforderlich.

Wir wollen uns im Folgenden immer zwei durch ihre Längen und Breiten bestimmte Punkte auf der Erdoberfläche denken, und diese beiden Punkte durch M und M_1, ihre Längen und Breiten beziehungsweise durch L, B und L_1, B_1 bezeichnen. Zugleich wollen wir annehmen, wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung nicht beeinträchtigt wird, dass der Punkt M_1 die grössere Länge habe, und dass also $L_1 - L$ eine positive Grösse sei. Dies vorausgesetzt, wollen wir uns nun die beiden Punkte M und M_1 durch eine Loxodrome so verbunden denken, dass diese Loxodrome und die Längendifferenz $L_1 - L$ auf einer und derselben Seite des als ein Halbkreis betrachteten Meridians des Punktes M liegen, und wollen unter dieser Annahme die Länge der Loxodrome MM_1 durch s bezeichnen. Der constante Winkel aber, unter welchem die Loxodrome gegen alle Meridiane geneigt ist, indem wir diese Winkel nie grösser als 180° und von den betreffenden Meridianen aus stets nach der Seite des Punktes M_1 und nach Norden hin nehmen, soll durch C bezeichnet werden. Nördliche Breiten betrachten wir im Folgenden immer als positiv, südliche Breiten als negativ. Für alle Winkel denken wir uns für's Erste ihre sie messenden Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise gesetzt, und der Halbmesser der Erde soll durch r bezeichnet werden.

§. 2.

Wir wollen uns nun die Breitendifferenz $B_1 - B$, die sowohl

positiv, als auch negativ sein kann, in n gleiche Theile getheilt denken, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet und jeden dieser gleichen Theile durch i bezeichnen, so dass also

$$i=\frac{B_1-B}{n}$$

ist. Durch alle auf diese Weise erhaltenen Theilpunkte, insofern wir uns die in Rede stehende Construction auf der Erdoberfläche wirklich ausgeführt denken, legen wir Parallelkreise des Aequators und durch deren Durchschnittspunkte mit der Loxodrome lauter Meridiane, so erhalten wir längs der Loxodrome eine Reihe von Dreiecken wie fgh (m. s. Taf. I.) auf der Oberfläche der Erde, in denen die Seiten gh nach der Construction sämmtlich einander gleich sind, nämlich alle gleich dem numerischen oder absoluten Werthe der Grösse

$$ri=r\frac{B_1-B}{n}.$$

Je grösser wir nun die ganze Zahl n annehmen, mit desto grösserer Genauigkeit können wir das Dreieck fgh als ein bei h rechtwinkliges ebenes Dreieck betrachten, mit desto grösserer Genauigkeit haben wir also in demselben die Gleichungen:

$$\overline{gh}=\pm\overline{fg}.\cos C,$$
$$\overline{fh}=\ \overline{fg}.\sin C;$$

indem wir in der ersten dieser beiden Gleichungen das obere oder das untere Zeichen nehmen, jenachdem C ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist. Nun erhellet aber leicht, dass, jenachdem C ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, die Grösse

$$i=\frac{B_1-B}{n}$$

positiv oder negativ ist; also ist, indem wir das obere oder das untere Zeichen nehmen, jenachdem der Winkel C spitz oder stumpf ist:

$$\overline{gh}=\pm ri,$$

und folglich nach dem Obigen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\pm ri=\pm\overline{fg}.\cos C,$$

also allgemein:

$$ri=\overline{fg}.\cos C.$$

Bezeichnen wir jetzt die n Theile wie $\overline{fg}$, aus denen nach der onstruction die Loxodrome s besteht, durch

$$s_1, \; s_2, \; s_3, \; s_4, \ldots . \; s_n;$$

› haben wir die folgenden Gleichungen:

$$ri = s_1 \cos C,$$

$$ri = s_2 \cos C,$$

$$ri = s_3 \cos C,$$

u. s. w.

$$ri = s_n \cos C;$$

relche Gleichungen natürlich nur mit desto grösserer Genauigkeit ichtig sind, je grösser die positive ganze Zahl n angenommen wird. Durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich aber:

$$r.ni \doteq (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots . + s_n) \cos C,$$

oder, mit völliger Genauigkeit, eigentlich die Gleichung, welche man erhält, wenn man für die auf den beiden Seiten vorstehender Gleichung befindlichen Grössen die Gränzen setzt, denen dieselben sich nähern, wenn n in's Unendliche wächst. Nun ist aber nach dem Obigen

$$ni = B_1 - B$$

und offenbar

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_n;$$

also mit völliger Genauigkeit:

$$r(B_1 - B) = s \cos C,$$

oder

$$1) \quad B_1 - B = \frac{s}{r} \cos C.$$

Bezeichnen wir die Breite des Punktes f überhaupt durch $B + ki$, wo k eine ganze Zahl bedeutet, so ist, wie sogleich erhellen wird, der Halbmesser des Parallelkreises, welchem $\overline{fh}$ als Bogen angehört, $r \cos(B + ki)$, und folglich, da $\overline{FH}$ der dem Bogen $\overline{fh}$ entsprechende, d. h. denselben Winkel messende Bogen des Aequators ist:

$$\overline{fh} : \overline{FH} = r \cos(B + ki) : r = \cos(B + ki) : 1,$$

woraus sich

$$\overline{FH}=\frac{\overline{fh}}{\cos(B+ki)},$$

also, weil nach dem Obigen

$$\overline{fh}=\overline{fg}.\sin C$$

ist:

$$\overline{FH}=\frac{\overline{fg}.\sin C}{\cos(B+ki)}$$

ergiebt. Nun ist aber nach dem Obigen ferner:

$$ri=\overline{fg}.\cos C,\quad \overline{fg}=\frac{ri}{\cos C};$$

also

$$\overline{FH}=\frac{ri\tan g\, C}{\cos(B+ki)}.$$

Bezeichnen wir jetzt die n Theile wie $\overline{FH}$, aus denen die Längendifferenz $\overline{KK_1}$ besteht, nach der Reihe durch

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4, \ldots\ l_n;$$

so ist:

$$l_1=\frac{ri\,\mathrm{tang}\,C}{\cos B},$$

$$l_2=\frac{ri\,\mathrm{tang}\,C}{\cos(B+i)},$$

$$l_3=\frac{ri\,\mathrm{tang}\,C}{\cos(B+2i)},$$

u. s. w.

$$l_n=\frac{ri\,\mathrm{tang}\,C}{\cos(B+(n-1)i)};$$

also, wenn man auf beiden Seiten addirt, weil offenbar

$$\overline{KK_1}=l_1+l_2+l_3+l_4+\ldots+l_n$$

ist, in aller Strenge:

$$\overline{KK_1}$$

$$=r\,\mathrm{tang}\,C.\mathrm{Lim}.i\left\{\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos(B+i)}+\frac{1}{\cos(B+2i)}+\ldots+\frac{1}{\cos(B+(n-1)i)}\right\}$$

oder

$$\overline{KK_1}$$
$$=r\tang C.\text{Lim}.i\{\sec B+\sec(B+i)+\sec(B+2i)+\ldots+\sec(B+(n-1)i)\},$$

unter der Voraussetzung, dass n in's Unendliche wächst, also i sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähert. Weil aber

$$\overline{KK_1}=r(L_1-L)$$

ist, so ist für ein in's Unendliche wachsendes n, also für ein sich der Null immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade näherndes i:

$$2)\quad L_1-L$$
$$=\tang C.\text{Lim}.i\{\sec B+\sec(B+i)+\sec(B+2i)+\ldots+\sec(B+(n-1)i)\}.$$

§. 3.

Man setze jetzt

$$y=f(x)=\log(1\pm\sin x)$$

und

$$u=\sin x,$$

so dass also

$$y=f(x)=\log(1\pm u)$$

ist. Nun ist, wenn x in $x+\Delta x$ übergeht:

$$\Delta u=\Delta\sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

und

$$f(x+\Delta x)=\log(1\pm(u+\Delta u)),$$

also

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\log(1\pm(u+\Delta u))-\log(1\pm u),$$

folglich

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\log(1\pm(u+\Delta u))-\log(1\pm u)}{\Delta x}$$

oder

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\log(1\pm(u+\Delta u))-\log(1\pm u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\log(1\pm(u+\Delta u))-\log(1\pm u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}$$

oder

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta \log(1\pm u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}.$$

Hieraus ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass sich Δx, also auch Δu, der Null nähert:

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\operatorname{Lim}\frac{\Delta \log(1\pm u)}{\Delta u}\cdot\operatorname{Lim}\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}.$$

Bekanntlich (VII. §. 1.) ist aber:

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}=\cos x,$$

und (VI. §. 1.):

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta \log(1\pm u)}{\Delta u}=\pm\frac{\log e}{1\pm u}=\pm\frac{\log e}{1\pm \sin x}.$$

Also ist

$$\operatorname{Lim}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\pm\frac{\log e\,.\cos x}{1\pm\sin x}$$

oder

$$f'(x)=\pm\frac{\log e\,.\cos x}{1\pm\sin x}.$$

Folglich (III. §. 5.) ist, wenn wir wieder

$$i=\frac{B_1-B}{n}$$

setzen, für ein in's Unendliche wachsendes positives ganzes n:

$$\log(1+\sin B_1)-\log(1+\sin B)$$

$$=\log e\,.\operatorname{Lim}.i\left\{\frac{\cos B}{1+\sin B}+\frac{\cos(B+i)}{1+\sin(B+i)}+\ldots+\frac{\cos(B+(n-1)i)}{1+\sin(B+(n-1)i)}\right\}$$

und

$$\log(1-\sin B_1)-\log(1-\sin B)$$

$$=-\log e\,.\operatorname{Lim}.i\left\{\frac{\cos B}{1-\sin B}+\frac{\cos(B+i)}{1-\sin(B+i)}+\ldots+\frac{\cos(B+(n-1)i)}{1-\sin(B+(n-1)i)}\right\}.$$

Zieht man nun die zweite dieser beiden Gleichungen von der ersten ab, und bemerkt, dass überhaupt

$$\frac{\cos v}{1+\sin v}+\frac{\cos v}{1-\sin v}=\frac{2\cos v}{1-\sin v^2}=\frac{2\cos v}{\cos v^2}=\frac{2}{\cos v}$$

ist, so erhält man:

$$\log\frac{1+\sin B_1}{1-\sin B_1}-\log\frac{1+\sin B}{1-\sin B}$$

$$:2\log e.\mathrm{Lim}.i\left\{\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos(B+i)}+\frac{1}{\cos(B+2i)}+\ldots+\frac{1}{\cos(B+(n-1)i)}\right\},$$

so

$$\mathrm{im}.i\{\sec B+\sec(B+i)+\sec(B+2i)+\ldots.+\sec(B+(n-1)i)\}$$
$$=\frac{1}{2\log e}\left\{\log\frac{1+\sin B_1}{1-\sin B_1}-\log\frac{1+\sin B}{1-\sin B}\right\}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleich. 2), so erhält man:

$$L_1-L=\frac{1}{2\log e}\left\{\log\frac{1+\sin B_1}{1-\sin B_1}-\log\frac{1+\sin B}{1-\sin B}\right\}\tang C,$$

ıd folglich, weil nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\frac{1+\sin B}{1-\sin B}=\tang(45^0+\tfrac{1}{2}B)^2,$$
$$\frac{1+\sin B_1}{1-\sin B_1}=\tang(45^0+\tfrac{1}{2}B_1)^2$$

t, wobei man zu beachten hat, dass, weil $\frac{1}{2}B$ und $\frac{1}{2}B_1$, absolut enommen, nie grösser als 45^0, folglich $45^0+\frac{1}{2}B$ und $45^0+\frac{1}{2}B_1$ ıets positiv und nicht grösser als 90^0 sind, $\tang(45^0+\frac{1}{2}B)$ und ıng$(45^0+\frac{1}{2}B_1)$ immer positiv sind:

$$3)\quad L_1-L=\frac{1}{\log e}\log\left\{\frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}.\tang C.$$

Daher haben wir jetzt nach 1) und 3) die beiden folgenden Gleich.:

$$4)\quad\begin{cases}L_1-L=\dfrac{1}{\log e}\log\left\{\dfrac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}.\tang C,\\[2ex] B_1-B=\dfrac{s}{r}\cos C.\end{cases}$$

§. 4.

Sollen L_1-L und B_1-B in Minuten ausgedrückt sein, so uss man die Grössen auf den rechten Seiten der beiden Gleiıungen 4) mit $\frac{10800}{\pi}$ multipliciren, wodurch man erhält:

$$5)\quad\begin{cases}L_1-L=\dfrac{10800}{\pi\log e}\log\left\{\dfrac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}.\tang C,\\[2ex] B_1-B=\dfrac{10800}{\pi}.\dfrac{s}{r}\cos C;\end{cases}$$

oder:

$$6)\quad \begin{cases} L_1-L=\dfrac{10800}{\pi\log e}\log\left\{\dfrac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}.\tang C, \\ B_1-B=\dfrac{s}{\dfrac{r\pi}{10800}}\cos C. \end{cases}$$

In der Nautik, wo die Loxodrome oder Rhumblinie die wichtigste Anwendung findet, versteht man unter einer Seemeile den 60sten Theil eines Grades des Erdäquators. Also ist nach diesem Begriffe

$$\frac{r\pi}{10800}=\frac{r\pi}{180.60}=\frac{2r\pi}{360.60}$$

die Länge einer Seemeile, und

$$\frac{s}{\dfrac{r\pi}{10800}}$$

ist daher die in Seemeilen ausgedrückte Länge der Loxodrome. Denken wir uns daher die Länge s der Loxodrome selbst immer schon in Seemeilen ausgedrückt, so können wir in der zweiten der beiden Gleichungen 6) für vorstehenden Bruch bloss s schreiben, wodurch die beiden in Rede stehenden Gleichungen die folgende einfachere Gestalt annehmen:

$$7)\quad \begin{cases} L_1-L=\dfrac{10800}{\pi\log e}\log\left\{\dfrac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}.\tang C, \\ B_1-B=s\cos C. \end{cases}$$

Bekanntlich ist

$$e=2{,}7182818$$

also

$$\log e=0{,}4342945$$

und folglich

$$\log(\log e)=0{,}6377843-1.$$

Weil nun bekanntlich

$$\log\pi=0{,}4971499$$

ist, so findet man leicht:

$$\frac{10800}{\pi\log e}=7915{,}70;$$

also:

$$8)\begin{cases} L_1 - L = 7915{,}70.\log\left\{\dfrac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}.\tang C, \\ B_1 - B = s\cos C; \end{cases}$$

oder

$$9)\begin{cases} \tang C = \dfrac{L_1 - L}{7915{,}70.\log\left\{\dfrac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}}, \\ s = (B_1 - B)\sec C. \end{cases}$$

In diesen Formeln sind die Längen und Breiten in Minuten und die Länge der Loxodrome ist in Seemeilen ausgedrückt.

§. 5.

Setzen wir in der bekannten (VI. §. 3.) Formel

$$\log u = 2\log e.\left\{\frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \ldots\right\}$$

die Grösse

$$u = \frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)},$$

so ist, wie man leicht findet:

$$\frac{u-1}{u+1} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)}{\cos\frac{1}{2}(B_1+B)},$$

also

$$\log\left\{\frac{\tang(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tang(45^0+\frac{1}{2}B)}\right\}$$

$$=2\log e.\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)}{\cos\frac{1}{2}(B_1+B)} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)}{\cos\frac{1}{2}(B_1+B)}\right]^3 + \frac{1}{5}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)}{\cos\frac{1}{2}B_1+B)}\right]^5 + \ldots\right\},$$

folglich nach 8):

$$L_1 - L$$

$$=2.7915{,}70.\log e.\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)}{\cos\frac{1}{2}(B_1+B)} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)}{\cos\frac{1}{2}(B_1+B)}\right]^3 + \ldots\right\}\tang C.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber

$$7915{,}70 = \frac{10800}{\pi\log e},$$

also

$$2.7915,70.\log e = \frac{21600}{\pi} = 6875,4$$

und folglich:

$$10)\quad L_1 - L = 6875,4 \left\{ \frac{\sin\frac{1}{2}(B_1 - B)}{\cos\frac{1}{2}(B_1 + B)} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1 - B)}{\cos\frac{1}{2}(B_1 + B)}\right]^3 + .. \right\} \text{ta}$$

Sind die Breiten B und B_1 sehr wenig von einander vers den, so kann man näherungsweise setzen:

$$11)\quad L_1 - L = 6875,4 . \frac{\sin\frac{1}{2}(B_1 - B)}{\cos\frac{1}{2}(B_1 + B)} \tang C$$

oder:

$$12)\quad \tang C = \frac{L_1 - L}{6875,4} . \frac{\cos\frac{1}{2}(B_1 + B)}{\sin\frac{1}{2}(B_1 - B)}.$$

Näherungsweise ist aber auch (VII. §. 5.):

$$\sin\tfrac{1}{2}(B_1 - B) = \frac{\frac{1}{2}(B_1 - B)}{3437,7} = \frac{B_1 - B}{6875,4},$$

also

$$13)\quad \tang C = \frac{L_1 - L}{B_1 - B} \cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B).$$

Für wenig von einander verschiedene Breiten hat man die beiden folgenden Formeln:

$$14)\quad \begin{cases} \tang C = \dfrac{L_1 - L}{B_1 - B} \cos\frac{1}{2}(B_1 + B), \\ s = (B_1 - B) \sec C; \end{cases}$$

von denen jedoch die erste nur eine Näherungsformel ist.

§. 6.

Die Näherungsformel

$$\tang C = \frac{L_1 - L}{B_1 - B} \cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B)$$

ist aus der Formel

$$\tang C = \frac{L_1 - L}{6875,4} . \frac{\cos\frac{1}{2}(B_1 + B)}{\sin\frac{1}{2}(B_1 - B)},$$

die auch nur eine Näherungsformel ist, abgeleitet worden, in man näherungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}(B_1-B)=\frac{B_1-B}{6875{,}4}$$

:tzte; noch ein Glied weiter gehend, würde man nach VII. §. 5. it grösserer Genauigkeit

$$\sin\tfrac{1}{2}(B_1-B)=\frac{B_1-B}{6875{,}4}-\tfrac{1}{6}\left(\frac{B_1-B}{6875{,}4}\right)^3$$

setzt haben, so dass man also

$$\frac{1}{6}\left(\frac{B_1-B}{6875{,}4}\right)^3$$

nachlässigt hat. Multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruchs der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der Gleichung

$$\operatorname{tang} C=\frac{L_1-L}{6875{,}4}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(B_1+B)}{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)}$$

sin $\tfrac{1}{2}(B_1-B)$, so erhält man:

$$\operatorname{tang} C=\frac{L_1-L}{6875{,}4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)\cos\frac{1}{2}(B_1+B)}{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)^2},$$

l weil nun nach dem Obigen bis auf die zwei ersten Glieder

$$\sin\tfrac{1}{2}(B_1-B)^2=\left(\frac{B_1-B}{6875{,}4}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{B_1-B}{6875{,}4}\right)^4$$

so vernachlässigt man, wenn man

$$\sin\tfrac{1}{2}(B_1-B)^2=\left(\frac{B_1-B}{6875{,}4}\right)^2$$

st, bloss

$$\frac{1}{3}\left(\frac{B_1-B}{6875{,}4}\right)^4,$$

:h dem Obigen also im Allgemeinen allerdings etwas weniger, wenn man

$$\sin\tfrac{1}{2}(B_1-B)=\frac{B_1-B}{6875{,}4}$$

zt. Daher ist in der That die Formel

$$\operatorname{tang} C=\frac{L_1-L}{6875{,}4}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(B_1-B)\cos\frac{1}{2}(B_1+B)}{\left(\frac{B_1-B}{6875{,}4}\right)^2},$$

nlich die Formel

$$15)\quad \text{tang}\, C = 6875{,}4 . \frac{(L_1 - L)\sin\frac{1}{2}(B_1 - B)\cos\frac{1}{2}(B_1 + B)}{(B_1 - B)^2},$$

etwas genauer als die Formel

$$\text{tang}\, C = \frac{L_1 - L}{B_1 - B}\cos\tfrac{1}{2}(B_1 + B),$$

aber freilich auch bei Weitem nicht so einfach wie diese letztere. Ich erwähne dies hier nur, weil man die Formel 15) in verschiedenen nautischen Lehrbüchern findet. Ich würde, wenn man grössere Genauigkeit als die, welche die vorstehende sehr einfache Formel gewährt, zu erreichen beabsichtigt, immer der von mir oben entwickelten Formel

$$\text{tang}\, C = \frac{L_1 - L}{6875{,}4} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(B_1 + B)}{\sin\frac{1}{2}(B_1 - B)}$$

den Vorzug einzuräumen geneigt sein.

II.

Anwendungen des Horner'schen und Budan'schen Substitutions-Verfahrens auf die Theorie des Grössten und Kleinsten.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Assist. und Privatdoc. der Mathematik am k. k. polytechn. Institute zu Wien.

Wenn in einem Polynome

$$(1)\qquad \varphi(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

die Substitution

$$(2)\qquad x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \ldots$$

llzogen werden soll, so kann diess, nach einem von **Horner** d **Budan** herrührenden bekannten Verfahren, höchst einfach werkstelligt werden. Man bilde sich nämlich zuerst eine Gleiung, deren Wurzeln um a_0 kleiner sind, als die Wurzeln der eichung $\varphi(x)=0$; sei diese

$$(3)\quad \varphi(x+a_0)=x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots+B_{n-1}x+B_n=0,$$

ist B_n das Resultat der Substitution von $x=a_0$ in (1). Herch bilde man sich eine Gleichung, deren Wurzeln um $\frac{a_1}{10}$ kleiner id, als die Wurzeln der Gleichung (3); sei diese

$$)\quad \varphi(x+a_0+\frac{a_1}{10})=x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n=0,$$

ist C_n das Resultat der Substitution von $x=a_0+\frac{a_1}{10}$ in (1). lsdann bilde man sich eine Gleichung, deren Wurzeln um $\frac{a_2}{100}$ einer sind, als die Wurzeln der Gleichung (4); sei diese

$$)\quad \varphi(x+a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100})=x^n+D_1x^{n-1}+D_2x^{n-2}+\ldots+D_{n-1}x+D_n=0,$$

ist D_n das Resultat der Substitution von $x=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}$ in) u. s. f. u. s. f. — Es ist ferner bekannt, dass B_{n-1}, C_{n-1}, $_{n-1}$,.... die Substitutionsresultate sind von $x=a_0$, $x=a_0+\frac{a_1}{10}$, $=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}$,.... in $\varphi'(x)$; dann B_{n-2}, C_{n-2}, D_{n-2}.... die ubstitutionsresultate von denselben Werthen in $\frac{\varphi''(x)}{2!}$ u. s. f. Es nn nun sein, dass die Zahl

$$x=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_3}{1000}+\frac{a_4}{10000}+\ldots$$

cht gegeben, sondern dass sie nach gewissen Bedingungen zu stimmen sei, etwa so, dass die letzten Glieder der Gleichungen), (4), (5),...., nämlich B_n, C_n, D_n,...., sich fort und fort der ull nähern; oder dass die vorletzten Glieder oder die vorvorletzn Glieder derselben Gleichungen sich fort und fort der Null hern, u. s. f.

Was die Erfüllung der ersten Bedingung anbelangt, nämlich e Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.... so zu bestimmen, dass die letz-

ten Glieder der Gleichungen (3), (4), (5),...., nämlich B_n, C_n, D_n...., sich fort und fort der Null nähern, so kann sie als eine vollständig erledigte angesehen werden; denn es wird hier eigentlich jener Werth von x verlangt, der die Gleichung $\varphi(x)=0$ identificirt. Nach der von mir vervollkommneten Horner'schen Methode findet man sämmtliche Wurzeln dieser Gleichung, die reellen sowohl als die imaginären, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit.

Werden die Zahlen $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ so verlangt, auf dass die vorletzten Glieder B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1}.... sich fort und fort der Null nähern, so ist diese Aufgabe eben so einfach zu lösen, als die frühere; der gefundene Werth von x ist dann eine Wurzel der Gleichung $\varphi'(x)=0$, und die Grenze, der sich die letzten Glieder B_n, C_n, D_n.... fort und fort nähern, ist das Substitutionsresultat des gefundenen x in $\varphi(x)$.

Man gelangt zu solchen Fragen bei der Bestimmung der Coordinaten eines höchsten oder tiefsten Punktes einer Curve, deren Gleichung $y=\varphi(x)$ ist, und um sie zu lösen, wird man daher folgenden Weg betreten können:

Man bestimme sich vorerst die zwei ersten Ziffern, etwa $a_0+\frac{a_1}{10}$, einer Wurzel der Gleichung $\varphi'(x)=0$; bilde sich dann eine Gleichung

$$x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+....+C_{n-1}x+C_n=0,$$

deren Wurzeln um $a_0+\frac{a_1}{10}$ kleiner sind, als die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$, dividire in der so herauskommenden Gleichung das vorletzte Glied durch das vorvorletzte, der halbe mit geänderten Zeichen genommene Quotient gibt, wie aus einer klaren Einsicht des Horner'schen und Budan'schen Verfahrens von selbst hervorgeht, nahe $\frac{a_2}{100}$; nun vermindere man um diess die Wurzeln der letztgebildeten Gleichung, und erhält man

$$x^n+D_1x^{n-1}+D_2x^{n-2}+....+D_{n-1}x+D_n=0,$$

so dividire man wieder das vorletzte Glied dieser Gleichung durch das vorvorletzte; der halbe mit geänderten Zeichen genommene Quotient giebt nahe $\frac{a_3}{1000}$; und fährt man so fort, so erhält man

$$x=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_3}{1000}+\frac{a_4}{10000}+....$$

als die gesuchte Abscisse und das Substitutionsresultat dieses Werthes als die gesuchte Ordinate eines höchsten oder tiefsten Punktes.

Wir wollen durch ein passendes Beispiel das hier gelehrte Verfahren beleuchten. Man suche die Coordinaten der höchsten oder tiefsten Punkte der Curve, deren Gleichung folgende ist:

$$y = x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 28x + 4.$$

Um diese Aufgabe zu lösen hat man offenbar zuerst die Gleichung

$$4x^3 - 72x^2 + 8x - 28 = 0$$

aufzulösen, dann das Substitutionsresultat des hieraus folgenden Werthes von x zu bestimmen. Letztere Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$(6) \qquad x^3 - 18x^2 + 2x - 7 = 0,$$

und hat eine Wurzel zwischen 17 und 18. Vermindert man daher die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 28x + 4 = 0$$

um 17, so hat man nach Horner's und Budan's Verfahren:

1	−24	4	−28	4
1	− 7	−115	−1983	−33707*
1	10	55	−1048*	
1	27	514*		
1	44*			

−33707 ist das Substitutionsresultat von $x = 17$ in y. Um nun die nächste Ziffer der Wurzel der Gleichung (6) zu erhalten, dividire man 1048 durch 514, der halbe Quotient gibt nahe die Zehntel; hier ist der halbe Quotient grösser als 1, da aber die Curve

$$y = x^4 + 44x^3 + 514x^2 - 1048x - 33707$$

einen tiefsten Punkt hat, dessen Abscisse zwischen 0 und 1 liegt, so vermindere man die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 44x^3 + 514x^2 - 1048x - 33707 = 0$$

um 0·9, und hat so:

1	44	514	−1048	−33707
1	44·9	554·41	−549·031	−34201·1279*
1	45·8	595·63	− 12·964*	
1	46·7	637·66*		
1	47·6*			

Für $x = 17{\cdot}9$ ist daher $y = -34201{\cdot}1279$ und $\frac{dy}{dx} = y' = -12{\cdot}96$

Die nächste Ziffer ergibt sich aus dem Bruche

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{12{\cdot}964}{637{\cdot}66} = 0{\cdot}01\ldots$$

und ist somit $0{\cdot}01$; vermindert man um diess die Wurzeln d Gleichung

$$x^4 + 47{\cdot}6x^3 + 637{\cdot}66x^2 - 12{\cdot}964x - 34201{\cdot}1279 = 0,$$

so hat man:

1	47·6	637·66	—12·964	—34201·1279
1	47·61	638·1361	— 6·582639	—34201·19372639*
1	47·62	638·6123	— 0·196516*	
1	47·63	639·0886*		
1	47·64*			

Für $x = 17{\cdot}91$ ist daher $y = -34201{\cdot}19372639$ und $y' = -0{\cdot}1965$

Die nächste Ziffer ergibt sich aus

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}196516}{639{\cdot}0886} = 0{\cdot}0001\ldots$$

und ist 0·0001.

Führt man jetzt die Rechnung abgekürzt weiter, so hat ma

1	47·64	639·0886	—0·196516	—34201·19372639
1	47·64	639·0934	—0·132607	—34201·19373965*
1	47·6	639·098*	—0·06869* (1)	

Die nächste Ziffer ist

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}06869}{639{\cdot}098} = 0{\cdot}00005\ldots$$

1	47	639·09	—0·06869	—34201·19373965
			—0·03674	—34201·19374149*
			—0·0047*	

Die nächste Ziffer ist

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{0{\cdot}0047}{639{\cdot}09} = 0{\cdot}000003\ldots$$

---

(1) Die Ziffern, welche im Manuscripte dieses Aufsatzes durchstric geschrieben waren, sind in Ermangelung solcher Ziffern in der Druck mit kleiner Schrift gedruckt worden. G.

Man hat somit für die Coordinaten des tiefsten Punktes

$$x = 17{\cdot}910153 \ldots \quad y = -34201{\cdot}19374 \ldots$$

ich sage des tiefsten Punktes, weil der zweite Differentialquotient gleich der Hälfte ist von dem vorvorletzten Gliede, und dieses stets positiv erschien.

Auf ganz ähnliche Weise lässt sich auch bestimmen jener Werth von x, welcher $\varphi''(x)=0$ macht, und das Resultat der Substitution dieses Werthes in $\varphi(x)$; wir wollen auch noch hierüber ein Beispiel geben.

Man suche die Coordinaten der Wendepunkte der Curve

$$y = x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 28x + 4.$$

Für einen Wendepunkt muss bekanntlich $y''=0$ sein, d. h. es muss sein:

$$3x^2 - 36x + 2 = 0,$$

und diese Gleichung hat eine Wurzel zwischen 11 und 12. Vermindert man die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ um 11, so hat man:

1	−24	4	−28	4
1	−13	−139	−1557	−17123*
1	− 2	−161	−3328*	
1	9	− 62*		
1	20*			

Die nächste Ziffer ist nahe gleich dem dritten Theile des Quotienten vom vorletzten Gliede dividirt durch das vorvorletzte mit geänderten Zeichen, mithin in diesem Falle $\frac{1}{3}\cdot\frac{62}{20}$; da aber die nächste Ziffer nur Zehntel sein kann, so vermindere man die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 20x^3 - 62x^2 - 3328x - 17123 = 0$$

um 0·9, und hat so:

1	20	−62	−3328	−17123
1	20·9	−43·19	−3366·871	−20153·1839*
1	21·8	−23·57	−3388·084*	
1	22·7	− 3·14*		
1	23·6*			

Die nächste Ziffer ergibt sich aus $\frac{1}{3}\cdot\frac{3{\cdot}14}{23{\cdot}6} = 0{\cdot}04\ldots$ und ist 0·04; vermindert man nun um 0·04 die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 23{\cdot}6x^3 - 3{\cdot}14x^2 - 3388{\cdot}084x - 20153{\cdot}1839 = 0,$$

so hat man:

1	23·6	—3·14	—3388·084	—20153·1839
1	23·64	—2·1944	—3388·171776	—20288·71077104*
1	23·68	—1·2472	—3388·221664*	
1	23·72	—0·2984*		
1	23·76*			

Ferner ist für die nächste Ziffer $\frac{1}{3}\cdot\frac{0\cdot2984}{23\cdot76}=0\cdot004....$; vermindert man daher um 0·004 die Wurzeln der Gleichung

$$x^4+23\cdot76x^3-0\cdot2984x^2-3388\cdot221664x-20288\cdot71077104=0,$$

so hat man, wenn man die Rechnung abgekürzt weiter führt:

1	23·76	—0·2984	—3388·221664	—20288·71077104
1	23·7$_{64}$	—0·2034	—3388·222478	—20302·26366095*
1	23·7$_{68}$	—0·1084	—3388·222912*	
1	23·7$_{72}$	—0·0133*		
1	23·776*			

Für die nächstkommende Ziffer hat man $\frac{1}{3}\cdot\frac{0\cdot0133}{23\cdot776}=0\cdot0001....$; es sind folglich nahezu

$$x=11\cdot9441.... \quad y=-20302....$$

die Coordinaten eines Wendepunktes der vorgelegten Curve. — Dass die ganze Operation eben so vor sich geht, wenn x imaginär ist, versteht sich von selbst.

Ich will nun noch zeigen, wie man auf eben so einfache Weise die höchsten und tiefsten Punkte einer Fläche oder überhaupt die Punkte, an die sich horizontale Berührungsebenen führen lassen, finden kann, wenn nur die Coordinaten x und y eines solchen Punktes nahezu bekannt sind.

Wären $x=\alpha$, $y=\beta$ nahezu die Coordinaten eines solchen Punktes der Fläche $z=\varphi(x, y)$ (unter $\varphi(x, y)$ eine ganze algebraische Function von x und y verstanden), so bilde man eine Gleichung, deren Wurzeln x und y um α und β kleiner sind, als die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x, y)=0$; erhält man auf diese Weise

$$z=\varphi(x+\alpha, y+\beta)=\psi(x, y)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

wo $\psi(x, y)$ eine solche Function von x und y vorstellt, deren einzelne Glieder von höherem als dem zweiten Grade sind, und wo A, B, C, D, E, F constante Zahlen bedeuten, so muss $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ nahezu gleich Null sein. Nun ist

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d\psi(x,y)}{dx}+2Ax+By+D,$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{d\psi(x,y)}{dy}+Bx+2Cy+E.$$

eiden Glieder $\frac{d\psi(x,y)}{dx}$ und $\frac{d\psi(x,y)}{dy}$ sind kleine Grössen, r als erster Ordnung, lassen sich also für einen Augenblick hlässigen; man hat daher zur Bestimmung der zu α und β usetzenden Werthe von x und y die beiden Gleichungen Grades:

$$2Ax+By+D=0,$$

$$Bx+2Cy+E=0,$$

s

$$x=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC},\quad y=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}$$

— Um daher die höchsten oder tiefsten Punkte einer Fläche $x,y)$ zu bestimmen, verfahre man auf folgende Weise: Man die zwei ersten Ziffern der Wurzeln der Gleichungen $\frac{dz}{dx}=0$, 0; wären diese

$$x=a_0+\frac{a_1}{10},\quad y=b_0+\frac{b_1}{10},$$

de man sich dann eine Gleichung, deren Unbekannte x und diese Werthe kleiner sind, als die Unbekannten der Gleichung $)=0$, indem man nämlich daselbst statt x und y respective $_0+\frac{a_1}{10}$, $y+b_0+\frac{b_1}{10}$ setzt; wäre diese Gleichung

$$\psi(x,y)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

F das Resultat der Substitution der genannten Werthe von l y in z. Vernachlässigt man jetzt für einen Augenblick $)$, und wählt x und y so, dass

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$$

aximum oder Minimum wird; mit andern Worten, wählt man l y so, wie die Gleichungen (7) sie geben, so erhält man für ie $\frac{a_2}{100}$, für y nahe $\frac{b_2}{100}$; um diese Werthe vermindere man ie Unbekannten x und y der Gleichung (8), und erhält man so

$$\psi_1(x,y)+A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$

so sind wieder die Werthe x und y, welche

$$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1$$

zu einem Maximum oder Minimum machen, nahezu $\frac{a_3}{1000}$ und $\frac{b_3}{1000}$, und F_1 das Substitutionsresultat von

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \quad y = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100}$$

in z; und fährt man auf diese Weise fort, so erhält man successive die einzelnen Ziffern der Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0$$

und das Substitutionsresultat dieser Wurzeln in z.

Auch hier diene ein Beispiel zum bessern Verständniss. — Man suche jene Punkte der Fläche

$$z = x^3 - 5x^2 + 4xy - y^3 + 5x - 7y + 12,$$

an die horizontale Berührungsebenen gezogen werden können.

Für solche Punkte muss sein:

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 - 10x + 4y + 5 = 0,$$

$$\frac{dz}{dy} = 4x - 3y^2 - 7 = 0.$$

Diesen beiden Gleichungen genügen

$$x = 2{\cdot}1\ldots., \quad y = 0{\cdot}6\ldots.$$

Bildet man nun eine Gleichung, deren Unbekannte x und y um 2·1 und 0·6 kleiner sind, als die Unbekannten x und y der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + x(4y + 5) - y^3 - 7y + 12 = 0,$$

so hat man, wenn man sich des Verfahrens bedient, das ich in meinem Werke: „Allgemeine Auflösung der Zahlen-Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten" bei der Auflösung eines Systems zweier Gleichungen mit zweien Unbekannten geliefert, Folgendes:

1	-5	$4y + 5$	$-y^3 + 0{\cdot}y^2 - 7y + 12$
	$-2{\cdot}9$	$4y - 1{\cdot}09$	$-y^3 + 0{\cdot}y^2 + 1{\cdot}4y + 9{\cdot}711^{*}$
	$-0{\cdot}8$	$4y - 2{\cdot}77^{*}$	$-y^3 - 0{\cdot}6y^2 + 1{\cdot}04y + 10{\cdot}335^{**}$
	$1{\cdot}3^{*}$	$4y - 0{\cdot}37^{**}$	$-y^3 - 1{\cdot}2y^2 + 0{\cdot}32y^{**}$
			$-y^3 - 1{\cdot}8y^{2**}$

und die transformirte Gleichung ist:

$$(9)\quad z=x^3+1\cdot3x^2+x(4y-0\cdot37)-y^3-1\cdot8y^2+0\cdot32y+10\cdot335.$$

Hier hat man nun:

$A=$	$1\cdot3$	$CD=$	$0\cdot666$
$B=$	4	$BE=$	$1\cdot28$
$C=$	$-1\cdot8$	$AE=$	$0\cdot416$
$D=$	$-0\cdot37$	$BD=$	$-1\cdot48$
$E=$	$0\cdot32$	$B^2=$	16
		$AC=$	-2.34

$2CD=$	$1\cdot332$	$2AE=$	$0\cdot416$	$B^2=$	16
$BE=$	$1\cdot28$	$BD=$	$-1\cdot48$	$4AC=$	$-9\cdot36$
$2CD-BE=$	$0\cdot052$	$2AE-BD=$	$1\cdot896$	$B^2-4AC=$	$25\cdot36$

$$x=\frac{0\cdot052}{25\cdot36}=0\cdot00....$$

$$y=\frac{1\cdot896}{25\cdot36}=0\cdot07....$$

Setzt man nun in (9) statt y, $y+0\cdot07$, so hat man:

1	1·3	4	—0·37	—1	—1·8	0·32	10·335
		4	—0·09**	—1	—1·87	0·1891	10·348237**
				—1	—1·94	0·0533**	
				—1	—2·01**		

$$(10)\quad z=x^3+1\cdot3x^2+x(4y-0\cdot09)-y^3-2\cdot01y^2+0\cdot0533y+10\cdot348237.$$

Nun hat man:

$A=$	$1\cdot3$	$CD=$	$0\cdot1809$
$B=$	4	$BE=$	$0\cdot2132$
$C=$	$-2\cdot01$	$AE=$	$0\cdot06929$
$D=$	$-0\cdot09$	$BD=$	$-0\cdot36$
$E=$	$0\cdot0533$	$B^2=$	16
		$AC=$	$-2\cdot613$

$2CD=$	$0\cdot3618$	$2AE=$	$0\cdot13858$	$B^2=$	16
$BE=$	$0\cdot2132$	$BD=$	$-0\cdot36$	$4AC=$	$-10\cdot452$
$2CD-BE=$	$0\cdot1486$	$2AE-BD=$	$0\cdot49858$	$B^2-4AC=$	$26\cdot452$

$$x=\frac{0\cdot1486}{26\cdot452}=0\cdot005....,\quad y=\frac{0\cdot49858}{26\cdot452}=0\cdot01....$$

Da hier für y 0·01 herauskömmt, so muss man noch das y der Gleichung (10) um 0·01 vermindern, man erhält dann:

$$
\begin{array}{c|c|cc|cccc}
1 & 1{\cdot}3 & 4 & -0{\cdot}09 & -1 & -2{\cdot}01 & 0{\cdot}0533 & 10{\cdot}348237 \\
 & & 4 & -0{\cdot}05^{**} & -1 & -2{\cdot}02 & 0{\cdot}0331 & 10{\cdot}348568^{**} \\
 & & & & -1 & -2{\cdot}03 & 0{\cdot}0128^{**} & \\
 & & & & -1 & -2{\cdot}04^{**} & &
\end{array}
$$

$$z = x^3 + 1{\cdot}3x^2 + x(4y - 0{\cdot}05) - y^3 - 2{\cdot}04y^2 + 0{\cdot}0128y + 10{\cdot}348568$$

$$
\begin{array}{ll}
A = 1{\cdot}3 & CD = 0{\cdot}102 \\
B = 4 & BE = 0{\cdot}0512 \\
C = -2{\cdot}04 & AE = 0{\cdot}01664 \\
D = -0{\cdot}05 & BD = -0{\cdot}2 \\
E = 0{\cdot}0128 & B^2 = 16 \\
 & AC = -2{\cdot}652
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
2CD = 0{\cdot}204 & 2AE = 0{\cdot}03328 & B^2 = 16 \\
BE = 0{\cdot}0512 & BD = -0{\cdot}2 & 4AC = -10{\cdot}60 \\
\hline
2CD - BE = 0{\cdot}1528 & 2AE - BD = 0{\cdot}23328 & B^2 - 4AC = 26{\cdot}60
\end{array}
$$

$$x = \frac{0{\cdot}1528}{26{\cdot}608} = 0{\cdot}005\ldots, \quad y = \frac{0{\cdot}23328}{26{\cdot}608} = 0{\cdot}008\ldots$$

Vermindert man daher das x um 0·005, das y um 0·008, so hat man:

$$
\begin{array}{c|c|cc|cccc}
1 & 1{\cdot}3 & 4 & -0{\cdot}05 & -1 & -2{\cdot}04 & 0{\cdot}0128 & 10{\cdot}348568 \\
1 & 1{\cdot}305 & 4 & -0{\cdot}043475 & -1 & -2{\cdot}04 & 0{\cdot}0328 & 10{\cdot}348350625^{*} \\
1 & 1{\cdot}310 & 4 & -0{\cdot}036925^{*} & -1 & -2{\cdot}048 & 0{\cdot}016416 & 10{\cdot}348481953^{**} \\
1 & 1{\cdot}315^{*} & 4 & -0{\cdot}004925^{**} & -1 & -2{\cdot}056 & 0{\cdot}000032^{**} & \\
 & & & & -1 & -2{\cdot}064^{**} & &
\end{array}
$$

Die neue Gleichung ist:

$$z = x^3 + 1{\cdot}315x^2 + x(4y - 0{\cdot}004925) - y^3 - 2{\cdot}064y^2 - 0{\cdot}000032y + 10{\cdot}348481953$$

und hier hat man:

$$
\begin{array}{ll}
A = 1{\cdot}315 & CD = 0{\cdot}0101652 \\
B = 4 & BE = -0{\cdot}000128 \\
C = -2{\cdot}064 & AE = -0{\cdot}00004208 \\
D = -0{\cdot}004925 & BD = -0{\cdot}0197 \\
E = -0{\cdot}000032 & B^2 = 16 \\
 & AC = -2{\cdot}71416
\end{array}
$$

$2CD = 0{\cdot}0203304$ $\quad 2AE = -0{\cdot}00008416$
$BE = -0{\cdot}000128$ $\quad BD = -0{\cdot}0197$
$2CD - BE = 0{\cdot}0204584$ $\quad 2AE - BD = 0{\cdot}01961584$

$B^2 = 16$
$4AC = -10{\cdot}85664$
$B^2 - 4AC = 26{\cdot}85664$

$$x = \frac{0{\cdot}0204584}{26{\cdot}85664} = 0{\cdot}0007....$$

$$y = \frac{0{\cdot}01961584}{26.85664} = 0{\cdot}0007...$$

. s. f. Es sind also

$$x = 2{\cdot}1057....$$
$$y = 0{\cdot}6887....$$
$$z = 10{\cdot}348....$$

ie Coordinaten eines solchen Punktes der vorgelegten Fläche, an len sich eine horizontale Berührungsebene führen lässt. Wäre liefür $s^2 - rt < 0$ und $r \gtrless 0$, so wäre dieser Punkt ein höchster der tiefster der Fläche.

III.

Zwei neue Beweise des Theorems von Legendre über sphärische Dreiecke, deren Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind.

Von
dem Herausgeber.

Der Beweis, welchen Legendre selbst für sein berühmtes, amentlich für die Geodäsie so ungemein wichtiges Theorem über phärische Dreiecke, deren Seiten gegen den Halbmesser der

Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind, gegeben hat, ist in die meisten Schriften über höhere Geodäsie übergegangen, dürfte aber rücksichtlich der Deutlichkeit und Kürze wohl Einiges zu wünschen übrig lassen. Einen anderen, jedenfalls sehr sinnreichen und in mehreren Beziehungen sich empfehlenden Beweis dieses wichtigen Satzes, den ich deshalb den Lesern des Archivs in Thl. I. Nr. LVI. S. 436. mitzutheilen nicht unterlassen habe, hat Gauss im 22sten Bande des Crelle'schen Journals gegeben. So sinnreich dieser Beweis aber auch ist, hat er mir doch immer nicht sehr direct geschienen, wie schon daraus hervorgehen dürfte, dass er verschiedene, dem Gegenstande jedenfalls ferner liegende Sätze, ja selbst den berühmten Lhuilier'schen Ausdruck für die Tangente des vierten Theils des sphärischen Excesses, in Anwendung bringt. Ich selbst habe „Ueber sphärische Dreiecke, deren Seiten im Verhältniss zu dem Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind" im Archiv Thl. IX. Nr. III. S. 8. eine ausführliche Abhandlung geliefert, in welcher natürlich das Legendre'sche Theorem auch vorkommt. Diese Abhandlung hat aber nicht bloss das in Rede stehende Theorem an sich zum Gegenstande, sondern sucht dasselbe überhaupt weiter zu führen, und bedient sich daher bei ihren Entwickelungen durchgängig der Methoden der höheren Analysis, weshalb es nicht meine Absicht sein kann, hier auf dieselbe zu verweisen.

Die Leser des Archivs werden sich vielleicht erinnern, dass ich in verschiedenen Abhandlungen, insbesondere Thl. XVI. Nr. XVI. S. 194. und Thl. XVII. Nr. VI. S. 259., den Versuch gemacht habe, die Lehren der sphärischen Trigonometrie in einer neuen und, wie ich hoffe, vereinfachten Weise darzustellen *). Zur Vervollständigung jener Arbeiten schien mir immer ein möchlichst einfacher und hauptsächlich möglichst directer Beweis des wichtigen Legendre'schen Satzes wünschenswerth, nach dem ich längere Zeit gesucht habe. Die beiden von mir jetzt gefundenen Beweise will ich im Folgenden mittheilen, und bemerke nur vorläufig, dass bei

*) Herr Doctor Wiegand in Halle hat in der empfehlenswerthen Schrift: „Grundzüge der sphärischen Trigonometrie. Halle 1853" die von mir gegebenen neuen Beweise zu einer von der bisherigen sich ganz unterscheidenden systematischen Darstellung der sphärischen Trigonometrie benutzt, wofür ich demselben zu Dank verpflichtet bin. Dasselbe hat auch Herr Inspector Gent zu Liegnitz gethan in dem Programm der dortigen Ritterakademie von Ostern 1853, mit Hinzufügung mehrerer eigner beachtungswerther Bemerkungen.

sen beiden Beweisen ausser der Reihe für $\sin x$ freilich auch e Reihe für $\mathrm{Arcsin}\, x$ in Anwendung gebracht wird, was bei den herigen Beweisen wenigstens nicht in so bestimmter Weise wie Folgenden geschieht, da diese Beweise hauptsächlich nur auf r ersteren Reihe für $\sin x$ beruhen. Ich muss aber gestehen, ss ich nicht einsehe, warum man, wenn man, was bei diesem egenstande nun einmal nicht zu umgehen ist, überhaupt eine nauere Bekanntschaft mit der Lehre von den unendlichen Reihen Anspruch zu nehmen genöthigt ist, ausser der Reihe für $\sin x$ cht auch die gleichfalls sehr wichtige Reihe für $\mathrm{Arcsin}\, x$ als beunt voraussetzen will. Vielleicht wird die in der Abhandlung . I. in diesem Hefte von mir gegebene „Elementare Darellung der Lehre von den unendlichen Reihen" geeigt sein, eine allgemeinere Bekanntschaft mit diesem in allen Beehungen so wichtigen Gegenstande auf einem völlig gründlichen ementaren Wege zu vermitteln.

Bevor ich zu der Entwickelung der beiden von mir gefunden neuen Beweise des Legendre'schen Theorems selbst überhe, bemerke ich rücksichtlich der Geschichte dieses wichtigen d merkwürdigen Satzes, dass derselbe von Legendre zuerst den Mémoires de l'Académie des sciences de Paris 87. p. 338. ohne Beweis mitgetheilt worden ist. Mit einem Beeise versehen findet sich derselbe zuerst in den Méthodes nalytiques pour la détermination d'un arc du méridien; ar J. B. J. Delambre; précedées d'un mémoire sur le ême sujet, par A. M. Legendre. Paris. An VII. p. 13., wo egendre über seinen Satz sagt: „Elle ramène immédiatement la trigonométrie rectiligne la résolution des triangles sphériques ès-peu courbes ou dont les côtés sont très petits par rapport au yon de la sphère."

Ich wende mich nun zu der Entwickelung der beiden neuen eweise des Satzes.

Nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie t, wenn wir die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks f gewöhnliche Weise resp. durch a, b, c und A, B, C bezeichnen:

$$1)\quad \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

so, wie man mittelst der Formel

$$2 \sin \tfrac{1}{2}a^2 = 1 - \cos a$$

hieraus in bekannter Weise leicht findet:

$$2)\quad \sin\tfrac{1}{2}a^2 = -\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}.$$

Bezeichnen wir nun den Excess des sphärischen Dreiecks durch E, so ist bekanntlich:

$$A+B+C=180^0+E,\quad B+C-A=180^0-(2A-E);$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C)=90^0+\tfrac{1}{2}E,\quad \tfrac{1}{2}(B+C-A)=90^0-(A-\tfrac{1}{2}E);$$

also

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\sin\tfrac{1}{2}E,\quad \cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\sin(A-\tfrac{1}{2}E);$$

folglich nach 2):

$$3)\quad \sin\tfrac{1}{2}a^2=\frac{\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)}{\sin B\sin C},$$

und hieraus:

$$4)\quad \sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sin B\sin C}{\sin(A-\frac{1}{2}E)}\sin\tfrac{1}{2}a^2.$$

Wir wollen uns von nun an alle Seiten und Winkel, d. h. die die letzteren messenden Bogen, des sphärischen Dreiecks in Theilen des Halbmessers der Kugel, auf der das sphärische Dreieck liegt, ausgedrückt denken, wobei wir zugleich wie gewöhnlich diesen Halbmesser der Einheit gleich setzen. Dies vorausgesetzt, sehen wir aus der Gleichung 4), dass E in Bezug auf a, und natürlich ganz eben so auch in Bezug auf b und c, eine Grösse der zweiten Ordnung ist.

Weil nun, wenn $\operatorname{Arcsin} x$ den, absolut genommen, kleinsten Bogen bezeichnet, dessen Sinus die Grösse x ist, bekanntlich

$$5)\quad \operatorname{Arcsin} x = x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^5+\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}x^7+\ldots$$

und nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie

$$6)\quad \sin b=\frac{\sin B}{\sin A}\sin a$$

ist, so ist

$$b=\frac{\sin B}{\sin A}\sin a+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sin B}{\sin A}\right)^3\sin a^3+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\sin B}{\sin A}\right)^5\sin a^5+\ldots,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$7)\quad \sin a = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1....5} - \frac{a^7}{1....7} + ...$$

it, wenn man alle Glieder vernachlässigt, die in Bezug auf a von iner die vierte übersteigenden Ordnung sind:

$$= a\frac{\sin B}{\sin A} - \tfrac{1}{6}a^3\frac{\sin B}{\sin A} + \tfrac{1}{6}a^3\left(\frac{\sin B}{\sin A}\right)^3 = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 - \tfrac{1}{6}a^2[1 - \left(\frac{\sin B}{\sin A}\right)^2]\},$$

ler

$$8)\quad b = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 - \tfrac{1}{6}a^2\frac{\sin A^2 - \sin B^2}{\sin A^2}\}.$$

un ist aber nach 3)

$$\sin\tfrac{1}{4}a^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)}{\sin B\sin C},$$

id man kann folglich in der Formel 8), weil der Bogen und sein nus immer von gleicher Ordnung sind,

$$\tfrac{1}{4}a^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)}{\sin B\sin C},\quad \text{also}\quad a^2 = \frac{4\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)}{\sin B\sin C}$$

tzen, wodurch man folgenden Ausdruck erhält:

$$9)\quad b = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 - \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(A-\frac{1}{2}E)(\sin A^2 - \sin B^2)}{\sin A^2\sin B\sin C}\},$$

nmer erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug if a von einer die vierte übersteigenden Ordnung sind. Es ist ier

$$\sin(A-\tfrac{1}{2}E) = \sin A\cos\tfrac{1}{2}E - \cos A\sin\tfrac{1}{2}E;$$

id weil nun $\sin\frac{1}{2}E$ nach 4) von der zweiten Ordnung, ferner erst it Vernachlässigung von Gliedern der vierten Ordnung, was auf r Stelle aus der Reihe

$$\cos\tfrac{1}{2}E = 1 - \frac{(\frac{1}{2}E)^2}{1.2} + \frac{(\frac{1}{2}E)^4}{1.2.3.4} - ....$$

hellet, $\cos\frac{1}{2}E = 1$ ist; so kann man, indem man immer erst Glier vernachlässigt, welche in Bezug auf a von einer die vierte ersteigenden Ordnung sind, in dem Ausdrucke 9) von b offenbar

$$\sin(A-\tfrac{1}{2}E) = \sin A,$$

o nach 9):

$$10)\quad b = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 - \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}E\frac{\sin A^2 - \sin B^2}{\sin A\sin B\sin C}\}$$

setzen, welche letztere Formel, und noch mehr nachher die Fo-
mel 11), ich an sich für merkwürdig halte.

Nun ist aber

$$\sin A^2 - \sin B^2 = (\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B).2\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$= \sin(A+B)\sin(A-B),$$

also nach 10) auch:

$$11)\quad b = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 - \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin C}\},$$

und folglich, weil

$$A+B = \pi - (C-E),\quad \sin(A+B) = \sin(C-E)$$

ist:

$$12)\quad b = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 - \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(A-B)\sin(C-E)}{\sin A\sin B\sin C}\}.$$

Weil aber

$$\sin(C-E) = \sin C\cos E - \cos C\sin E$$

ist, so kann, indem man in dem Ausdrucke von b immer
Glieder vernachlässigt, die in Bezug auf a von einer die vi
übersteigenden Ordnung sind, in diesem Ausdrucke nach e
ganz ähnlichen Betrachtungsweise wie vorher

$$\sin(C-E) = \sin C$$

gesetzt werden, wodurch man

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 - \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}\},$$

oder

$$13)\quad b = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 + \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A - \cot B)\},$$

oder ganz mit demselben Grade der Genauigkeit, indem man n
lich erst Glieder vernachlässigt, die in Bezug auf a von e
die vierte übersteigenden Ordnung sind,

$$14)\quad b = a\frac{\sin B}{\sin A}\{1 + \tfrac{1}{3}E(\cot A - \cot B)\}$$

erhält.

Nun ist

$$\frac{\sin(B-\frac{1}{3}E)}{\sin(A-\frac{1}{3}E)}=\frac{\sin B\cos\frac{1}{3}E-\cos B\sin\frac{1}{3}E}{\sin A\cos\frac{1}{3}E-\cos A\sin\frac{1}{3}E},$$

also erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf a von der vierten Ordnung sind:

$$\frac{\sin(B-\frac{1}{3}E)}{\sin(A-\frac{1}{3}E)}=\frac{\sin B-\frac{1}{3}E\cos B}{\sin A-\frac{1}{3}E\cos A}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{1-\frac{1}{3}E\cot B}{1-\frac{1}{3}E\cot A}=\frac{\sin B}{\sin A}(1-\tfrac{1}{3}E\cot A)^{-1}(1-\tfrac{1}{3}E\cot B)$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}(1+\tfrac{1}{3}E\cot A)(1-\tfrac{1}{3}E\cot B)$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\{1+\tfrac{1}{3}E(\cot A-\cot B)\}$$

oder

$$1+\tfrac{1}{3}E(\cot A-\cot B)=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin(B-\frac{1}{3}E)}{\sin(A-\frac{1}{3}E)};$$

folglich nach 14) erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf a von einer die vierte übersteigenden Ordnung sind:

$$b=a\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin(B-\frac{1}{3}E)}{\sin(A-\frac{1}{3}E)},$$

also

$$15)\quad b=a\frac{\sin(B-\frac{1}{3}E)}{\sin(A-\frac{1}{3}E)}.$$

Ueberhaupt ist also erst mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf a, b, c von einer die vierte übersteigenden Ordnung sind:

$$16)\quad\begin{cases} a=b\dfrac{\sin(A-\frac{1}{3}E)}{\sin(B-\frac{1}{3}E)}=c\dfrac{\sin(A-\frac{1}{3}E)}{\sin(C-\frac{1}{3}E)},\\[2ex] b=c\dfrac{\sin(B-\frac{1}{3}E)}{\sin(C-\frac{1}{3}E)}=a\dfrac{\sin(B-\frac{1}{3}E)}{\sin(A-\frac{1}{3}E)},\\[2ex] c=a\dfrac{\sin(C-\frac{1}{3}E)}{\sin(A-\frac{1}{3}E)}=b\dfrac{\sin(C-\frac{1}{3}E)}{\sin(B-\frac{1}{3}E)}.\end{cases}$$

Man kann also ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, auf welcher es liegt, klein sind, erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die Seiten dieses Dreiecks von einer die vierte übersteigenden Ordnung sind,

wie ein ebenes Dreieck auflösen, dessen Seiten den Seiten des gegebenen sphärischen Dreiecks gleich sind, und dessen Winkel erhalten werden, wenn man von jedem der Winkel des sphärischen Dreiecks den dritten Theil des sphärischen Excesses dieses Dreiecks subtrahirt.

Dies ist das berühmte Theorem von Legendre, von welchem bei Rechnungen der höheren Geodäsie so vielfacher und so vortheilhafter Gebrauch gemacht wird.

Ein zweiter Beweis dieses überaus wichtigen Satzes kann auf folgende Art geführt werden.

Nach 3) ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)}{\sin B\sin C} = \sin A\sin(A-\tfrac{1}{2}E)\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}b^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}E\sin(B-\frac{1}{2}E)}{\sin A\sin C} = \sin B\sin(B-\tfrac{1}{2}E)\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C};$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\sin A\sin(A-\tfrac{1}{2}E)}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\sin B\sin(B-\tfrac{1}{2}E)}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

und folglich:

$$\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}a^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\sin\tfrac{1}{2}a^5 + \ldots.$$

$$= \sqrt{\sin A\sin(A-\tfrac{1}{2}E)}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\sin A\sin(A-\tfrac{1}{2}E)}\,.\sin A\sin(A-\tfrac{1}{2}E)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\sqrt{\sin A\sin(A-\tfrac{1}{2}E)}\,.\{\sin A\sin(A-\tfrac{1}{2}E)\}^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C}\right\}^{\frac{5}{2}}$$

$$+ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\tfrac{1}{2}b = \sin\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}b^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\sin\tfrac{1}{2}b^5 + \ldots.$$

$$= \sqrt{\sin B\sin(B-\tfrac{1}{2}E)}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\sin B\sin(B-\tfrac{1}{2}E)}\,.\sin B\sin(B-\tfrac{1}{2}E)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\sqrt{\sin B\sin(B-\tfrac{1}{2}E)}\,.\{\sin B\sin(B-\tfrac{1}{2}E)\}^2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin B\sin C}\right\}^{\frac{5}{2}}$$

$$+ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$17)\quad P=1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\sin(A-\frac{1}{2}E)\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C}\right\}^1+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left\{\frac{\sin(A-\frac{1}{2}E)\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin B}\right\}^2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$18)\quad Q=1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\sin(B-\frac{1}{2}E)\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C}\right\}^1+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left\{\frac{\sin(B-\frac{1}{2}E)\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C}\right\}^2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

so erhalten wir nach dem Obigen sogleich:

$$19)\quad \frac{b}{a}=\sqrt{\frac{\sin B\sin(B-\frac{1}{2}E)}{\sin A\sin(A-\frac{1}{2}E)}}\cdot\frac{Q}{P}.$$

In Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks erst mit Vernachlässigung von Gliedern der vierten Ordnung ist aber nach 17) und 18) offenbar:

$$P=1+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\sin(A-\frac{1}{2}E)\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C},$$
$$Q=1+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\sin(B-\frac{1}{2}E)\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C};$$

also ist mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks von der vierten Ordnung sind, nach 19):

$$20)\quad \frac{b}{a}=\sqrt{\frac{\sin B\sin(B-\frac{1}{2}E)}{\sin A\sin(A-\frac{1}{2}E)}}\cdot\frac{1+\frac{1}{6}\cdot\dfrac{\sin(B-\frac{1}{2}E)\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C}}{1+\frac{1}{6}\cdot\dfrac{\sin(A-\frac{1}{2}E)\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C}}.$$

Hieraus ergiebt sich, weil

$$\sin(A-\tfrac{1}{2}E)=\sin A\cos\tfrac{1}{2}E-\cos A\sin\tfrac{1}{2}E,$$
$$\sin(B-\tfrac{1}{2}E)=\sin B\cos\tfrac{1}{2}E-\cos B\sin\tfrac{1}{2}E$$

ist, offenbar immer ganz mit demselben Grade der Genauigkeit wie vorher:

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{\sin B\sin(B-\frac{1}{2}E)}{\sin A\sin(A-\frac{1}{2}E)}}\cdot\frac{1+\frac{1}{6}\cdot\dfrac{\sin B\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C}}{1+\frac{1}{6}\cdot\dfrac{\sin A\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C}}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}E-\cot B\sin\frac{1}{2}E}{\cos\frac{1}{2}E-\cot A\sin\frac{1}{2}E}}\cdot\frac{1+\frac{1}{6}\cdot\dfrac{\sin B\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C}}{1+\frac{1}{6}\cdot\dfrac{\sin A\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C}}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\sqrt{\frac{1-\cot B\sin\frac{1}{2}E}{1-\cot A\sin\frac{1}{2}E}}\cdot\frac{1+\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin B\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C}}{1+\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin A\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C}}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}\cot B\sin\frac{1}{2}E}{1-\frac{1}{2}\cot A\sin\frac{1}{2}E}\cdot\frac{1+\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin B\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C}}{1+\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin A\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C}}\ ^{*)}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}(1-\tfrac{1}{2}\cot A\sin\tfrac{1}{2}E)^{-1}(1-\tfrac{1}{2}\cot B\sin\tfrac{1}{2}E)$$
$$\times(1+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\sin A\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C})^{-1}(1+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\sin B\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C})$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}(1+\tfrac{1}{2}\cot A\sin\tfrac{1}{2}E)(1-\tfrac{1}{2}\cot B\sin\tfrac{1}{2}E)$$
$$\times(1-\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\sin A\sin\frac{1}{2}E}{\sin B\sin C})(1+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{\sin B\sin\frac{1}{2}E}{\sin A\sin C})$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\{1+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)\}\{1-\tfrac{1}{6}\sin\tfrac{1}{2}E\frac{\sin A^2-\sin B^2}{\sin A\sin B\sin C}\}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\{1+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)\}\{1-\tfrac{1}{6}\sin\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin C}\}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\{1+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)\}\{1-\tfrac{1}{6}\sin\tfrac{1}{2}E\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}\}\ ^{**)}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\{1+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)\}\{1+\tfrac{1}{6}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)\}$$

$$=\frac{\sin B}{\sin A}\{1+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)+\tfrac{1}{6}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)\},$$

woraus sogleich

$$21)\quad \frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}\{1+\tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)\}$$

folgt.

Weil in dieser Formel erst Glieder vernachlässigt worde sind, welche in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreieck der vierten Ordnung angehören, so ist erst mit Vernachlässigun von in Bezug auf die Seiten des sphärischen Dreiecks die viert übersteigenden Ordnungen:

$$22)\quad b=a\frac{\sin B}{\sin A}\{1+\tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}E(\cot A-\cot B)\},$$

was wieder ganz die schon in 13) gefundene Gleichung ist, au der alles Uebrige völlig auf dieselbe Weise wie oben folgt.

---

*) Nach dem Binomischen Lehrsatze.

**) Ganz auf ähnliche Art wie oben.

IV.

Integration der Differentialgleichung

(1) $$sy'' + (r+qx)y' + (p+nx+mx^2)y = 0$$

mittelst bestimmter Integrale.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Assist. und Privatdoc. der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

---

m, n, p, q, r, s bedeuten beliebige constante Zahlen, von denen auch einige gleich Null sein können, s allein setzen wir jederzeit als von Null verschieden voraus.

Ich setze das Integral obiger Differentialgleichung voraus in folgender Form:

(2) $$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux^2+vx} W du,$$

unter v und W einstweilen noch unbekannte Functionen von u, und unter u_1 und u_2 ebenfalls noch unbekannte, aber constante Zahlen verstanden. Bestimmt man aus (2):

$$y' = \int_{u_1}^{u_2} (2ux + v) e^{ux^2+vx} W du,$$

$$y'' = \int_{u_1}^{u_2} [(2ux + v)^2 + 2u] e^{ux^2+vx} W du,$$

und substituirt diese Werthe in (1), so erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux^2+vx} W\{s(4u^2x^2+4uvx+v^2+2u)+(r+qx)(2ux+v)$$
$$+p+nx+mx^2\}\,du:$$

oder, wenn man den Ausdruck innerhalb der grossen Klam nach x ordnet:

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux^2+vx} W\{x^2(4u^2s+2uq+m)+x(4uvs+2ur+qv+n)$$
$$+(v^2s+2us+vr+p)\}\,du=$$

Setzt man der Kürze halber:

$$(3)\qquad \begin{aligned} 4u^2s+2uq+m&=L,\\ 4uvs+2ur+qv+n&=M,\\ v^2s+2us+vr+p&=N; \end{aligned}$$

so ist:

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux^2+vx} W(Lx^2+Mx+N)\,du=0.$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$Lx^2+Mx+N=L(x^2+v'x)+x(M-Lv')+N$$

identisch statt findet, und wählt man v so, dass

$$(4)\qquad M-Lv'=0$$

wird, so erhält man statt obiger Gleichung:

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux^2+vx} W[L(x^2+v'x)+N]du=0$$

oder

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux^2+vx} WL(x^2+v'x)du+\int_{x_1}^{x_2} e^{ux^2+vx} WNdu=0.$$

Das erste Integral lässt sich auch so schreiben:

$$\int_{u_1}^{u_2} WL\frac{d.\,e^{ux^2+vx}}{du}\,du,$$

und gibt nach der Methode des theilweisen Integrirens behandel

$$\{WLe^{ux^2+vx}\}_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2} e^{ux^2+vx}\frac{d(WL)}{du}du.$$

Es geht somit das Resultat der Substitution von (2) in die vorgelegte Gleichung über in:

$$\{ WLe^{ux^2+vx} \}_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux^2+vx} [NW - \frac{d(WL)}{du}] du = 0,$$

und dieser wird genügt für solche W, welche der Gleichung

$$NW - \frac{d(WL)}{du} = 0 \tag{5}$$

identificiren, und ferner für solche constante u_1 und u_2, welche die Gleichung

$$\{ WLe^{ux^2+vx} \}_{u_1}^{u_2} = 0 \tag{6}$$

befriedigen. — Die Gleichung (4) gibt integrirt:

$$v = \frac{nq-2rm}{4ms-q^2} + 2u \frac{2ns-rq}{4ms-q^2} + C\sqrt{L}, \tag{7}$$

und die Gleichung (5)

$$W = \frac{1}{L} e^{\int \frac{Ndu}{L}}. \tag{8}$$

Setzt man nun der Kürze halber:

$$\frac{nq-2rm}{4ms-q^2} = a, \quad \frac{2ns-rq}{4ms-q^2} = b;$$

so ist das Integral der vorgelegten Differentialgleichung:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{ux^2+vx+\int \frac{v^2s+2us+vr+p}{4u^2s+2uq+m} du}}{4u^2s+2uq+m} du, \tag{9}$$

unter v die Grösse $a + 2bu + C\sqrt{L}$ und unter u_1 und u_2 solche Zahlen verstanden, welche die Gleichung

$$\{ e^{ux^2+vx+\int \frac{Ndu}{L}} \}_{u_1}^{u_2} = 0 \tag{10}$$

erfüllen. Das Integral $\int \frac{Ndu}{L}$ lässt sich leicht entwickeln, es ist nämlich:

$$N = a^2s + ar + p + 2u(2abs + s + br) + 4b^2u^2s + C^2Ls + C\sqrt{L}(2as+r) + 4bCus\sqrt{L},$$

$$\frac{N}{L} = C^2s + \frac{C(2as+r) + 4bCsu}{\sqrt{L}} + \frac{(a^2s+ar+p) + 2u(2abs+s+br) + 4b^2su^2}{L}.$$

$$\int \frac{N du}{L} = u(C^2 s + b^2) + bC\sqrt{L} + \tfrac{1}{4}\log L$$

$$+ \frac{2a^2 s + 2ar + 2p - 2b^2 m - q}{4\sqrt{q^2 - 4ms}} \log \frac{q + 4us - \sqrt{q^2 - 4ms}}{q + 4us + \sqrt{q^2 - 4ms}}.$$

Setzt man

$$\frac{2a^2 s + 2ar + 2p - 2b^2 m - q}{4\sqrt{q^2 - 4ms}} = h,$$

ferner die zwei Wurzeln der Gleichung $L = 0$, α und β, wodurch

$$L = 4s(u - \alpha)(u - \beta)$$

und

$$\alpha = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4ms}}{4s}, \quad \beta = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4ms}}{4s}$$

wird, so ist

$$e^{\int \frac{N du}{L}} = \sqrt[4]{L} \left(\frac{u - \alpha}{u - \beta}\right)^h e^{u(C^2 s + b^2) + bC\sqrt{L}},$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Grenzen heisst:

$$\sqrt[4]{L} \left(\frac{u - \alpha}{u - \beta}\right)^h e^{ux^2 + vx + u(C^2 s + b^2) + bC\sqrt{L}} = 0.$$

Findet man hieraus zwei Werthe für u, so bezeichnen wir sie mit u_1 und u_2, und nehmen sie als die Grenzen des Integrals der vorgelegten Differentialgleichung.

Mehrere specielle Fälle verdienen eine besondere Beachtung.

1) Ist $q^2 = 4ms$, so gibt die Gleichung (4) integrirt:

$$v = -\frac{r}{2s} + \frac{rq - 2sn}{4s(4us + q)} + C(4us + q). \tag{11}$$

Das Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist in diesem Falle wieder:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{ux^2 + vx + \int \frac{v^2 s + 2us + vr + p}{4u^2 s + 2uq + m} du}}{4u^2 s + 2uq + m} du,$$

nur hat hier v den Werth, den die Gleichung (11) gibt; ferner ergeben sich u_1 und u_2 aus der Gleichung

$$\left\{ e^{ux^2 + vx + \int \frac{N du}{L}} \right\}_{u_1}^{u_2} = 0.$$

2) Wird $L = M = N = 0$ für bestimmte Werthe von u und v, twa für

$$u = u_1, \quad v = v_1;$$

ist

$$y = e^{u_1 x^2 + v_1 x}$$

n Integral der Differentialgleichung; wird $L = M = N = 0$ für

$$u = u_1, \quad v = a + 2bu_1 + C\sqrt{4u_1^2 s + 2u_1 q + m},$$

h. für

$$u = u_1, \quad v = a + 2bu_1;$$

ist

$$y = e^{u_1 x^2 + x(a + 2bu_1)}$$

Integral der Differentialgleichung.

V.

Note über kürzeste Linien auf krummen Flächen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Assist. und Privatdoc. der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Wenn eine krumme Fläche durch eine Ebene in zwei symmetrische Theile getheilt werden kann, so ist die Durchschnittslinie er Fläche mit der genannten Ebene, falls eine solche vorhanden, Allgemeinen eine kürzeste Linie auf der Fläche.

Der Beweis ist sehr einfach. Es ist nämlich die Gleichung ner solchen Fläche, welche durch die Ebene xz symmetrisch theilt wird:

$$z = F(x, y^2).$$

Für die kürzesten Linien auf der Fläche muss das Integral

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ein Minimum werden. Setzt man in demselben $dz = pdx + qd$ so ist

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + (pdx + qdy)^2} = \int dx \sqrt{1 + y'^2 + (p + qy')^2},$$

und folglich hat man als Bedingungsgleichung für ein Maxim oder Minimum:

$$(1) \quad \frac{d\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}}{dy} - \left[\frac{d\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}}{dy'}\right]' = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{(p+qy')\left(\frac{dp}{dy} + y'\frac{dq}{dy}\right)}{\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}} - \left[\frac{y' + (p+qy')q}{\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}}\right]' = 0,$$

oder, wenn man diess entwickelt und gehörig reducirt:

$$[y'' + q(p+qy')'] \sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}$$
$$= [y' + (p+qy')q] . [\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}]',$$

und dieser wird genügt für $y = 0$; denn ist $y = 0$, so ist au $y' = 0$, $y'' = 0$ und $q = 0$.

Da die Kugel durch jede, durch ihren Mittelpunkt gehen Ebene symmetrisch getheilt wird, so ist der Bogen des grösst Kreises die kürzeste Linie auf der Kugel.

VI.

Entwickelung von $\lim(1+\frac{1}{n})^n = e$, unter n eine ganze positive Zahl verstanden.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Assist.- und Privatdoc. der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Man hat:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}{4!}$$

$$+\ldots+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})}{n!},$$

und diess lässt sich so ordnen:

$$(1+\frac{1}{n})^n = [1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}]$$

$$-\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\ldots+\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n!}\right]$$

$$+\frac{1}{n^2}\left[\frac{1.2}{3!}+\frac{1.2+1.3+2.3}{4!}+\ldots+\frac{1.2+1.3+2.3+\ldots+(n-2)(n-1)}{n!}\right]$$

$$- \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}.\frac{1}{n^{n-1}}.\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{n!}.$$

Betrachtet man nun folgende Relationen:

$$1+1=1+1,$$

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}<\frac{1}{2!},$$

$$\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}<\frac{1}{3!},$$

$$\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}{4!}<\frac{1}{4!},$$

. . . .

so ergibt sich durch Summiren derselben:

$$(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Betrachtet man ferner die Relationen:

$$1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!},$$

$$\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}>\frac{1-\frac{1+2}{n}}{3!},$$

$$\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}{4!}>\frac{1-\frac{1+2}{n}}{3!}\cdot\frac{1-\frac{3}{n}}{4}>\frac{1-\frac{1+2+3}{n}}{4!},$$

$$\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})(1-\frac{4}{n})}{5!}>\frac{1-\frac{1+2+3}{n}}{4!}\cdot\frac{1-\frac{4}{n}}{5}>\frac{1-\frac{1+2+3+4}{n}}{5!},$$

. . . .

so ergibt sich durch Summiren derselben:

$$(1+\frac{1}{n})^n>1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{1-\frac{1+2}{n}}{3!}+\frac{1-\frac{1+2+3}{n}}{4!}+\frac{1-\frac{1+2+3+4}{n}}{5!}$$

$$+\ldots+\frac{1-\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n}}{n!},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(1+\frac{1}{n})^n > [1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}]$$

$$-\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\dots+\frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{n!}\right].$$

Nun ist

$$\frac{1+2+3+\dots+(r-1)}{r!}=\frac{r.\frac{r-1}{2}}{r!}=\frac{1}{2(r-2)!},$$

folglich

$$(1+\frac{1}{n})^n > [1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}]$$

$$-\frac{1}{2n}[1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{(n-2)!}],$$

und daher um so mehr:

$$(1+\frac{1}{n})^n > (1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!})$$

$$-\frac{1}{2n}(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!})$$

oder

$$(1+\frac{1}{n})^n > (1-\frac{1}{2n})(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}).$$

Wir haben auf diese Weise $(1+\frac{1}{n})^n$ zwischen den zwei Grenzen

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!},$$

$$(1-\frac{1}{2n})(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!})$$

eingeschlossen. Da sich nun diese beiden Grenzen mit dem Wachsen von n fort und fort der Zahl e nähern, so nähert sich auch

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

ohne Ende der Zahl e.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass auch $\lim(1-\frac{1}{n})^{-n}=e$ ist; denn man hat:

$$(1-\frac{1}{n})^{-n}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{-n}=(1+\frac{1}{n-1})^n=(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}.(1+\frac{1}{n-1}),$$

woraus man sieht, dass $(1-\frac{1}{n})^{-n}$ dem Producte der zwei Factoren

$$(1+\frac{1}{n-1})^{n-1},\quad (1+\frac{1}{n-1})$$

gleich ist, von denen der erste sich fort und fort der Zahl e, der zweite der Zahl 1 nähert.

VII.

Ueber Kreise, welche dieselben Durchschnittspunkte haben.

Von

Herrn *Quidde*,

Lehrer am Gymnasium zu Bückeburg.

Die folgenden Untersuchungen sind veranlasst durch einen Satz in Poncelet's „Traité des propriétés projectives des figures Nr. 531.", welcher im Wesentlichen so lautet:

> Wenn die Ecken eines Dreiecks stets auf demselben Kreise bleiben und drei Kreise, die mit dem ersten dieselben Durchschnittspunkte haben, berühren die Seiten des Dreiecks, so dass die Berührungspunkte nicht in gerader Linie liegen, so ist durch die beiden ersten auch der dritte bestimmt.

Poncelet war es offenbar mehr um die Anwendung dieses Satzes zu thun, als um die Entwickelung der Beziehungen, auf

denen derselbe beruht. Er gibt dem eingeschriebenen Dreiecke eine unendlich kleine Bewegung und beweist, dass die dritten Seiten eine Curve umhüllen, welche zugleich für Kreise eine Umhüllungscurve sein müsse, die durch die Durchschnittspunkte der gegebenen Kreise und die jedesmaligen Berührungspunkte gehen; und da eine Umhüllungscurve der, durch die gemeinschaftlichen Punkte der gegebenen gehenden Kreise undenkbar sei, so bleibe nichts übrig, als dass alle jene, vorläufig als verschieden angenommenen Kreise ein und derselbe Kreis seien, der mit der Umhüllungscurve zusammenfalle.

Ich habe mich bemüht, nicht nur einen elementareren Beweis für diesen Satz aufzufinden, sondern auch die eigenthümlichen Beziehungen und Verhältnisse der Sache aufzudecken. Ich habe den Gegenstand von mehreren Gesichtspunkten aus durchforscht und will von meinen Forschungen mittheilen, was mir interessant erscheint.

§. 1.

Ein System von Kreisen.

1. Unter der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis versteht man bekanntlich die Differenz des Quadrats der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte und des Quadrats des Radius. Es kann dieselbe zweckmässig bezeichnet werden durch Zusammenstellung der Zeichen des Punktes und des Kreises und durch Andeutung der Dimension, die sie hat, z. B. (Taf. II. Fig. 1.):

$$AK_2{}^2 = AM_2{}^2 - AM_1{}^2.$$

Sie ist, wenn der Punkt ausserhalb des Kreises liegt, dem Quadrate der von demselben an den Kreis gehenden Tangente, wenn er innerhalb liegt, dem negativen Quadrate der halben, im Punkte halbirten Sehne gleich. Sie ist ferner das Product der Abschnitte, welche auf einer durch den Punkt gezogenen Geraden zwischen dem Punkte und dem Kreise liegen, welches Product negativ zu nehmen ist, wenn der Punkt innerhalb oder die Abschnitte auf verschiedenen Seiten des Punktes liegen.

Auch die analytische Geometrie liefert einen Ausdruck für die Potenz, wenn man die Gleichung des Kreises auf Null reducirt und in der ersten Seite derselben die Coordinaten des Punktes substituirt; denn

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2,$$

oder für den Coordinatenwinkel φ

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\varphi$$

ist nichts anderes als das Quadrat der Entfernung des Punktes (y, x) vom Mittelpunkte (β, α), folglich

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-r^2,$$
$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\varphi-r^2$$

die Potenz.

Subtrahirt man die Potenzen zweier Punkte für denselben Kreis, so verschwindet das Quadrat des Radius und die Differenz der Potenzen ist die Differenz der Entfernungsquadrate der Punkte vom Mittelpunkte, an deren Stelle man die Differenz der Quadrate der Abschnitte setzen kann, in welche eine Senkrechte vom Mittelpunkte die Verbindungslinie der Punkte theilt. Fällt der Fusspunkt der Senkrechten mit dem einen Punkte zusammen, so ist der eine Abschnitt Null, und es kann daher die Potenz eines Punktes auch ausgedrückt werden durch die Summe des Quadrats des von ihm auf einen Durchmesser gefällten Perpendikels und der Potenz des Fusspunkts dieses Perpendikels.

2. Es ist bekannt oder leicht mittelst der letzten Bemerkung zu erweisen, dass alle Punkte, deren Potenzen in Bezug auf zwei Kreise einander gleich sind, in einer geraden Linie liegen, die auf der Centrale senkrecht steht und dieselbe so theilt, dass die Quadrate der Abschnitte dieselbe Differenz haben, wie die Quadrate der Radien. Diese Gerade heisst die Potenzlinie der beiden Kreise und enthält ihre reellen oder imaginären Durchschnittspunkte. Die Gesammtheit der Kreise, welche dieselben Durchschnittspunkte oder dieselbe Potenzlinie haben, soll im Folgenden ein Kreissystem heissen.

Zur Construction der Potenzlinie zweier Kreise dient, wenn sich dieselben nicht schneiden, der Satz, dass die drei Potenzlinien dreier Kreise einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, welcher Satz eine unmittelbare Folge der Eigenschaft der Potenzlinie ist: durch einen dritten Kreis, der beide Kreise schneidet, findet man jedenfalls einen Punkt der Potenzlinie der beiden ersten, nämlich den Durchschnittspunkt seiner Potenzlinien mit denselben. Für zwei Punkte ist die Potenzlinie das auf ihrer Verbindungslinie in der Mitte errichtete Perpendikel. Für einen Punkt und einen Kreis ist sie die Halbirungslinie der vom Punkte an den Kreis gehenden Tangenten und liegt in der Mitte zwischen dem Punkte und der Polaren desselben. Liegt der Punkt innerhalb des Kreises, so ist sie leicht mittelst eines zu Hülfe gezogenen Punktes oder Kreises zu construiren. Somit ist ein Kreissystem durch zwei Kreise, oder einen Kreis und eine

le, oder durch einen Kreis und einen Punkt, oder durch eine le und einen Punkt oder durch zwei Punkte bestimmt. Durch l einen Punkt der Ebene ist für ein gegebenes System ein, war nur ein einziger, Kreis gegeben, der durch ihn hindurch-

Sind die gemeinschaftlichen Punkte des Systems reell, so es an sich klar. Sind sie imaginär und man hat nach dem n die Potenzlinie construirt, so gelangt man mittelst der den Eigenschaft der Potenzlinie zur Construction dieses es. Beschreibt man um einen Punkt der Potenzlinie mit der en der Kreise des Systems gelegten Tangente einen Kreis, hneidet er alle Kreise des Systems rechtwinklig; denn an Kreise des Systems gehen von einem Punkte der Potenzlinie e Tangenten. Diese, das System rechtwinklig schneidenden bilden ihrerseits ein zweites System, das die Centrale des zur Potenzlinie hat. Denn sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein Paar Punkte Potenzlinie, M_1, M_2 ein Paar Mittelpunkte, zu denen die n r_1, r_2 gehören, und ist O der Durchschnittspunkt der Po- und Centrallinie oder der Mittelpunkt des Systems, so sind uadrate der Radien $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ der um $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ beschriebenen, ystem rechtwinklig schneidenden Kreise ausgedrückt durch

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_1^2 &= \mathfrak{p}M_1^2 - r_1^2 \\ &= \mathfrak{p}M_2^2 - r_2^2, \\ \mathfrak{r}_2^2 &= \mathfrak{q}M_1^2 - r_1^2 \\ &= \mathfrak{q}M_2^2 - r_2^2.\end{aligned}$$

st

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}M_1^2 &= \mathfrak{p}O^2 + OM_1^2, \\ \mathfrak{p}M_2^2 &= \mathfrak{p}O^2 + OM_2^2; \\ \mathfrak{q}M_1^2 &= \mathfrak{q}O^2 + OM_1^2, \\ \mathfrak{q}M_2^2 &= \mathfrak{q}O^2 + OM_2^2;\end{aligned}$$

l

$$\mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{r}_2^2 = \mathfrak{p}O^2 - \mathfrak{q}O^2,$$

e Bedingung für die Potenzlinie ist für die um $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ be- enen Kreise, wie

$$r_1^2 - r_2^2 = M_1O^2 - M_2O^2$$

um M_1 und M_2 beschriebenen, und beweist, dass die Po- ie der Kreise um $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die Linie $\mathfrak{pq}$ in O trifft, also die e ist.

enn $M_1O > r_1$, also auch $M_2O > r_2$, so sind die Durch-

schnittspunkte der Kreise M_1 und M_2 imaginär; dann aber $\mathfrak{r}_1 > \mathfrak{p}O$ und $\mathfrak{r}_2 > \mathfrak{q}O$, da

$$\mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{p}O^2 + M_1O^2 - r_1^2,$$

folglich sind dann die Durchschnittspunkte der Kreise um $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ r

Im Folgenden sollen die gemeinschaftlichen Punkte des Syst immer mit P und Q und die gemeinschaftlichen Punkte der System rechtwinklig schneidenden Kreise mit P', Q' bezeic werden. Man hat

$$OP^2 = OQ^2 = r_1^2 - OM_1^2 = r_2^2 - OM_2^2,$$

und diese Grösse soll ein für alle Mal p^2 heissen. Für die Pu P' und Q' hat man

$$\begin{aligned} OP'^2 = OQ'^2 &= \mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{p}O^2 = \mathfrak{r}_2^2 - \mathfrak{q}O^2 \\ &= OM_1^2 - r_1^2 = OM_2^2 - r_2^2 \\ &= -p^2, \end{aligned}$$

woraus man zugleich sieht, dass P' und Q' Kreise des Syst sind, deren Mittelpunkte, P' und Q' selbst, von O die Ent nung $p\sqrt{-1}$ haben und deren Radien gleich Null sind. Ebe sind P und Q die Punkte desjenigen Systems, dessen Mi punkte auf der Potenzlinie liegen.

Wenn nun der dem Punkte A zugehörige Kreis des Syst für den Fall construirt werden soll, dass P und Q imaginär s so sind P' und Q' reell, und der durch A und P' und Q' gel Kreis schneidet den gesuchten rechtwinklig, so dass seine T gente in A den gesuchten Mittelpunkt auf der Centrale bestin

3. Die Centrale ist im Folgenden die Achse der x, die tenzlinie die Achse der y; die Abscissen der Mittelpunkte M, M_1, M sind $m, m_1, m_2, \ldots$, die zugehörigen Radien $r, r_1, r_2, \ldots$, und die telpunktsentfernungen $MM_1, \ldots$ sind bezeichnet mit $q_1, \ldots$, so d

$$m - m_1 = q_1, \quad m - m_2 = q_2, \ldots$$

Man hat dann ausser der Gleichung

$$r^2 - m^2 = p^2$$

noch die folgenden:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 + q_1^2 - 2mq_1, \\ r_1^2 &= r^2 - q_1^2 - 2m_1q_1, \end{aligned}$$

die sich leicht durch Einsetzung des Werthes von q_1 bewei lassen; und wenn man die erste der Gleichungen

$$r_2^2 = r^2 + q_2^2 - 2mq_2,$$
$$r_1^2 = r^2 + q_1^2 - 2mq_1$$

it q_1, die zweite mit q_2 multiplicirt, und subtrahirt:

$$r^2(q_2 - q_1) + r_2^2 q_1 - r_1^2 q_2 = q_1 q_2 (q_2 - q_1).$$

Man sieht leicht, dass diess nichts anderes ist, als der Stewart-he Satz, angewendet auf die in gerader Linie liegenden Punkte M, I_1, M_2, von denen die Verbindungslinien r, r_1, r_2 nach P oder gehen, welcher Satz nun aber auch für den Fall nachgewiesen it, dass P und Q imaginär sind.

§. 2.

ie gemeinschaftlichen Punkte eines Kreissystems.

1. *Lehrsatz.* Zieht man durch einen der gemeinschaftlichen unkte eines Kreissystems beliebige Linien und verbindet die urchschnittspunkte einer solchen Linie mit den Kreisen des Systems it dem andern gemeinschaftlichen Punkte, so entsteht eine leihe von Dreiecken, welche denen der andern Linien ähnlich sind.

Denn die Winkel dieser Dreiecke sind die über der gemein-chaftlichen Sehne PQ stehenden Peripheriewinkel oder ihre Ne-enwinkel, welche nur von den Kreisen und nicht von der Rich-ung der schneidenden Linie abhängen. Wie z. B. auch QA (Taf. II. ig. 1.) gezogen sei, der Winkel $P\mathfrak{b}Q$ und damit auch $P\mathfrak{b}A$, und ler Winkel $PA\mathfrak{b}$ ist immer derselbe, so dass das Dreieck $P\mathfrak{b}A$ eine Gestalt behält, wie auch QA um Q sich drehen mag, wenn ur $\mathfrak{b}$ und A immer mit denselben Kreisen die Durchschnitts-unkte sind.

Es folgt hieraus, dass alle durch einen der gemeinschaftlichen Punkte gehenden Linien durch die Kreise des Systems in densel-en Verhältnissen geschnitten werden, und da zu diesen Linien uch eine auf der Potenzlinie senkrechte gehört, wie QFG, für velche PF und PG Durchmesser sind, so dass $FG : M_1M_2 = PF : PM_2$, oder

$$FG = 2M_1M_2,$$

o folgt ferner, dass die Abschnitte der Linien sich verhalten wie lie Entfernungen der Mittelpunkte der betreffenden Kreise. Die inander entsprechenden oder durch dieselben Kreise bestimmten unkte auf irgend zweien der Linien stehen in der Beziehung der ehnlichkeit und ihre Verbindungslinien sind Tangenten einer Parabel.

2. *Lehrsatz.* Geht durch jeden der beiden gemeinschaftlichen Punkte eine Gerade, AP, AQ, so werden diese zwei Geraden von den Kreisen des Systems in Punkten geschnitten, deren Verbindungslinien alle einander parallel sind.

Denn die in den Durchschnittspunkten, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ z. B. mit dem Kreise M_2, entstehenden Winkel $P\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ und $Q\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ergänzen die Winkel $\mathfrak{b}QP$ und $\mathfrak{c}PQ$ zu zwei Rechten und sind daher für alle Kreise dieselben, so lange die Linien AP, AQ dieselben bleiben.

Die Tangente $\mathfrak{p}L$ an den durch A bestimmten Kreis, in A, gelegt, macht mit den Linien dieselben Winkel

$$\mathfrak{p}AP = AQP = A\mathfrak{c}\mathfrak{b},$$
$$LAQ = APQ = A\mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

und ist den Verbindungslinien $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ parallel.

Es ist bekannt, dass die Verbindungslinie des Durchschnittspunkts von $P\mathfrak{b}$ mit $Q\mathfrak{c}$ und des Durchschnittspunkts von PQ und $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, der $\mathfrak{e}$ heisse, die Polare des Punktes A für den Kreis M_2 ist und denselben in Punkten schneidet, B, C, welche die Berührungspunkte der von A an denselben gelegten Tangenten sind. Die Linien $\mathfrak{e}A$, $\mathfrak{e}\mathfrak{c}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}CB$, $\mathfrak{e}PQ$ sind harmonische Strahlen und schneiden auf jeder Geraden, die einer von ihnen parallel ist, zwei gleiche Strecken aus. So ist auf der mit $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ parallelen Tangente $\mathfrak{p}L$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} = A\mathfrak{p},$$

und auf der der Potenzlinie parallelen Sehne $A\mathfrak{g}$ des Kreises M_1

$$A\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\mathfrak{f}.$$

Aus der ersten Gleichheit folgt, dass die Polaren BC eines Punktes A, für die verschiedenen Kreise des Systems, alle durch einen festen, nur von A abhängigen Punkt $\mathfrak{a}$ gehen. Die zweite Gleichheit führt zu einem Ausdrucke für die Potenz des Punktes A. Es ist nämlich $APQ\mathfrak{g}$ ein Antiparallelogramm und

$$\text{W. } A\mathfrak{g}Q = 180^\circ - APQ.$$

Ebenso ist

$$\text{W. } \mathfrak{c}\mathfrak{b}Q = 180^\circ - APQ,$$

also

$$\text{W. } \mathfrak{d}\mathfrak{b}Q + \text{W. } \mathfrak{d}\mathfrak{g}Q = 180^\circ,$$

und $\mathfrak{b}Q\mathfrak{g}\mathfrak{d}$ ein Kreisviereck, so dass

$$A\mathfrak{b} \,.\, AQ = A\mathfrak{d} \,.\, A\mathfrak{g}.$$

Das Product $A\mathfrak{b}.AQ$ ist aber die Potenz des Punktes A für en Kreis M_2, so dass nach der eingeführten Bezeichnung:

$$\begin{aligned} AK_2{}^2 &= A\mathfrak{d}.A\mathfrak{g} \\ &= A\mathfrak{f}.AA_1 \\ &= A\mathfrak{f}.y \\ &= 2.\mathfrak{pe}.y, \end{aligned}$$

renn die Senkrechte AA_1 mit y bezeichnet wird. Man hat so den Satz:

Lehrsatz. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen ler Kreise des Systems ist gleich dem Product der senkrechten Entfernung des Punktes von der Centrale in die auf dieser Senkechten zwischen dem Punkte und der Polaren desselben befindichen Strecke.

3. Es sei von A auf PQ das Loth AA_2 gefällt und um M_2 in Kreis mit dem Radius r_1 des Kreises M_1 beschrieben, auf lem A liegt; er schneide AA_2 in E. Bekanntlich schneiden zwei leiche Kreise auf einer ihrer Centrale Parallelen ein Stück ab, las ihrer Mittelpunktsentfernung gleich ist, so dass

$$\begin{aligned} AE &= M_1M_2 \\ &= \tfrac{1}{2}FG. \end{aligned}$$

Man lege um das Dreieck $A\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ einen Kreis, der von AA_2 in D geschnitten werde. Dann ist

$$\text{W. } AD\mathfrak{b} = \text{W. } A\mathfrak{c}\mathfrak{b},$$

$$\text{W. } A\mathfrak{c}\mathfrak{b} = \text{W. } \mathfrak{b}QP,$$

und da als Wechselwinkel

$$\text{W. } DA\mathfrak{b} = \text{W. } AQG,$$

so ist

$$\text{W. } AD\mathfrak{b} + \text{W. } DA\mathfrak{b} = 90^0,$$

folglich auch

$$\text{W. } A\mathfrak{b}D = 90^0$$

und AD ein Durchmesser des Kreises.

Ferner ist, als Peripheriewinkel über der Sehne $\mathfrak{b}F$,

$$\text{W. } \mathfrak{b}PF = \text{W. } \mathfrak{b}QF,$$

also

$$\text{W. } \mathfrak{b}PF = \text{W. } DA\mathfrak{b},$$

und da

$$\text{W. } P\mathfrak{b}F = \text{W. } D\mathfrak{b}A = 90^\circ,$$

so ist

$$\text{Dr. } P\mathfrak{b}F \sim A\mathfrak{b}D,$$
$$AD : A\mathfrak{b} = PF : P\mathfrak{b}.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

$$\text{Dr. } PA\mathfrak{b} \sim PGF$$

nach der ersten Nummer dieses Paragraphen ist ferner

$$A\mathfrak{b} : GF = P\mathfrak{b} : PF,$$

also, durch Verbindung der beiden Proportionen:

$$AD = GF,$$

woraus folgt, da $AE = \frac{1}{2}GF$, dass

$$AE = ED = M_1M_2$$

und dass E der Mittelpunkt des dem Dreiecke $A\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ umschriebenen Kreises ist. Also hat man den Satz:

Lehrsatz. Verbindet man irgend einen Punkt mit den gemeinschaftlichen Punkten des Systems und legt durch den Punkt und die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien mit einem Kreise des Systems einen Kreis, so ist sein Radius gleich der Mittelpunktsentfernung des geschnittenen Kreises und des durch den Punkt bestimmten Kreises; und sein Mittelpunkt liegt im Durchschnitte eines diesem gleichen und jenem concentrischen Kreises mit der auf die Potenzlinie vom Punkte gefällten Senkrechten. Der Mittelpunkt bewegt sich auf demselben Kreise, wenn der Punkt A auf demselben Kreise des Systems sich bewegt und der geschnittene Kreis derselbe bleibt.

§. 3.

Die Potenz der Punkte eines Kreises des Systems in Bezug auf andere Kreise desselben.

Lehrsatz. Bewegt sich ein Punkt A (Taf. II. Fig. 1.) auf einem Kreise, um M_1, so ist seine Potenz in Bezug auf einen zweiten Kreis, um M_2, gleich dem Producte seiner senkrechten Entfernung von der Potenzlinie, $AA_2 = OA_1 = x$, mit der doppelten Mittelpunktsentfernung, $2M_1M_2 = 2q$, der beiden Kreise; und

war ist dies Product negativ zu nehmen, wenn die Richtungen om Punkte nach der Potenzlinie, AA_2, und die Richtung vom Mittelpunkte des durch den Punkt gehenden Kreises, M_1, nach em des zweiten Kreises, M_2, entgegengesetzt sind.

Das Viereck $Q\mathfrak{b}DA_2$, das bei A_2 und $\mathfrak{b}$ rechte Winkel hat, st ein Kreisviereck, folglich

$$A\mathfrak{b}.AQ = AD.AA_2,$$

woraus der Satz sogleich folgt, da $A\mathfrak{b}.AQ$ die besprochene Potenz ist; also

$$AK_2^2 = AD.AA_2$$
$$= 2q.x.$$

In diesem Ausdrucke ist nichts mehr enthalten, das von der Realität der Punkte P und Q abhinge, und man könnte daher denselben ohne Weiteres auch für den Fall gelten lassen, dass diese Punkte imaginär sind. Es ist indess nicht schwer, den Beweis ohne alle Rücksicht auf die Durchschnittspunkte P und Q zu führen. Es ist (§. 1. Nr. 1.)

$$AK_2^2 = AA_1^2 + A_1K_2^2$$
$$= AM_1^2 - A_1M_1^2 + A_1M_2^2 - r_2^2$$
$$= r_1^2 - r_2^2 + A_1M_2^2 - A_1M_1^2.$$

Nach Nr. 2. §. 1. ist

$$r_1^2 - r_2^2 = OM_1^2 - OM_2^2 = m_1^2 - m_2^2,$$

und, je nach der verschiedenen Lage des Punktes A oder des Punktes A_1, ist, der eingeführten Bezeichnung gemäss,

$$A_1M_2 = \pm(x - m_2),$$
$$A_1M_1 = \pm(x - m_1),$$

wo m_1, m_2 negativ zu nehmen sind, wenn die Mittelpunkte M_1, M_2 auf die negative Seite von O hinübertreten. Die Verschiedenheit der Vorzeichen ist gleichgültig, da von A_1M_2 und A_1M_1 nur die Quadrate vorkommen. Durch Einsetzung dieser Werthe erhält man

$$AK_2^2 = m_1^2 - m_2^2 + (x - m_2)^2 - (x - m_1)^2$$
$$= (m_1 + m_2)(m_1 - m_2) + (m_1 - m_2)(2x - m_2 - m_1)$$
$$= (m_1 - m_2).2x$$
$$= 2qx.$$

Wenn man sich der Grössen q und x bedient, so ist weiter keine

Zeichenbestimmung nothwendig, da diese Grössen das Zeichen schon in sich enthalten, man hat nur festzuhalten, dass

$$q = m_1 - m_2,$$

und dass m_1, m_2 die Abscissen der Mittelpunkte sind.

Die analytische Geometrie kommt durch eine einfache Subtraction zum Ziele, denn nach 1. §. 1. ist

$$\begin{aligned} AK_2{}^2 &= y^2 + (x - m_2)^2 - r_2{}^2 \\ &= y^2 + x^2 - 2m_2x + m_2 - r_2 \\ &= y^2 + x^2 - 2m_2x + p^2, \end{aligned}$$

$$AK_1{}^2 = y^2 + x^2 - 2m_1x + p^2;$$

unter y, x die Coordinaten des Punktes A verstanden. Es ist aber

$$AK_1{}^2 = 0,$$

also

$$\begin{aligned} AK_2{}^2 &= (y^2 + x^2 - 2m_2x + p^2) - (y^2 + x^2 - 2m_1x + p^2) \\ &= 2(m_1 - m_2)x. \end{aligned}$$

Anmerkung. Dieser Satz, der meines Wissens noch nicht als selbstständiger Satz aufgestellt worden ist, so leicht und einfach er sich auch darbietet, ist in der That wichtiger, als es auf den ersten Blick scheinen mag. Die folgenden Untersuchungen werden das hinlänglich darthun. Ich will aber schon hier einige Anwendungen desselben geben, um seine Wichtigkeit auf dem Gebiete der Elementarmathematik zu zeigen und seine Aufnahme in die Lehrbücher zu empfehlen. In allen, die mir bekannt sind, findet sich die Bedingungsgleichung zwischen den Radien und der Mittelpunktsentfernung der Kreise, welche ein und demselben Dreiecke ein- und umbeschrieben sind. Man vergleiche die verschiedenen Beweise, welche für diese Relation gegeben sind, mit dem folgenden, in welchem dieselbe fast als unmittelbare Folge des in Rede stehenden Potenzensatzes erscheint. Es ist leicht zu zeigen, wenn es nicht als bekannt vorausgesetzt werden soll, dass der Mittelpunkt M_1 des dem Dreieck ABC (Taf. II. Fig. 2.) eingeschriebenen Kreises auf einem Kreise liegt, der die Mitte N des die Sehne BC umspannenden Bogens des umschriebenen Kreises K mit dem Mittelpunkte M zum Mittelpunkte und $NB = NC$ zum Radius hat. Denn AM_1, BM_1, CM_1 halbiren die Winkel des Dreiecks, so dass AM_1 durch N geht, und es ist

$$\text{W. } BM_1C = BM_1N + CM_1N$$
$$= \tfrac{1}{2}BAC + \tfrac{1}{2}ABC + \tfrac{1}{2}BAC + \tfrac{1}{2}ACB$$
$$= 90^0 + \tfrac{1}{2}BAC.$$

halbe Centriwinkel des Bogens BQC, der dem Peripherie-
el im entgegengesetzten Bogen über BC gleich ist,

$$\text{W. } QNC = 90^0 + NPC$$
$$= 90^0 + \tfrac{1}{2}BAC,$$

ass der Bogen über BC den Winkel $90^0 + \tfrac{1}{2}BAC$ oder BM_1C
. Ist nun M_1D auf BC senkrecht, so ist die Potenz M_1K^2
Punktes M_1 für Kreis K einerseits

$$M_1K^2 = M_1M^2 - MN^2,$$

rerseits, nach der Lage des Punktes M_1,

$$M_1K^2 = -2M_1D.MN,$$

$MM_1 = d$, $MN = r$, M_1D, das offenbar der Radius des ein-
briebenen Kreises ist, $= \varrho$ gesetzt,

$$d^2 = r^2 - 2r\varrho.$$

Als zweites Beispiel der Brauchbarkeit des Satzes dieses Pa-
phen führe ich die Inhaltsformel des Dreiecks aus seinen drei
n an, für welche Castillon einen Beweis in der rein geo-
schen Weise der Griechen gegeben hat (s. z. B. Jacobi's
Swinden Nr. 400. Anm. 3.), der durch jenen Satz bedeutend
kürzt wird, so dass er nun auch den algebraischen Beweis
ürze übertrifft.

ABC (Taf. II. Fig. 3.) sei das Dreieck, und es seien um C
B mit CA und BA Kreise K_1, K beschrieben, welche auf
die Punkte H, G und E, F bestimmen. Das Perpendikel
ist die Potenzlinie dieser Kreise. Nach dem in Rede stehen-
Satze ist

$$EK_1^2 = -2.ED.BC,$$
$$FK_1^2 = \quad 2.FD.BC.$$

st aber auch nach 1. §. 1.:

$$EK_1^2 = -EG.EH,$$
$$FK_1^2 = \quad FG.FH;$$

ch

$$EG.EH = 2.ED.BC,$$
$$FG.FH = 2.FD.BC;$$

und da, nach bekanntem Kreissatze,

$$ED.FD = AD^2,$$

so erhält man durch Multiplication

$$EG.EH.FG.FH = 4.AD^2.BC^2$$
$$= 16.(\text{Dr. } ABC)^2.$$

Setzt man $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, so ist

$$FH = a + b + c,$$
$$FG = a + c - b,$$
$$EG = b + c - a,$$
$$HE = a + b - c,$$

also

$$\text{Dr. } ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

§. 4.

Die Tangenten des Systems.

1. Für jede gerade Linie gibt es im Allgemeinen zwei Berührungskreise, deren Berührungspunkte in gleicher Entfernung von der Potenzlinie liegen, so dass also (2. §. 2.) der eine der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der Polaren des anderen für die verschiedenen Kreise des Systems ist. Da nämlich der Punkt, in welchem die Gerade die Potenzlinie schneidet, für alle Kreise des Systems gleiche Potenz haben muss, so liegen die Berührungspunkte auf dem um diesen Punkt beschriebenen Kreise, der die Kreise des Systems rechtwinklig schneidet. Ist HL (Taf. II. Fig. 1.) die Linie, so sind M_1 und $\mathfrak{M}_1$ die Mittelpunkte der Berührungskreise und A, $\mathfrak{a}$ die Berührungspunkte, so dass

$$\mathfrak{p}\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{p}A^2$$
$$= \mathfrak{p}P.\mathfrak{p}Q.$$

Sind die Punkte P, Q imaginär, so sind die beiden Berührungskreise immer reell; einer derselben verwandelt sich in das System der unendlich entfernten Linie und der Potenzlinie, wenn die Gerade der letzteren parallel ist und ihr Einschnittspunkt $\mathfrak{p}$ in dieselbe im Unendlichen liegt, so dass der eine Berührungspunkt ebenfalls im Unendlichen liegt, während der andere sich in der Centrallinie befindet, in welche der rechtwinklig schneidende Kreis übergeht. Sind die Punkte P, Q reell, so fallen die beiden Be-

rührungskreise in einen zusammen, wenn die Linie durch einen dieser Punkte geht, in dem sich dann auch die Berührungspunkte vereinigen; beide werden imaginär, wenn die Linie die Strecke PQ schneidet.

2. *Lehrsatz.* Wird eine Sehne eines der Kreise von einem andern berührt, wie HL (Taf. II. Fig. 1.) in A oder auch in $\mathfrak{a}$, so wird dieselbe durch den Berührungspunkt in Strecken getheilt, welche sich verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Entfernungen HH_2, LL_2 der Endpunkte der Sehne von der Potenzlinie:

$$AL:AH = \sqrt{LL_2}:\sqrt{HH_2},$$

$$\mathfrak{a}L:\mathfrak{a}H = \sqrt{LL_2}:\sqrt{HH_2}.$$

Denn nach §. 3. ist

$$\begin{aligned} AH^2 &= 2HH_2 . MM_1, \\ AL^2 &= 2LL_2 . MM_1, \\ \mathfrak{a}L^2 &= 2LL_2 . M\mathfrak{M}_1, \\ \mathfrak{a}H^2 &= 2HH_2 . M\mathfrak{M}_1. \end{aligned}$$

Es folgt aus diesem Verhalten unmittelbar, dass

$$AL:AH = \mathfrak{a}L:\mathfrak{a}H,$$

oder dass die beiden Berührungspunkte mit den Endpunkten der Sehne vier harmonische Punkte bilden.

Die Bestimmung der Berührungspunkte einer gegebenen Sehne ist sehr leicht, und die folgenden Betrachtungen führen zu einer einfachen Bestimmung der Tangente $A\mathfrak{a}$ und des zweiten Berührungspunktes $\mathfrak{a}$, wenn der erste A gegeben ist. Dazu dienen folgende Sätze:

Lehrsatz. Die Entfernung des Berührungspunktes von der Potenzlinie ist die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen der Sehnenendpunkte von der Potenzlinie.

$$AA_2{}^2 = HH_2 . LL_2,$$

denn

$$\mathfrak{p}A^2 = \mathfrak{p}H . \mathfrak{p}L$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}A : AA_2 &= \mathfrak{p}H : HH_2, \\ \mathfrak{p}A : AA_2 &= \mathfrak{p}L : LL_2. \end{aligned}$$

Lehrsatz. Die Tangente $\mathfrak{p}A$ (oder $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$) verhält sich zur Ent-

fernung des Berührungspunktes von der Potenzlinie wie der Radius r_1 (oder $\mathfrak{r}_1$) des berührten Kreises M_1 (oder $\mathfrak{M}_1$) zur Entfernung des Berührungspunkts von der Centrallinie:

$$\mathfrak{p}A : AA_2 = AM_1 : AA_1,$$

da die Dreiecke $A\mathfrak{p}A_2$ und AM_1A_1, deren Seiten auf einander senkrecht stehen, $A\mathfrak{p}$ auf AM_1, $\mathfrak{p}A_2$ auf M_1A_1, A_2A auf A_1A, einander ähnlich sind. Ist $AA_2 = x$, $AA_1 = y$, so ist

$$\mathfrak{p}A = \frac{xr_1}{y}.$$

Lehrsatz. Zwischen den Berührungspunkten A und $\mathfrak{a}$ hat man die Beziehung, dass das Product ihrer Entfernungen von der Centrallinie $AA_1 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ gleich ist der Potenz eines der Fusspunkte A_1, $\mathfrak{a}_1$ dieser Entfernungen in Bezug auf irgend einen, das System rechtwinklig schneidenden Kreis; oder, wenn man einen der gemeinschaftlichen Punkte des Systems, P, Q, zu diesem Kreise wählt, gleich dem Quadrate der Entfernung eines der Fusspunkte von einem dieser Punkte:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 . AA_1 = \mathfrak{a}_1P^2.$$

Sind P, Q imaginär, so kann man die Punkte P', Q' des Systems benutzen und hat

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 . AA_1 = \mathfrak{a}_1P' . \mathfrak{a}_1Q'.$$

Beweis. Dass $\mathfrak{a}_1$, sowie überhaupt ein Punkt der Centrale in Bezug auf alle rechtwinklig schneidenden Kreise dieselbe Potenz hat, folgt aus §. 1. 2. oder daraus, dass für diese Kreise die Centrale die Potenzlinie ist. Der um den Mittelpunkt $\mathfrak{p}$ beschriebene rechtwinklig schneidende Kreis hat $\mathfrak{p}A$ zum Radius, $\mathfrak{a}A$ zum Durchmesser und schneidet $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ in α so, dass W. $\mathfrak{a}\alpha A$ ein rechter, $A\alpha \parallel A_1\mathfrak{a}_1$, also

$$\mathfrak{a}_1\alpha = A_1A,$$

woraus nun die obige Behauptung unmittelbar folgt, da die Potenz des Punktes $\mathfrak{a}_1$ in Bezug auf diesen Kreis $\mathfrak{a}_1\alpha . \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}$ ist.

Ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2 = x_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = y_1$, so hat man

$$x_1 = -x,$$

und zur Bestimmung von y_1:

$$y_1 y = A_1P^2$$
$$= x^2 + p^2,$$
$$y_1 = \frac{x^2 + p^2}{y}.$$

Die Strecke $O\mathfrak{p}$, welche die Tangente von der Potenzlinie abschneidet, ist zwischen y und y_1 das arithmetische Mittel, da $O\mathfrak{a}_1 = OA_1$, also

$$O\mathfrak{p} = \frac{y + y_1}{2}$$

$$= \frac{x^2 + p^2 + y^2}{2y}$$

und da

$$x^2 + y^2 = p^2 + 2m_1 x:$$

$$O\mathfrak{p} = \frac{p^2 + m_1 x}{y}.$$

3. *Lehrsatz.* Werden die Seiten eines Dreiecks, das einem Kreise des Systems eingeschrieben ist, von Kreisen des Systems berührt, so liegen von den sechs Berührungspunkten viermal drei in gerader Linie, während jedesmal die drei übrigen mit den Ecken des Dreiecks auf Strahlen eines Punktes liegen.

Ist ABC das Dreieck, das man sich leicht ohne Figur vorstellen kann; sind AA_2, BB_2, CC_2 die Entfernungen der Ecken von der Potenzlinie, D der Berührungspunkt eines Kreises mit AB, E mit BC, F mit CA; q_1, q_2, q_3 die Entfernungen der Mittelpunkte dieser drei Kreise vom Mittelpunkte des ABC umschriebenen, so ist nach §. 3.:

$$AD^2 = 2q_1 . AA_2,$$
$$BD^2 = 2q_1 . BB_2,$$
$$BE^2 = 2q_2 . BB_2,$$
$$CE^2 = 2q_2 . CC_2,$$
$$CF^2 = 2q_3 . CC_2,$$
$$AF^2 = 2q_3 . AA_2;$$

woraus folgt:

$$AD^2 . BE^2 . CF^2 = AF^2 . CE^2 . BD^2,$$

welches die Bedingung dafür ist, dass entweder D, E, F in gerader Linie liegen, oder dass CD, AE, BF sich in demselben Punkte treffen. Zugleich folgt aus der harmonischen Lage der beiden für eine Seite möglichen Berührungspunkte gegen die Endpunkte der Seite, dass wenn für drei Berührungspunkte D, E, F der eine der beiden Fälle stattfindet, und man vertauscht den Punkt D z. B. mit dem anderen Berührungspunkte D' der Seite AB, dann für D', E, F der zweite Fall eintreten muss. Erschöpft man durch

Fortsetzung der Vertauschung alle möglichen Fälle, so gelangt man zu dem aufgestellten Satze.

§. 5.

Beziehung der Kreise des Systems auf einander.

Lehrsatz. Die Punkte eines dem System angehörigen Kreises haben die gemeinsame Eigenschaft, dass ihre Potenzen in Bezug auf ein Paar feste Kreise des Systems ein bestimmtes Verhältniss haben, das dem Verhältniss der Mittelpunktsentfernungen gleich ist; und alle Punkte, deren Potenzen für zwei Kreise ein bestimmtes Verhältniss haben, liegen auf demselben Kreise des durch jene bestimmten Systems.

Es ergibt sich der directe Satz unmittelbar aus §. 3. Sind K, K_1, K_2 die Kreise, M, M_1, M_2 ihre Mittelpunkte, A ein Punkt des Kreises K, x seine Entfernung von der Potenzlinie, so ist, $MM_1 = q_1$, $MM_2 = q_2$ gesetzt:

$$AK_1^2 = 2q_1 x,$$
$$AK_2^2 = 2q_2 x,$$
$$AK_1^2 : AK_2^2 = q_1 : q_2,$$

ein Verhältniss, das von dem Punkte A unabhängig und allein durch die gegenseitige Lage der Mittelpunkte bestimmt ist, und zwar nicht nur der Grösse, sondern auch dem Zeichen nach. Es ist positiv, wenn die Richtungen MM_1, MM_2 dieselben, negativ, wenn sie entgegengesetzt sind. Aus dieser vollkommenen Bestimmtheit des Verhältnisses ergibt sich sogleich die Umkehrung des Satzes; dass nämlich alle Punkte, deren Potenzenverhältniss in Bezug auf zwei bestimmte Kreise dasselbe ist, auf demselben Kreise des Systems liegen müssen; denn es ist nur ein einziger Kreis des Systemes möglich, für den dies Verhältniss stattfindet.

Für zwei gleiche, aber entgegengesetzte Potenzenverhältnisse bilden die Mittelpunkte vier harmonische Punkte.

Dass die Potenzlinie als einer der Kreise, der seinen Mittelpunkt im Unendlichen hat, zu betrachten ist, zeigt sich hier sehr klar: das Potenzenverhältniss ihrer Punkte in Bezug auf irgend ein Paar Kreise ist $=1$; und zwar ist die unendliche Entfernung des Mittelpunktes der einzige Fall, für welchen das Potenzenverhältniss $=+1$ werden kann, -1 wird es, wenn der Mittelpunkt M die Strecke M_1M_2 halbirt.

Fällt der Mittelpunkt M mit einem der beiden Aehnlichkeitspunkte der Kreise M_1 und M_2 zusammen, so ist das Potenzenverhältniss dem Verhältniss der Radien $r_1 : r_2$ gleich, und zwar $+(r_1 : r_2)$ für den äusseren, $-(r_1 : r_2)$ für den inneren Aehnlichkeitspunkt.

Geht aber der Kreis um M durch einen der Aehnlichkeitspunkte, so ist das Potenzenverhältniss gleich dem Verhältnisse der Quadrate der Radien, da die vom Aehnlichkeitspunkte ausgehenden Tangenten sich wie die Radien verhalten. Da dies so gut für den einen, wie für den andern Aehnlichkeitspunkt der Fall ist, so folgt, dass beide auf demselben Kreise des Systemes liegen, der also seinen Mittelpunkt in der Mitte zwischen ihnen hat. Sind AB_1 und AB_2 Tangenten von A an K_1 und K_2, und ist, was man sich leicht ohne Figur vorstellen kann,

$$AB_1 : AB_2 = r_1 : r_2$$
$$= B_1M_1 : B_2M_2,$$

so muss, da W. $AB_1M_1 = AB_2M_2$ rechte sind,

$$\text{Dr. } AB_1M_1 \backsim \text{Dr. } AB_2M_2,$$

und die halben, also auch die ganzen Winkel, welche die an jeden der Kreise gehenden Tangenten bilden, sind gleich,

$$\text{W. } M_1AB_1 = M_2AB_2,$$

d. h. die von den Punkten des Kreises, der die Strecke zwischen den Aehnlichkeitspunkten zum Durchmesser hat, an den Kreis K_1 gehenden Tangenten bilden mit einander denselben Winkel wie die an den Kreis K_2 gehenden, oder der erste Kreis ist der Ort der Punkte, von welchen aus die beiden andern Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden.

§. 6.

Zwei Gerade, welche denselben Berührungskreis haben.

1. *Lehrsatz.* Schneidet eine Gerade eines der drei zugeordneten Seitenpaare eines Kreisvierecks unter gleichen Winkeln, so schneidet sie auch die beiden anderen Paare unter gleichen Winkeln, und es haben die drei Strecken, welche zwischen einer Ecke und der Schneidenden liegen, für alle vier Ecken dasselbe Verhältniss.

Es werde (Taf. II. Fig. 4.) das Seitenpaar AB, CD, welche Seiten sich in E kreuzen, in a und c geschnitten, so dass

$$\text{W. } E\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \text{W. } E\mathfrak{c}\mathfrak{a}.$$

Die Winkel $G\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ und $G\mathfrak{f}\mathfrak{e}$, unter welchen die zugeordneten S
BD und CA geschnitten werden, bestimmen sich mittelst
gleichen Peripheriewinkel BAC und BDC, so dass

$$\text{W. } G\mathfrak{e}\mathfrak{f} = \text{W. } B\mathfrak{a}\mathfrak{e} - \text{W. } BAC,$$
$$\text{W. } G\mathfrak{f}\mathfrak{e} = \text{W. } C\mathfrak{c}\mathfrak{e} - \text{W. } BDC,$$

sind also einander gleich. In ähnlicher Weise ist

$$\text{W. } F\mathfrak{d}\mathfrak{b} = \text{W. } B\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \text{W. } BAD,$$
$$\text{W. } F\mathfrak{b}\mathfrak{d} = \text{W. } C\mathfrak{c}\mathfrak{a} - \text{W. } DCF,$$

also auch W. $F\mathfrak{d}\mathfrak{b}$ = W. $F\mathfrak{b}\mathfrak{d}$, womit erwiesen ist, dass auc
anderen Seitenpaare unter gleichen Winkeln geschnitten wer
Die Gleichheit der Verhältnisse der abgeschnittenen Stücke
aus der Beschaffenheit der Dreiecke, deren Seiten sie sind, we
Dreiecke entweder in zwei Winkeln übereinstimmen oder in ei
dann aber ein Paar andere Winkel haben, die sich zu zwei r
ten ergänzen. In beiden Fällen haben die den betreffenden W
keln gegenüberliegenden Seiten gleiches Verhältniss. In den D
ecken $A\mathfrak{a}\mathfrak{e}$, $B\mathfrak{a}\mathfrak{f}$, $C\mathfrak{c}\mathfrak{e}$, $D\mathfrak{c}\mathfrak{f}$ ist

$$\begin{aligned} \text{W. } A\mathfrak{a}\mathfrak{e} &= 180^\circ - B\mathfrak{a}\mathfrak{f} \\ &= 180^\circ - C\mathfrak{c}\mathfrak{e} \\ &= D\mathfrak{c}\mathfrak{f}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{W. } A\mathfrak{e}\mathfrak{a} &= B\mathfrak{f}\mathfrak{a} \\ &= C\mathfrak{e}\mathfrak{c} \\ &= D\mathfrak{f}\mathfrak{c}, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} A\mathfrak{a} : A\mathfrak{e} &= B\mathfrak{a} : B\mathfrak{f} \\ &= C\mathfrak{c} : C\mathfrak{e} \\ &= D\mathfrak{c} : D\mathfrak{f}. \end{aligned}$$

In den Dreiecken $A\mathfrak{a}\mathfrak{d}$, $B\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $C\mathfrak{c}\mathfrak{b}$, $D\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ ist

$$\begin{aligned} \text{W. } A\mathfrak{a}\mathfrak{d} &= 180^\circ - B\mathfrak{a}\mathfrak{b} \\ &= C\mathfrak{c}\mathfrak{b} \\ &= 180^\circ - D\mathfrak{c}\mathfrak{d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{W. } A\mathfrak{d}\mathfrak{a} &= B\mathfrak{b}\mathfrak{a} \\ &= C\mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ &= D\mathfrak{d}\mathfrak{c}, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} A\mathfrak{a}:A\mathfrak{d} &= B\mathfrak{a}:B\mathfrak{b} \\ &= C\mathfrak{c}:C\mathfrak{b} \\ &= D\mathfrak{c}:D\mathfrak{d} \end{aligned}$$

und, zusammengezogen:

$$\begin{aligned} A\mathfrak{a}:A\mathfrak{e}:A\mathfrak{d} &= B\mathfrak{a}:B\mathfrak{f}:B\mathfrak{b} \\ &= C\mathfrak{c}:C\mathfrak{e}:C\mathfrak{b} \\ &= D\mathfrak{c}:D\mathfrak{f}:D\mathfrak{d}. \end{aligned}$$

Da die Linien, welche ein Kreisviereck in der verlangten Art schneiden, den Halbirungslinien der Winkel bei E, G, F parallel sein müssen, so folgt, dass es für jedes Viereck zwei Richtungen gibt, welche die Schneidende haben kann, während zugleich sich ergibt, dass die Halbirungslinien der durch die Paare zugeordneter Seiten eines Kreisvierecks gebildeten Winkel einander parallel sind.

Wenn zwei benachbarte Punkte, z. B. C und D, des Vierecks in einen zusammenfallen, so fallen auch AD und AC, BD und BC zusammen und CD geht in eine Tangente des Kreises über. Die Winkelbeziehungen des Vierecks aber erhalten sich und der Satz behält seine Gültigkeit: es gibt noch zwei Richtungen, in welchen zwei Seiten des Dreiecks sowohl, als die dritte Seite und die Tangente in dem gegenüberliegenden Punkte unter gleichen Winkeln und so geschnitten werden, dass von den Dreiecksecken proportionirte Stücke ausgehen. Denkt man sich CD als Tangente in C, so fällt $A\mathfrak{d}$ mit $A\mathfrak{e}$, $B\mathfrak{f}$ mit $B\mathfrak{b}$ zusammen und $C\mathfrak{e}$ und $C\mathfrak{b}$ sind einander gleich.

2. Die Anwendung auf Kreise ist einfach. Durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ ist ein Kreis bestimmt, der AB und CD in diesen Punkten berührt. Ebenso sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ die Berührungspunkte eines Kreises für die Linien AC und BD. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ die Berührungspunkte eines Kreises für die Linien AD und BC. Für diese Kreise sind $A\mathfrak{a}^2$, $A\mathfrak{e}^2$, $A\mathfrak{d}^2$ die Potenzen des Punktes A; $B\mathfrak{a}^2$, $B\mathfrak{f}^2$, $B\mathfrak{b}^2$ die Potenzen des Punktes B und so fort. Da nun die Verhältnisse dieser Potenzen einander gleich sind, so folgt aus §. 5., dass alle vier Punkte A, B, C, D einem Kreise angehören müssen, der durch die Durchschnittspunkte des ersten und zweiten sowohl, wie des zweiten und dritten, und des ersten und dritten jener drei Kreise geht; und da ein Kreis mit einem anderen nur zwei Punkte gemein haben kann, so folgt, dass die Durchschnittspunkte des durch A, B, C, D gehenden Kreises mit dem einen jener drei Kreise auch die mit den anderen sein müssen, oder dass alle vier Kreise

demselben Systeme angehören. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

1) Wenn ein Paar zugeordnete Seiten eines Kreisvierecks von einer Geraden unter gleichen Winkeln geschnitten werden, so sind die Durchschnittspunkte der Seitenpaare die Berührungspunkte der Seiten mit Kreisen, welche mit dem gegebenen Kreise zu demselben Systeme gehören.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks von einer Geraden unter gleichen Winkeln geschnitten werden, so wird auch die dritte Seite oder die Grundlinie mit der in der Spitze an den umschriebenen Kreis gelegten Tangente unter gleichen Winkeln geschnitten, und die Durchschnittspunkte sind die Berührungspunkte mit Kreisen, welche mit dem umschriebenen Kreise zu demselben Systeme gehören.

2) Legt man in den Durchschnittspunkten zweier Kreise mit einer Geraden Tangenten an dieselben, so liegen die vier Durchschnittspunkte je zweier, die nicht demselben Kreise angehören, auf einem Kreise des durch die gegebenen Kreise bestimmten Systems. Das dritte Seitenpaar des entstandenen Vierecks wird ebenfalls von einem Kreise des Systems berührt und die Berührungspunkte liegen auf der schneidenden Geraden.

Geht eine der Tangenten des einen Kreises durch den Treffpunkt der Tangenten des andern, so geht das Viereck in ein Dreieck über und die in Rede stehende Tangente berührt zugleich den dem Dreieck umschriebenen Kreis in der Dreiecksecke, durch welche sie geht.

3) Hat man drei Kreise K, K_1, K_2 eines Systems und legt von einem Punkte des Kreises K an K_1 und K_2 eine Tangente, so muss es auf dem Kreise K noch einen Punkt geben, von welchem an K_2 eine Tangente geht, die die an K_1 gelegte, und eine an K_1, die die an K_2 gelegte auf dem Kreise K schneidet. Die Berührungspunkte findet man mittelst der Verbindungslinie der Berührungspunkte der erstgelegten Tangenten.

4) Haben zwei Sehnen eines Kreises K eines Systems einen gemeinschaftlichen Berührungskreis und man vollendet das Viereck, von dem sie gegenüberstehende Seiten sind, so haben auch die anderen Seitenpaare gemeinschaftliche Berührungskreise, deren Berührungspunkte auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte der gegebenen Sehnen liegen. Haben die Sehnen einen gemeinschaftlichen Endpunkt, so tritt die Tangente in diesem an die Stelle der einen Vierecksseite und hat mit der Verbindungslinie

der andern Endpunkte der Sehnen einen gemeinschaftlichen Berührungskreis.

Anmerkung. Die analytische Geometrie beweist den in diesem Paragraphen für Kreise abgeleiteten Satz auf sehr elegante Weise für Kegelschnitte überhaupt. Es seien unter P, Q, R, S, T gerade Linien, unter den Symbolen $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$, $t=0$ ihre Gleichungen in Bezug auf irgend ein System von Parallelcoordinaten verstanden, und es mögen α, β irgend welche Constante bedeuten. Dann sind

$$pq.\alpha = t^2,$$
$$rs.\beta = t^2$$

die Gleichungen von Kegelschnitten, deren erster die Linien P, Q in ihren Durchschnittspunkten mit der Geraden T, deren zweiter die Linien R, S in ihren Durchschnittspunkten mit derselben Geraden T berührt. Durch Subtraction der beiden Gleichungen erhält man die Gleichung eines neuen Kegelschnitts, der durch die Durchschnittspunkte der beiden ersten geht. Diese Gleichung ist

$$pq.\alpha - rs.\beta = 0,$$

welche durch $p=0$ und $r=0$; $p=0$ und $s=0$; $q=0$ und $r=0$; $q=0$ und $s=0$ erfüllt ist, also einen Kegelschnitt bedeutet, auf dem sich die nicht demselben der ersten beiden Kegelschnitte angehörigen Tangenten P und R, P und S, Q und R, Q und S schneiden.

§. 7.

Die Berührungskreise eines gegebenen Kreisvierecks.

1. *Lehrsatz.* Wenn ein Kreisviereck $ABCD$ (Taf. II. Fig. 4.) gegeben ist und eine Gerade $\mathfrak{aefcdb}$, welche die zugeordneten Seiten unter gleichen Winkeln schneidet, bewegt sich parallel mit sich selbst, so bewegt sich die Potenzlinie der Kreise, welche die Seitenpaare des Vierecks in den Durchschnittspunkten mit der Geraden berühren, als Tangente einer Parabel.

Die Tangenten einer Parabel haben die Eigenschaft, dass irgend zwei derselben von den übrigen proportionirt geschnitten werden. Zu den Berührungskreisen der Linien AE und DE gehört auch der Punkt E. Die Potenzlinie desselben in Bezug auf den dem Viereck umschriebenen Kreis mit dem Mittelpunkte M, die man sich leicht ohne Zeichnung vorstellen kann, ist der Po-

lare FG dieses Punktes parallel, in der halben Entfernung von E, oder sie ist die Halbirungslinie der Seiten GE, EF des Dreiecks EGF; sie möge durch p bezeichnet werden. Es sei ferner $M\varepsilon'$ eine Senkrechte vom Mittelpunkte M auf die Halbirungslinie des Winkels AED und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$ die Berührungspunkte des Kreises, der ε' zum Mittelpunkte hat. Die in der Figur nicht gezeichnete Potenzlinie dieses Kreises mit dem Kreise um M sei durch p' bezeichnet. Die Potenzlinien, welche die Kreise um ε, ε_1,...., deren Berührungspunkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}_1$,.... seien, mit dem Kreise um M erzeugen, mögen p in den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$,.... und p' in den Punkten $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$,.... schneiden. Da nun die Potenzlinien dreier Kreise denselben Durchschnittspunkt haben, so muss die Potenzlinie des Punktes E mit dem Kreise um ε durch $\mathfrak{p}$, mit dem Kreise um ε_1 durch $\mathfrak{p}_1$,.... gehen. Diese Potenzlinien sind einander parallel, nämlich senkrecht auf der Centrallinie $E\varepsilon\varepsilon_1$...., und halbiren die von E an die Kreise gehenden Tangenten $E\mathfrak{a}$ und $E\mathfrak{c}$, $E\mathfrak{a}_1$ und $E\mathfrak{c}_1$, und so fort. Das zwischen den beiden ersten derselben liegende Stück der Linie $E\mathfrak{a}$ ist gleich

$$\tfrac{1}{2}E\mathfrak{a}_1 - \tfrac{1}{2}E\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}.$$

Da durch ein System von Parallelen irgend zwei Gerade proportionirt geschnitten werden, so verhält sich:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}\mathfrak{p}_2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a} : \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}$$
$$= \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2.$$

Durch die Punkte $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$,.... der Linie p' müssen die Potenzlinien des Kreises um ε', der an die Stelle des Punktes E tritt, mit den Kreisen um ε, ε_1,.... gehen. Diese Potenzlinien sind ebenfalls einander parallel und halbiren die Strecken $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1$,...., so dass das zwischen den beiden ersten enthaltene Stück der $E\mathfrak{a}$ gleich ist

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}'\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$$

und sich verhält

$$\mathfrak{p}'\mathfrak{p}_1' : \mathfrak{p}'\mathfrak{p}_2' = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}\mathfrak{a}_2,$$

also

$$\mathfrak{p}'\mathfrak{p}_1' : \mathfrak{p}'\mathfrak{p}_2' = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}\mathfrak{p}_2,$$

so dass für die Potenzlinien p, p' und die Potenzlinien der übrigen Berührungskreise der Linien AB, CD, mit dem Kreise um M, die oben für die Tangenten einer Parabel aufgestellte Bedingung erfüllt ist.

Zu diesen Tangenten gehören, so gut wie die Halbirungslinie der Dreiecksseiten GE, EF, auch die Halbirungslinien der Seiten FG, FE und GE, GF. Wenn also die drei Punkte E, F, G gegeben sind, so stehen für die Parabel drei, oder wenn man die unendlich entfernte Gerade, welche für jede Parabel Tangente ist, mit hinzu zählt, vier Tangenten fest. Die drei Punkte E, F, G bestimmen den Kreis, in welchem das Viereck liegt. Denn da jede Seite des Dreiecks EFG Polare der gegenüberliegenden Ecke ist und die Verbindungslinie des Pols mit dem Mittelpunkte auf der Polare senkrecht steht, so ist M der gemeinschaftliche Durchschnitt der Höhenperpendikel des Dreiecks. Da die Polaren die Berührungssehnen der Pole sind, so findet man die Durchschnittspunkte der Seiten GE, FG, FE mit dem Kreise M durch Kreise, welche MF, ME, MG zu Durchmessern haben. Ist der Kreis construirt, so kann man eine Seite des Vierecks beliebig durch den zugehörigen Punkt legen, z. B. AB durch E, und das Viereck vollendet sich in der erforderlichen Weise, da E, F, G zugeordnete Pole in Bezug auf den construirten Kreis sind. Es ist also ausser den Punkten E, F, G noch eine Bedingung oder Bestimmung zur Vollendung der Figur nothwendig. Wählt man dazu die Richtung einer der Halbirungslinien der bei E, F oder G entstehenden Winkel AED u. s. f., so müssen EA und ED so gezogen werden, dass sie zugleich mit EG, EF und mit $E\varepsilon$ und der in E auf ihr senkrecht stehenden Geraden harmonisch sind: eine Construction, deren Ausführung keine Schwierigkeit hat.

Eine Potenzlinie oder eine Tangente der in Rede stehenden Parabel, wird nur dann senkrecht auf $E\varepsilon$ oder parallel mit $M\varepsilon'$, wenn der sie erzeugende Kreis seinen Mittelpunkt ε im Unendlichen hat, da nur für diesen Fall die Verbindungslinie der Mittelpunkte $M\varepsilon$ als parallel mit $E\varepsilon$ zu betrachten ist. Dann aber liegt die Potenzlinie oder Tangente der Parabel selbst in unendlicher Entfernung, was nur für die der Axe parallelen Tangenten der Fall ist, und es folgt, dass $M\varepsilon'$ der Axe der Parabel parallel ist. Auf dieser Axe müssen sich solche Tangenten schneiden, welche mit derselben oder mit der ihr parallelen $M\varepsilon'$ gleiche Winkel bilden. Zwei solche Tangenten oder Potenzlinien, die mit $M\varepsilon'$ gleiche Winkel bilden, sind, da sie auf den Verbindungslinien der Mittelpunkte ihrer erzeugenden Kreise mit M senkrecht stehen, nur möglich, wenn diese Verbindungslinien selbst mit $M\varepsilon'$ gleiche Winkel bilden oder wenn die auf $E\varepsilon'$ liegenden Mittelpunkte in gleicher Entfernung von ε' sich befinden. Der Durchschnitt der durch zwei solche Kreise mit dem Kreise um M erzeugten Potenzlinien ist ein Punkt der Axe. Durch denselben geht auch die Potenzlinie der beiden Kreise selbst; diese halbirt die Strecken

zwischen den Berührungspunkten der Kreise mit AE und DE und ist daher keine andere als die Linie $\alpha'\iota'$, die Verbindungslinie der Berührungspunkte α', ι' des Kreises um ε', wie auch die beiden Kreise liegen mögen; und da nun ausserdem $\alpha'\iota'$ die Richtung der Axe der Parabel hat, so ist sie diese Axe selbst.

2. Ich will jetzt die metrischen Relationen der Taf. II. Fig. 4. aus den zu Grunde gelegten Stücken des Dreiecks EFG entwickeln, theils um der Sache selbst willen, theils weil sich daraus ein Beweis des im Eingange erwähnten Satzes ergeben wird. Zur Bezeichnung der Winkel heisse die Linie ME, i, die MG, h, die MF, k; die Gerade $M\varepsilon\gamma\varphi$, welche die Mittelpunkte ε, γ, φ der die Seitenpaare des Vierecks berührenden, zu derselben Potenzlinie gehörenden Kreise enthält, heisse m; die durch M parallel mit $E\varepsilon$, $G\gamma$, $F\varphi$ gezogene heisse n. Dann ist bekanntlich

$$\begin{aligned} &\text{W. } ih = GFE, \\ &\text{W. } hk = GEF, \\ &\text{W. } ik = 180^0 - FGE. \end{aligned}$$

Es sei ferner $GE=f$, $EF=g$, $GF=e$, und der Radius des dem Dreieck EGF umschriebenen Kreises $=\varrho$; dann ist

$$\frac{f}{\sin hi} = \frac{e}{\sin hk} = \frac{g}{\sin ki} = 2\varrho.$$

Sind H, J, K die Fusspunkte der von G, E, F auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel, so ist $GK = GF.\cos ki$, also $GM = e \cdot \frac{\cos ki}{\sin hk} = 2\varrho.\cos ki$, und für die Entfernungen des Mittelpunkts von den andern Dreiecksecken ergeben sich ähnliche Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} GM &= 2\varrho.\cos ki, \\ FM &= 2\varrho.\cos hi, \\ EM &= 2\varrho.\cos kh. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Der Radius r des Kreises um M ist nach der Construction in Nr. 1. dieses Paragraphen die mittlere Proportionale zwischen MF und MK, oder MG und MH, oder MJ und ME, also da $MK = MG.\cos hk$:

$$r^2 = 4\varrho^2.\cos ki.\cos hi.\cos hk. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Für die Winkel, unter denen sich die zugeordneten Vierecksseiten schneiden, hat man, da EA, EG, ED, EF harmonisch sind,

$$\sin AEG : \sin DEG = \sin AEF : \sin DEF$$

r

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(AEG+DEG):\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(AEG-DEG)$$
$$=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(AEF+DEF):\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(AEF-DEF),$$

r

$$\operatorname{tg} AE\varepsilon^2=\operatorname{tg} GE\varepsilon . \operatorname{tg} FE\varepsilon,$$

da, unter ni u. s. w. die spitzen Winkel verstanden, $GE\varepsilon$ mit $FE\varepsilon$ mit nh einen Rechten ausmacht, so ist, die Winkel bei F, G mit $2E$, $2F$, $2G$ bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} E^2 &= \operatorname{tg} AE\varepsilon^2 = \operatorname{tg} DE\varepsilon^2 = \operatorname{cotg} nk . \operatorname{cotg} nh,\\ \operatorname{tg} G^2 &= \operatorname{tg} AG\gamma^2 = \operatorname{tg} DG\gamma^2 = \operatorname{cotg} ni . \operatorname{cotg} nk,\\ \operatorname{tg} F^2 &= \operatorname{tg} . AF\varphi^2 = \operatorname{tg} BF\varphi^2 = \operatorname{cotg} ni . \operatorname{cotg} nh.\end{aligned}\right\} . \quad (3)$$

dem Dreiecke AGE findet man:

$$\begin{aligned}AE &= GE . \frac{\sin AGE}{\sin EAG}\\ &= GE \frac{\sin AGK}{\sin (AGK-AEK)}\\ &= f . \frac{\sin (G+90^0-nk)}{\sin (G-E)}.\end{aligned}$$

dem Dreiecke εME:

$$\begin{aligned}E\varepsilon &= ME . \frac{\sin \varepsilon ME}{\sin M\varepsilon E}\\ &= 2\varrho . \frac{\cos kh . \sin mi}{\sin mn},\end{aligned}$$

er

$$\begin{aligned}Ea &= E\varepsilon . \cos E\\ &= 2\varrho . \frac{\cos kh . \sin mi . \cos E}{\sin mn}\end{aligned}$$

$$Aa = f . \frac{\sin (G+90^0-nk)}{\sin (G-E)} - 2\varrho \frac{\cos kh . \sin mi . \cos E}{\sin mn}.$$

ser Ausdruck lässt nicht sogleich erkennen, dass

$$Aa . \sin Aab = Ae . \sin Aeb = Ab . \sin Aba$$

$$A\mathfrak{a}\,.\cos E = A\mathfrak{e}\,.\cos G = A\mathfrak{d}\,.\cos F,$$

wie es durch den blossen Anblick der Figur als nothwendig zeigt. Aus den Gleichungen bei (3) aber findet man durch zuaddirung von 1 und weitere Verwandlung:

$$\sin E = \sqrt{\frac{\cos nk \cos nh}{\cos kh}},$$

$$\cos E = \sqrt{\frac{\sin nk \sin nh}{\cos kh}},$$

$$\sin G = \sqrt{\frac{\cos ni \cos nk}{\cos ki}},$$

$$\cos G = \sqrt{\frac{\sin ni \sin nk}{\cos ki}};$$

folglich

$$\sin(G + 90^0 - nk) = \cos(G - nk)$$

$$= \sqrt{\frac{\sin nk \cos nk}{\cos ik}}\,.(\sqrt{\sin ni \cos nk} + \sqrt{\sin nk \cos}$$

$$\sin(G - E) = \sqrt{\frac{\sin nk \cos nk}{\cos ik \cos kh}}(\sqrt{\sin nh \cos ni} - \sqrt{\sin ni \cos nh})$$

$$\frac{\cos(G - nk)}{\sin(G - E)} = \sqrt{\cos kh}\,\frac{\sqrt{\sin ni \cos nk} + \sqrt{\sin nk \cos ni}}{\sqrt{\sin nh \cos ni} - \sqrt{\sin ni \cos nh}};$$

und wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{\sin nh \cos ni} + \sqrt{\sin ni c}$ multiplicirt und bedenkt, dass dann der Nenner sich in s verwandelt, und dass $\frac{f}{\sin hi} = 2\varrho$:

$$f.\cos E.\frac{\cos(G-nk)}{\sin(G-E)}=2\varrho.\sqrt{\sin nk.\sin nh}(\sqrt{\sin ni \cos nk}+\sqrt{\sin nk \cos ni})(\sqrt{\sin nh \cos ni}+\sqrt{\sin ni \cos nh})$$

$$=2\varrho.\sin nk.\sin nh.\sin ni(\sqrt{\cot ni}+\sqrt{\cot nk})(\sqrt{\cot ni}+\sqrt{\cot nh}).$$

Setzt man

$$\frac{\sin mi}{\sin mn}=\frac{\sin(mn+ni)}{\sin mn}$$

$$=\cos ni+\sin ni.\cot mn,$$

so wird

$$\frac{\cos kh.\sin mi.\cos E^2}{\sin mn}=\sin nh.\sin nk(\cos ni+\sin ni \cot mn),$$

und da

$$\sin ni(\sqrt{\cot ni}+\sqrt{\cot nk})(\sqrt{\cot ni}+\sqrt{\cot nh})-\cos ni=\sin ni(\sqrt{\cot ni.\cot nk}+\sqrt{\cot ni.\cot nh}+\sqrt{\cot nk.\cot nh})$$

und mittelst der Gleichungen bei (3)

$$=\sin ni(\operatorname{tg}E+\operatorname{tg}F+\operatorname{tg}G),$$

so hat man endlich

$$Aa.\cos E=Ae.\cos G=Ab.\cos F=2\varrho.\sin nk.\sin nh.\sin ni(\operatorname{tg}E+\operatorname{tg}F+\operatorname{tg}G-\cot mn). \quad . \quad . \quad (4)$$

In ähnlicher Weise findet man:

$$Ba.\cos E = Bf.\cos G = Bb.\cos F$$
$$= 2\varrho \sin nk.\sin nh.\sin ni(-\mathrm{tg}\, E + \mathrm{tg}\, G + \mathrm{tg}\, F + \cot mn),$$

$$Dc.\cos E = Df.\cos G = Dd.\cos F$$
$$= 2\varrho \sin nk.\sin nh.\sin ni(-\mathrm{tg}\, E - \mathrm{tg}\, G + \mathrm{tg}\, F - \cot mn),$$

$$Cc.\cos E = Ce.\cos G = Cb.\cos F$$
$$= 2\varrho \sin nk.\sin nh.\sin ni(\mathrm{tg}\, E - \mathrm{tg}\, G + \mathrm{tg}\, F + \cot mn).$$

Diese vier Formeln sind in eine

$$2\varrho \sin nk.\sin nh.\sin ni(\mathrm{tg}\, E + \mathrm{tg}\, F + \mathrm{tg}\, G + \cot mn)$$

zusammenzufassen, wenn man die Winkel in der Richtung von Ml nach ME, MG, MF, $M\varepsilon$ hin und die Winkel F, E, G in derselben Richtung, von $F\varphi$, $G\gamma$, $E\varepsilon$ aus, rechnet, und eine Strecke wie Ba als negativ betrachtet.

Für die in den früheren Paragraphen mit q_1, q_2, q_3 bezeichneten Mittelpunktsentfernungen $M\varepsilon$, $M\gamma$, $M\varphi$ findet man:

$$M\varepsilon = ME.\frac{\sin ME\varepsilon}{\sin M\varepsilon E} = 2\varrho.\frac{\cos hk.\sin ni}{\sin mn}$$

und

$$\left.\begin{aligned} M\varepsilon.\cos E^2 &= 2\varrho.\frac{\sin nh.\sin nk.\sin ni}{\sin mn}, \\ M\gamma.\cos G^2 &= 2\varrho.\frac{\sin nh.\sin nk.\sin ni}{\sin mn}, \\ M\varphi.\cos F^2 &= 2\varrho.\frac{\sin nh.\sin nk.\sin ni}{\sin mn}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

und da, wenn x die Entfernung des Punktes A von der Potenzlinie bedeutet, $Aa^2 = 2x.M\varepsilon$, so ist

$$x = \varrho.\sin nh.\sin nk.\sin ni.\sin mn(\mathrm{tg}\, E + \mathrm{tg}\, F + \mathrm{tg}\, G - \cot mn). \quad (6)$$

Für die Radien $r_1 = \varepsilon a$, $r_2 = \gamma c$, $r_3 = \varphi d$ ergibt sich:

$$r_1 = 2\varrho.\frac{\cos kh.\sin mi}{\sin mn}.\sin E,$$

$$r_2 = 2\varrho.\frac{\cos ki.\sin mh}{\sin mn}.\sin G,$$

$$r_3 = 2\varrho.\frac{\cos hi.\sin mk}{\sin mn}.\sin F.$$

Bestimmt man zwischen A und D einen Punkt $\mathfrak{d}'$, welcher der $\mathfrak{d}$ zugeordnete harmonische Punkt ist zu A und D, und construirt den zum System gehörenden Kreis, der AD in $\mathfrak{d}'$ berührt, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt des in $\mathfrak{d}'$ auf AD errichteten Perpendikels mit $M\varepsilon$ ist, so bildet dieser mit den Kreisen um ε und γ drei solche Kreise für das Dreieck ABD, wie sie der im Eingange angeführte Satz verlangt. Es ist dann

$$A\mathfrak{d}' : D\mathfrak{d}' = A\mathfrak{d} : D\mathfrak{d},$$

$$A\mathfrak{d}' = \frac{AD \, . \, A\mathfrak{d}}{A\mathfrak{d} + D\mathfrak{d}}$$

$$= A\mathfrak{d} \, . \, \frac{A\mathfrak{d} - D\mathfrak{d}}{A\mathfrak{d} + D\mathfrak{d}}$$

$$= 2\varrho . \sin ni . \sin nk . \sin nh \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} F + \operatorname{tg} G - \cot mn}{\cos F} . \frac{2 \operatorname{tg} E + 2 \operatorname{tg} G}{2 \operatorname{tg} F - 2 \cot mn}.$$

Zwischen den Grössen $A\alpha$, Ae, $A\mathfrak{d}'$ findet aber eine nur von den Radien und Mittelpunktsentfernungen abhängige Beziehung statt; nämlich es ist

$$r_1 . \frac{A\mathfrak{d}'}{A\alpha} - r_2 . \frac{A\mathfrak{d}'}{Ae} = r\left(\frac{Ae}{A\alpha} - \frac{A\alpha}{Ae}\right),$$

denn

$$r_1 . \frac{A\mathfrak{d}'}{A\alpha} = 2\varrho . \frac{\cos kh . \sin mi}{\sin mn} . \sin E . \frac{\cos E}{\cos F} . \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G}{\operatorname{tg} F - \cot mn},$$

$$r_2 . \frac{A\mathfrak{d}'}{Ae} = 2\varrho . \frac{\cos ki . \sin mh}{\sin mn} . \sin G . \frac{\cos G}{\cos F} . \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G}{\operatorname{tg} F - \cot mn},$$

$$r_1 \cdot \frac{A\mathfrak{d}'}{A\mathfrak{a}} - r_2 \cdot \frac{A\mathfrak{d}'}{A\mathfrak{e}} = 2\varrho \cdot \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G}{\sin F - \cot mn . \cos F}\left(\cos kh . \sin E \cos E \cdot \frac{\sin mi}{\sin mn} - \cos ki . \sin G \cos G \cdot \frac{\sin mh}{\sin mn}\right)$$

$$= 2\varrho \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G}{\sin F - \cot mn . \cos F}(\cos kh . \sin E \cos E . \cos ni + \cos kh . \sin E \cos E . \sin ni \cot mn - \cos ki . \sin G \cos G . \cos nh$$
$$- \cos ki . \sin G \cos G . \sin nh \cot mn)$$

$$= 2\varrho \cdot \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G}{\sin F - \cot nm . \cos F} \cdot (\sqrt{\sin nk . \cos nk . \sin nh . \cos nh} . \cos ni$$
$$- \sqrt{\sin nk \cos nk . \sin ni \cos ni} . \cos nh - \cot mn (\sqrt{\sin nk \cos nk . \sin ni \cos ni} . \sin nh - \sqrt{\sin nk \cos nk . \sin nh \cos nh} . \sin ni))$$

$$= 2\varrho \cdot \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G}{\sin F - \cot mn . \cos F}(\sqrt{\cos ni . \cos nh}(\sqrt{\sin nh . \cos ni} - \sqrt{\sin ni \cos nh})$$
$$- \cot mn . \sqrt{\sin ni \sin nh}(\sqrt{\sin nh . \cos ni} - \sqrt{\sin ni . \cos nh})) \sqrt{\sin nk . \cos nk}$$

$$= 2\varrho \cdot \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G}{\sin F - \cot mn . \cos F}(\sqrt{\cos ni . \cos nh} - \cot mn \sqrt{\sin ni . \sin nh}) . (\sqrt{\sin nh . \cos ni} - \sqrt{\sin ni . \cos nh}) \sqrt{\sin nk . \cos nk}$$

$$= 2\varrho \cdot \frac{\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G}{\sin F - \cot mn . \cos F} \cdot \sqrt{\cos hi . \cos hk . \cos ik} . (\sin F - \cot mn . \cos F) . (\sin G \cos E - \cos G \sin E)$$

$$= 2\varrho . (\operatorname{tg} E + \operatorname{tg} G)(\sin G \cos E - \cos G \sin E) \sqrt{\cos hi . \cos hk . \cos ik}$$

$$= 2\varrho . \left(\sin G^2 . \frac{\cos E}{\cos G} - \sin E^2 . \frac{\cos G}{\cos E}\right) \sqrt{\cos hi . \cos hk . \cos ik} = r . \left(\frac{\cos E}{\cos G} - \frac{\cos G}{\cos E}\right) = r . \left(\frac{A\mathfrak{e}}{A\mathfrak{a}} - \frac{A\mathfrak{a}}{A\mathfrak{e}}\right).$$

Nennt man φ' den Mittelpunkt des Kreises, der AD in $\mathfrak{d}'$ berührt, und setzt $M\varphi' = q'$, so ist

$$A\mathfrak{a} = \sqrt{2q_1x}, \quad A\mathfrak{c} = \sqrt{2q_2x}, \quad A\mathfrak{d}' = \sqrt{2q'x}.$$

Man hat demnach

$$r_1\sqrt{\frac{q'}{q_1}} - r_2\sqrt{\frac{q'}{q_2}} = r\left(\frac{q_2}{q_1} - \frac{q_1}{q_2}\right)$$

oder eine von der besondern Lage des Punktes A unabhängige Relation zwischen den Constanten der Berührungskreise des Dreiecks, womit erwiesen ist, dass der dritte derselbe bleibt, so lange die beiden ersten dieselben bleiben.

§. 8.

Berührungskreise eines gegebenen Dreiecks.

1. Werden die Seiten eines Dreiecks von Kreisen berührt, welche mit dem umschriebenen Kreise zu demselben Systeme gehören, so ist die Lage der Berührungspunkte durch §. 4. 3. bestimmt: die sechs Berührungspunkte liegen je drei auf einer von vier geraden Linien. Durch eine dieser Linien sind nicht allein die drei anderen, sondern ist auch das System der zugehörigen Kreise unzweideutig bestimmt. Ist z. B. die Linie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}$ für das Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 5.) gegeben, so gibt es von B aus nur eine Linie, die mit AC in Bezug auf $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}$ antiparallel ist, und durch diese Linie ist das Viereck des vorigen Paragraphen, und somit das System der Kreise bestimmt.

Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ die Berührungspunkte auf BC; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ auf AC; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ auf AB; es sei ferner G ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und es seien die Verbindungslinien dieses Punktes mit den Ecken des Dreiecks, AG von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}$, der andern von $\mathfrak{a}$ ausgehenden Linie der Berührungspunkte, BG von $\mathfrak{b}\mathfrak{a}'$, CG von $\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'$, in den Punkten K, J, H geschnitten. Da nun $\mathfrak{c}$, A, $\mathfrak{c}'$, B harmonische Punkte sind, also $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}A$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}B$ harmonische Strahlen, so sind auch K, A, G und der Durchschnittspunkt D von BC mit AG harmonische Punkte, und es folgt, dass K ein fester Punkt ist, so lange G derselbe bleibt. Dasselbe gilt für die Punkte H und J, und es folgt daher, dass, wenn eine der Geraden, auf denen die Berührungspunkte liegen, sich um einen festen Punkt dreht, dieses auch für die drei andern der Fall ist. Geht man vom Punkte G aus, so sind E, G, B, J so gut wie A, G, D, K harmonisch, woraus folgt, dass J und K mit C auf gerader Linie liegen; durch

Fortsetzung dieser Betrachtung findet man, dass die drei Paar Geraden, welche die vier Punkte enthalten, sich in den Ecken des Dreiecks kreuzen und mit den Dreiecksseiten harmonische Strahlen bilden. Die Punkte, in denen sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Dreiecksecken schneiden, z. B. der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der Linien $A\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}'$, $C\mathfrak{c}'$, bewegen sich auf Kegelschnitten, welche durch die Dreiecksecken gehen, was sehr einfach aus der projectivischen Beziehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ folgt, in denen die Dreiecksseiten von den Strahlen der Punkte K, G, H geschnitten werden. Zugleich folgt, dass GK, KH, HG Tangenten dieses Kegelschnitts in den Punkten A, B, C sind; denn z. B. dem Punkte D auf BC entspricht der Punkt A auf AC und daher dem Strahle AD für den Punkt A, der Strahl BA für den Punkt B. Der Durchschnittspunkt von $A\mathfrak{a}'$, $B\mathfrak{b}$, $C\mathfrak{c}'$ bewegt sich auf einem zweiten Kegelschnitte durch A, B, C, für den HG, GJ, JH; der von $A\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $C\mathfrak{c}$ auf einem dritten, für den GJ, JK, KG; der von $A\mathfrak{a}'$, $B\mathfrak{b}'$, $C\mathfrak{c}$ auf einem vierten, für den HJ, HK, KJ Tangenten sind. Es ist nicht meine Absicht, hier näher auf diese Systeme von Kegelschnitten einzugehen, und ich kehre zur Potenzlinie der Kreise zurück, um zu untersuchen, wie dieselbe sich bewegt, wenn die Punkte G, H, J, K für die Linien feststehen, auf denen die Berührungspunkte liegen. Durch Halbirung der von den Verbindungslinien der vier Punkte auf den Dreiecksseiten abgeschnittenen Strecken DD', EE', FF' in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ findet man sogleich die Potenzlinien $A\mathfrak{d}$, $B\mathfrak{e}$, $C\mathfrak{f}$ für die Berührungspunkte A und D, oder D'; B und E, oder E'; C und F, oder F'; eine vierte ist durch die Mitten α, β, γ der Strecken $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ bestimmt. Aus der Beziehung zwischen den Strecken, welche die beiden letzten dieser Potenzlinien auf den beiden ersten abschneiden, ergibt sich, dass dieselben Tangenten eines Kegelschnitts sind, der durch A, B, C geht.

Man kann sich hiervon auf folgende Weise überzeugen. $A\mathfrak{d}$ und $B\mathfrak{e}$ schneiden einander in $\mathfrak{r}$ und werden von $\alpha\beta\gamma$ in $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{p}_1$ geschnitten. Für das Dreieck $A\mathfrak{d}C$ und die Transversale $\alpha\beta\mathfrak{q}_1$ ergibt sich:

$$\mathfrak{d}\mathfrak{q}_1 . A\beta . C\alpha = A\mathfrak{q}_1 . \mathfrak{d}\alpha . C\beta,$$

$$\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{q}_1}{A\mathfrak{q}_1} = \frac{\mathfrak{d}\alpha . C\beta}{A\beta . C\alpha},$$

$$\frac{\mathfrak{d}A}{A\mathfrak{q}_1} = \frac{\mathfrak{d}\alpha . C\beta - A\beta . C\alpha}{A\beta . C\alpha};$$

und wegen der Transversale $\mathfrak{e}\mathfrak{r}B$:

$$A\mathfrak{r}.\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e}=CB.\mathfrak{d}\mathfrak{r}.A\mathfrak{e},$$

$$\frac{A\mathfrak{r}}{\mathfrak{d}\mathfrak{r}}=\frac{CB.A\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e}},$$

$$\frac{\mathfrak{d}A}{A\mathfrak{r}}=\frac{CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e}}{CB.A\mathfrak{e}};$$

folglich

$$\frac{A\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1A}=\frac{CB.A\mathfrak{e}(\mathfrak{d}\alpha.C\beta-A\beta.C\alpha)}{A\beta.C\alpha(CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e})},$$

$$\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1A}=\frac{CB.A\mathfrak{e}(\mathfrak{d}\alpha.C\beta-A\beta.C\alpha)+A\beta.C\alpha(CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e})}{A\beta.C\alpha(CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e})}$$

$$=\frac{CB.A\mathfrak{e}.\mathfrak{d}\alpha.C\beta+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e}.A\beta.C\alpha}{A\beta.C\alpha(CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e})},$$

und da nach der bekannten Beziehung zwischen vier auf einer Geraden liegenden Punkten

$$\alpha\mathfrak{d}.BC=C\mathfrak{d}.B\alpha-B\mathfrak{d}.C\alpha,$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1A}=\frac{\alpha B.\beta C.\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A+\mathfrak{d}B.\alpha C.\mathfrak{e}C.\beta A-\mathfrak{d}B.\alpha C.\mathfrak{e}A.\beta C}{\beta A.\alpha C(CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e})}.$$

In ähnlicher Weise findet man aus dem Dreiecke $B\mathfrak{e}C$ und den Transversalen $\alpha\mathfrak{p}_1\beta$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{r}A$:

$$\frac{\mathfrak{p}_1B}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}=\frac{\beta C.\alpha B(CA.\mathfrak{d}B+\mathfrak{e}A.\mathfrak{d}C)}{\alpha B.\beta C.\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A+\mathfrak{d}B.\alpha C.\mathfrak{e}C.\beta A-\mathfrak{d}B.\alpha C.\mathfrak{e}A.\beta C},$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1A}:\frac{\mathfrak{p}_1B}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}=\frac{(\alpha B.\beta C.\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A+\mathfrak{d}B.\alpha C.\mathfrak{e}C.\beta A-\mathfrak{d}B.\alpha C.\mathfrak{e}A.\beta C)^2}{\beta A.\alpha C.\beta C.\alpha B(CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e})(CA.\mathfrak{d}B+\mathfrak{e}A.\mathfrak{d}C)}$$

$$=\frac{(\alpha B.\beta C.\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A+\mathfrak{d}B.\alpha C.\mathfrak{e}C.\beta A-\mathfrak{d}B.\alpha C.\mathfrak{e}A.\beta C)^2}{\beta A.\alpha C.\beta C.\alpha B(CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e})^2},$$

da auch

$$CB.A\mathfrak{e}+\mathfrak{d}B.C\mathfrak{e}=CA.\mathfrak{d}B+\mathfrak{e}A.\mathfrak{d}C;$$

und wenn man $C\mathfrak{d}-B\mathfrak{d}$ für CB setzt und Zähler und Nenner durch $(\sqrt{\beta A.\alpha C.\beta C.\alpha B.\mathfrak{d}B.\mathfrak{e}C.\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A})^2$ dividirt:

$$\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1A}:\frac{\mathfrak{p}_1B}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{\frac{\alpha B.\beta C}{\beta A.\alpha C}\cdot\frac{\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A}{\mathfrak{d}B.\mathfrak{e}C}}+\sqrt{\frac{\alpha C.\beta A}{\beta C.\alpha B}\cdot\frac{\mathfrak{d}B.\mathfrak{e}C}{\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A}}-\sqrt{\frac{\alpha C.\beta C}{\beta A.\alpha B}\cdot\frac{\mathfrak{e}A.\mathfrak{d}B}{\mathfrak{e}C.\mathfrak{d}C}}}{\sqrt{\frac{\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A}{\mathfrak{d}B.\mathfrak{e}C}}-\sqrt{\frac{\mathfrak{d}B.\mathfrak{e}A}{\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}C}}+\sqrt{\frac{\mathfrak{d}B.\mathfrak{e}C}{\mathfrak{d}C.\mathfrak{e}A}}}\right\}^2.$$

Nun ist wegen der harmonischen Lage der Punkte (vergl. §. 4. 2.):

$$\frac{\mathfrak{d}B}{\mathfrak{d}C}=\frac{BD^2}{CD^2},$$

$$\frac{\mathfrak{e}C}{\mathfrak{e}A}=\frac{CE^2}{AE^2},$$

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}=\frac{B\mathfrak{a}^2}{C\mathfrak{a}^2},$$

$$\frac{\beta C}{\beta A}=\frac{C\mathfrak{b}^2}{A\mathfrak{b}^2};$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1 A}:\frac{\mathfrak{p}_1 B}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}$$

$$=\left\{\frac{\frac{B\mathfrak{a}}{C\mathfrak{a}}\cdot\frac{C\mathfrak{b}}{A\mathfrak{b}}\cdot\frac{CD}{BD}\cdot\frac{AE}{CE}+\frac{C\mathfrak{a}}{C\mathfrak{b}}\cdot\frac{A\mathfrak{b}}{B\mathfrak{a}}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}-\frac{C\mathfrak{a}}{B\mathfrak{a}}\cdot\frac{C\mathfrak{b}}{A\mathfrak{b}}\cdot\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BD}{CD}}{\frac{CD}{BD}\cdot\frac{AE}{CE}+\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}-\frac{BD}{CD}\cdot\frac{AE}{CE}}\right\}^2.$$

Weil die Geraden CA, CB durch die Strahlen des Punktes G in gleichen Doppelverhältnissen geschnitten werden, ist

$$\frac{B\mathfrak{a}}{C\mathfrak{a}}:\frac{BD}{CD}=\frac{E\mathfrak{b}}{C\mathfrak{b}}:\frac{EA}{CA},$$

folglich

$$\frac{B\mathfrak{a}}{C\mathfrak{a}}\cdot\frac{C\mathfrak{b}}{A\mathfrak{b}}\cdot\frac{CD}{BD}\cdot\frac{AE}{CE}=\frac{E\mathfrak{b}.CA}{A\mathfrak{b}.CE},$$

$$\frac{C\mathfrak{a}}{B\mathfrak{a}}\cdot\frac{A\mathfrak{b}}{C\mathfrak{b}}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{A\mathfrak{b}.CE}{E\mathfrak{b}.AC},$$

$$\frac{C\mathfrak{a}.C\mathfrak{b}.AE.BD}{B\mathfrak{a}.A\mathfrak{b}.CE.CD}=\frac{C\mathfrak{b}^2.AE^2}{CE.AC.A\mathfrak{b}.E\mathfrak{b}},$$

und da

$$C\mathfrak{b}.AE=CA.E\mathfrak{b}-CE.A\mathfrak{b},$$

so ist

$$\frac{C\mathfrak{a}.C\mathfrak{b}.AE.BD}{B\mathfrak{a}.A\mathfrak{b}.CE.CD}=\frac{CA.E\mathfrak{b}}{CE.A\mathfrak{b}}+\frac{CE.A\mathfrak{b}}{AC.E\mathfrak{b}}-2,$$

wodurch sich der obige Ausdruck reducirt auf

$$\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1 A}:\frac{\mathfrak{p}_1 B}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}}=\left\{\frac{2}{\frac{CD}{BD}\cdot\frac{AE}{CE}+\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}-\frac{BD}{CD}\cdot\frac{AE}{CE}}\right\}^2,$$

welcher Ausdruck unabhängig von $\mathfrak{a}$ oder von $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{p}_1$ ist, so dass für eine zweite Linie von der Art wie $\alpha\beta\gamma$, deren Einschnitte in $B\mathfrak{e}$ und $A\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2$ bezeichnet seien,

$$\frac{\mathfrak{q}_2\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_2A}:\frac{\mathfrak{p}_2B}{\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}}=\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1A}:\frac{\mathfrak{p}_1B}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}},$$

$$\frac{\mathfrak{q}_2\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_2A}:\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}_1A}=\frac{\mathfrak{p}_2B}{\mathfrak{p}_2\mathfrak{r}}:\frac{\mathfrak{p}_1B}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{r}},$$

so dass $B\mathfrak{e}$ und $A\mathfrak{d}$ von den Potenzlinien $\alpha\beta\gamma$ projectivisch geschnitten werden, und zwar so, dass dem gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{r}$ die Punkte A und B entsprechen, woraus folgt, dass die Potenzlinien einen Kegelschnitt berühren und dass A und B die Berührungspunkte der Tangenten $A\mathfrak{d}$ und $B\mathfrak{e}$ sind. Dass auch C der Berührungspunkt für die Tangente $C\mathfrak{f}$ ist, ergibt sich schon aus der Gleichheit der Beziehung, in welcher die drei Dreiecksecken zu den Punkten G, H, J, K stehen; man überzeugt sich aber auch leicht, dass zunächst F', D, E, sowie F', D', E' u. s. w. in gerader Linie liegen, da BE, CF, AD durch denselben Punkt G gehen, dass also auch $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ in gerader Linie liegen, woraus, mittelst des vollständigen Vierecks $CA\mathfrak{e}\mathfrak{d}\mathfrak{f}B$, folgt, dass die Strahlen CA, $C\mathfrak{r}$, CB, $C\mathfrak{f}$, sowie, mit $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ die Durchschnitte von $A\mathfrak{d}$ und $B\mathfrak{e}$ mit $C\mathfrak{f}$ bezeichnet, die Strahlen $A\mathfrak{d}$, AB, $A\mathfrak{p}$, AC und $B\mathfrak{e}$, BA, $B\mathfrak{q}$, BC harmonisch sind, und dass daher $B\mathfrak{q}$, $C\mathfrak{r}$, $A\mathfrak{p}$ sich in demselben Punkte kreuzen, dass also A, B, C die Berührungspunkte und $A\mathfrak{d}$, $B\mathfrak{e}$, $C\mathfrak{f}$ die Tangenten desselben Kegelschnitts sind.

Wenn, umgekehrt, die Potenzlinien Strahlen eines Punktes sind, so bewegen sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte als Tangenten eines Kegelschnitts.

Man behalte die Bezeichnung der Taf. III. Fig. 5. bei, und stelle sich vor, $\alpha\beta$ gehe durch $\mathfrak{r}$. Es kann dann $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ natürlich nicht mehr durch J gehen, und es heisse der Punkt, in welchem $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ die AD' schneidet, $\mathfrak{l}$, der Punkt, in welchem sie AD schneidet, $\mathfrak{t}$. Man findet aus dem Dreiecke $AD'C$, geschnitten von $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$:

$$A\mathfrak{l}.D'\mathfrak{a}'.C\mathfrak{b}=D'\mathfrak{l}.A\mathfrak{b}.C\mathfrak{a}',$$

$$\frac{A\mathfrak{l}}{D'\mathfrak{l}}=\frac{A\mathfrak{b}.C\mathfrak{a}'}{C\mathfrak{b}.D'\mathfrak{a}'}.$$

aus dem Dreiecke ADC, geschnitten von $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$:

$$A\mathfrak{t}.D\mathfrak{a}'.C\mathfrak{b}=D\mathfrak{t}.A\mathfrak{b}.C\mathfrak{a}',$$

$$\frac{D\mathfrak{t}}{A\mathfrak{t}}=\frac{C\mathfrak{b}.D\mathfrak{a}'}{A\mathfrak{b}.C\mathfrak{a}'},$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{t}}{\mathfrak{D}'\mathfrak{t}}:\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{t}}{\mathfrak{A}\mathfrak{t}}=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{b}^2}\cdot\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{a}'^2}{\mathfrak{D}'\mathfrak{a}'.\mathfrak{D}\mathfrak{a}'}.$$

Nun ist

$$\mathfrak{D}\mathfrak{a}'=\mathfrak{D}B+B\mathfrak{a}',$$
$$\mathfrak{D}'\mathfrak{a}'=B\mathfrak{a}'-B\mathfrak{D}',$$

und da

$$\mathfrak{d}\mathfrak{D}'^2=\mathfrak{d}\mathfrak{D}^2=\mathfrak{d}B.\mathfrak{d}C,$$
$$\alpha\mathfrak{a}'^2=\alpha\mathfrak{a}^2=\alpha B.\alpha C,$$

so ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}B&=\mathfrak{d}\mathfrak{D}-\mathfrak{d}B\\&=\sqrt{\mathfrak{d}B.\mathfrak{d}C}-\mathfrak{d}B\\&=\sqrt{\mathfrak{d}B}(\sqrt{\mathfrak{d}C}-\sqrt{\mathfrak{d}B}),\\B\mathfrak{D}'&=\mathfrak{d}\mathfrak{D}'+\mathfrak{d}B\\&=\sqrt{\mathfrak{d}B}(\sqrt{\mathfrak{d}C}+\sqrt{\mathfrak{d}B})\\B\mathfrak{a}'&=B\alpha+\alpha\mathfrak{a}'\\&=\sqrt{B\alpha}(\sqrt{C\alpha}+\sqrt{B\alpha}),\end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{D}\mathfrak{a}'=\sqrt{B\alpha}(\sqrt{C\alpha}+\sqrt{B\alpha})+\sqrt{\mathfrak{d}B}(\sqrt{\mathfrak{d}C}-\sqrt{\mathfrak{d}B}),$$
$$\mathfrak{D}'\mathfrak{a}'=\sqrt{B\alpha}(\sqrt{C\alpha}+\sqrt{B\alpha})-\sqrt{\mathfrak{d}B}(\sqrt{\mathfrak{d}C}+\sqrt{\mathfrak{d}B}),$$

und wenn man multiplicirt und

$$\begin{aligned}(\sqrt{\mathfrak{d}C}-\sqrt{\mathfrak{d}B})(\sqrt{\mathfrak{d}C}+\sqrt{\mathfrak{d}B})&=\mathfrak{d}C-\mathfrak{d}B\\&=\alpha C-\alpha B\\&=(\sqrt{\alpha C}+\sqrt{\alpha B})(\sqrt{\alpha C}-\sqrt{\alpha B})\end{aligned}$$

setzt, so entsteht nach Zusammenziehung der mit dem Factor $(\sqrt{C\alpha}+\sqrt{B\alpha})$ behafteten Glieder:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\mathfrak{a}'.\mathfrak{D}'\mathfrak{a}'&=B\alpha(\sqrt{C\alpha}+\sqrt{B\alpha})^2\\&\quad-(\sqrt{C\alpha}+\sqrt{B\alpha})(2\mathfrak{d}B.\sqrt{B\alpha}+\mathfrak{d}B(\sqrt{\alpha C}-\sqrt{\alpha B}))\\&=(\sqrt{C\alpha}+\sqrt{B\alpha})^2(B\alpha-\mathfrak{d}B)=(\sqrt{C\alpha}+\sqrt{B\alpha})^2.\mathfrak{d}\alpha.\end{aligned}$$

Für $C\mathfrak{a}'$ hat man:

$$C\mathfrak{a}' = C\alpha + \alpha\mathfrak{a}' = C\alpha + \sqrt{C\alpha . B\alpha} = \sqrt{C\alpha}(\sqrt{C\alpha} + \sqrt{B\alpha}),$$

folglich

$$\frac{C\mathfrak{a}'^2}{D\mathfrak{a}' . D'\mathfrak{a}'} = \frac{C\alpha}{\mathfrak{d}\alpha}.$$

Ferner ist

$$\frac{A\mathfrak{b}^2}{C\mathfrak{b}^2} = \frac{A\beta}{C\beta},$$

folglich

$$\frac{A\mathfrak{l}}{D'\mathfrak{l}} : \frac{D\mathfrak{k}}{A\mathfrak{k}} = \frac{A\beta}{C\beta} \cdot \frac{C\alpha}{\mathfrak{d}\alpha},$$

und da, nach der Voraussetzung, $A\mathfrak{d}$, $B\mathfrak{e}$, $\alpha\beta$ durch denselben Punkt gehen,

$$\frac{A\beta}{C\beta} : \frac{A\mathfrak{e}}{C\mathfrak{e}} = \frac{\mathfrak{d}\alpha}{C\alpha} : \frac{\mathfrak{d}B}{CB},$$

$$\frac{A\beta}{C\beta} \cdot \frac{C\alpha}{\mathfrak{d}\alpha} = \frac{A\mathfrak{e} . CB}{C\mathfrak{e} . \mathfrak{d}B},$$

so dass, wenn $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{k}_1$ die Einschnitte einer zweiten Verbindungslinie von Berührungspunkten, in die Linien AD', AD bezeichnen:

$$\frac{A\mathfrak{l}}{D'\mathfrak{l}} : \frac{A\mathfrak{l}_1}{D'\mathfrak{l}_1} = \frac{D\mathfrak{k}}{A\mathfrak{k}} : \frac{D\mathfrak{k}_1}{A\mathfrak{k}_1},$$

woraus folgt, dass AD, AD', $\mathfrak{l}\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}_1\mathfrak{k}_1$ Tangenten eines Kegelschnittes sind und D und D' die Berührungspunkte der beiden ersten.

Sowie AD und AD' Tangenten dieses Kegelschnitts sind, so auch BE, BE', und zwar mit den Berührungspunkten E, E'. Es ist nicht schwer, die vom Punkte C ausgehenden Tangenten zu construiren, sowie diejenigen, welche den Dreiecksseiten parallel sind. Ich begnüge mich aber hier damit, die allgemeine Grundlage dieser Beziehungen gegeben zu haben, ohne auf weitere Untersuchung derselben einzugehen, so anziehend der Gegenstand auch ist; ich habe darum auch die Beweise in der Weise geführt, die sich mir zuerst darbot, die aber keineswegs den Anspruch macht, die eleganteste zu sein.

2. In dieser zweiten Nummer des Paragraphen will ich die Ausdrücke für die Radien und Mittelpunktsentfernungen der Berührungskreise ableiten und zeigen, wie auch diese auf die am Ende des vorigen Paragraphen entwickelte Gleichung führen. Ich benutze die Taf. III. Fig. 5., ohne aber alle vorkommenden Linien

und Punkte zu zeichnen, da die Vorstellung das Fehlende leicht ergänzen kann. Der Mittelpunkt des ABC umschriebenen Kreises sei M; von ihm geht die Centrallinie MO senkrecht auf die Potenzlinie $\alpha\beta$, deren Schnitte mit dem Kreise durch P und Q bezeichnet werden. Die Projection eines Punktes auf die Centrallinie soll durch eine angehängte 1, die auf die Potenzlinie durch eine angehängte 2 bezeichnet werden. Die zu den auf den Dreiecksseiten selbst liegenden Berührungspunkten gehörigen Mittelpunkte seien für $\mathfrak{a} - M_1$, für $\mathfrak{b}' - M_2$, für $\mathfrak{c}' - M_3$, für die auf den Verlängerungen liegenden $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$; die Entfernungen dieser Mittelpunkte von M seien q_1, q_2, q_3, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$; die zugehörigen Radien $r_1, r_2, r_3, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$; der Radius des Kreises um M sei r; PQ sei $=2p$.

Man hat zunächst

$$\gamma P.\gamma Q = \gamma A.\gamma B$$

oder

$$\gamma O^2 - p^2 = \gamma A.\gamma B,$$
$$\beta O^2 - p^2 = \beta A.\beta C,$$
$$\alpha O^2 - p^2 = \alpha B.\alpha C;$$

und da

$$\gamma O^2 - \beta O^2 + \gamma\beta^2 = 2\gamma O.\gamma\beta,$$
$$\gamma O^2 - \beta O^2 - \gamma\beta^2 = -2\beta O.\gamma\beta$$

und ähnliche Gleichungen für γ und α, β und α stattfinden, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
2.\gamma O.\gamma\beta &= \gamma A.\gamma B - \beta A.\beta C + \gamma\beta^2,\\
-2\beta O.\gamma\beta &= \gamma A.\gamma B - \beta A.\beta C - \gamma\beta^2,\\
2.\gamma O.\gamma\alpha &= \gamma A.\gamma B - \alpha B.\alpha C + \gamma\alpha^2,\\
-2.\alpha O.\gamma\alpha &= \gamma A.\gamma B - \alpha B.\alpha C - \gamma\alpha^2,\\
2.\alpha O.\beta\alpha &= \alpha B.\alpha C - \beta A.\beta C + \alpha\beta^2,\\
2.\beta O.\beta\alpha &= \alpha B.\alpha C - \beta A.\beta C - \alpha\beta^2.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Für die Projectionen A_2, B_2, C_2 der Dreiecksecken auf die Potenzlinie ist

$$\gamma A_2^2 - \beta A_2^2 = \gamma A^2 - \beta A^2,$$
$$\gamma B_2^2 - \alpha B_2^2 = \gamma B^2 - \alpha B^2,$$
$$\beta C_2^2 - \alpha C_2^2 = \beta C^2 - \alpha C^2;$$

aus sich durch Addition oder Subtraction der Quadrate der ecken $\gamma\beta = A_2\gamma - A_2\beta$, $\gamma\alpha = B_2\beta - B_2\alpha$, $\beta\alpha = C_2\beta - C_2\alpha$ ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
2.\gamma A_2.\gamma\beta &= \gamma A^2 - \beta A^2 + \gamma\beta^2,\\
2.\beta A_2.\gamma\beta &= \gamma A^2 - \beta A^2 - \gamma\beta^2,\\
2.\gamma B_2.\gamma\alpha &= \gamma B^2 - \alpha B^2 + \gamma\alpha^2,\\
2.\alpha B_2.\gamma\alpha &= \gamma B^2 - \alpha B^2 - \gamma\alpha^2,\\
2.\beta C_2.\beta\alpha &= \beta C^2 - \alpha C^2 + \beta\alpha^2,\\
2.\alpha C_2.\beta\alpha &= \beta C^2 - \alpha C^2 - \beta\alpha^2.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

nun

$$\begin{aligned}
AA_1 &= \gamma A_2 - \gamma O = \beta A_2 + \beta O,\\
BB_1 &= \gamma B_2 - \gamma O = \alpha B_2 + \alpha O,\\
CC_1 &= \beta C_2 + \beta O = \alpha C_2 + \alpha O;
\end{aligned}$$

folgt:

$$\left.\begin{aligned}
2.\gamma\beta.AA_1 &= -\gamma A.AB + \beta A.AC,\\
2.\gamma\alpha.BB_1 &= \gamma B.AB + \alpha B.CB,\\
2.\beta\alpha.CC_1 &= \beta C.AC - \alpha C.BC;
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

r, da

$$\gamma A : \gamma B = A\mathfrak{c}^2 : B\mathfrak{c}^2 = A\mathfrak{c}'^2 : B\mathfrak{c}'^2,$$

$$\begin{aligned}
\gamma A : AB &= A\mathfrak{c}^2 : B\mathfrak{c}^2 - A\mathfrak{c}^2\\
&= A\mathfrak{c}'^2 : B\mathfrak{c}'^2 - A\mathfrak{c}'^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma A &= A\mathfrak{c}^2 \cdot \frac{AB}{(B\mathfrak{c} - A\mathfrak{c})(B\mathfrak{c} + A\mathfrak{c})}\\
&= A\mathfrak{c}'^2 \cdot \frac{AB}{(B\mathfrak{c}' - A\mathfrak{c}')(B\mathfrak{c}' + A\mathfrak{c}')}\\
&= \frac{A\mathfrak{c}^2}{B\mathfrak{c} + A\mathfrak{c}}\\
&= \frac{A\mathfrak{c}'^2}{B\mathfrak{c}' - A\mathfrak{c}'}
\end{aligned}$$

l so fort, so ist

$$\left.\begin{aligned}
2.\gamma\beta.AA_1 &= -A\mathfrak{c}^2 . \frac{AB}{B\mathfrak{c} + A\mathfrak{c}} + A\mathfrak{b}^2 . \frac{AC}{C\mathfrak{b} + A\mathfrak{b}},\\
2.\gamma\alpha.BB_1 &= B\mathfrak{c}^2 . \frac{AB}{B\mathfrak{c} + A\mathfrak{c}} + B\mathfrak{a}^2 . \frac{BC}{C\mathfrak{a} - B\mathfrak{a}},\\
2.\beta\alpha.CC_1 &= C\mathfrak{b}^2 . \frac{AC}{C\mathfrak{b} + A\mathfrak{b}} - C\mathfrak{a}^2 . \frac{BC}{C\mathfrak{a} - B\mathfrak{a}},
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\frac{A\mathfrak{c}^2}{B\mathfrak{c}+A\mathfrak{c}}=\frac{A\mathfrak{c}'^2}{B\mathfrak{c}'-A\mathfrak{c}'},$$

$$\frac{A\mathfrak{b}^2}{C\mathfrak{b}+A\mathfrak{b}}=\frac{A\mathfrak{b}'^2}{C\mathfrak{b}'-A\mathfrak{b}'},$$

u. s. w.

Für die von den Berührungspunkten auf die Centrallinie fällten Perpendikel ist:

$$\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1+AA_1:\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1+BB_1=\mathfrak{c}A:\mathfrak{c}B,$$
$$\mathfrak{c}'\mathfrak{c}_1'-AA_1:BB_1-\mathfrak{c}'\mathfrak{c}_1'=\mathfrak{c}'A:\mathfrak{c}'B$$

und so weiter, woraus man findet:

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1.AB=\mathfrak{c}A.BB_1-\mathfrak{c}B.AA_1,\\ \mathfrak{c}'\mathfrak{c}_1'.AB=\mathfrak{c}'A.BB_1+\mathfrak{c}'B.AA_1,\\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1.AC=\mathfrak{b}A.CC_1-\mathfrak{b}C.AA_1,\\ \mathfrak{b}'\mathfrak{b}_1'.AC=\mathfrak{b}'A.CC_1+\mathfrak{b}'C.AA_1,\\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1.BC=\mathfrak{a}C.BB_1+\mathfrak{a}B.CC_1,\\ \mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1'.BC=\mathfrak{a}'C.BB_1-\mathfrak{a}'B.CC_1.\end{array}\right\}\quad(5)$$

Die Perpendikel von den Dreiecksecken auf die Potenzlinie findet man auf folgende Weise:

$$AA_2=\frac{2.\Delta\gamma A\beta}{\gamma\beta},$$

$$\Delta\gamma A\beta:\Delta ABC=\gamma A.\beta A:AB.AC,$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l}AA_2=2.\Delta ABC.\dfrac{\gamma A.\beta B}{\gamma\beta.AB.AC},\\ BB_2=2.\Delta ABC.\dfrac{\gamma B.\alpha B}{\alpha\gamma.BA.BC},\\ CC_2=2.\Delta ABC.\dfrac{\beta C.\alpha C}{\alpha\beta.CA.CB}.\end{array}\right\}\quad(6)$$

Da nun das Dreieck, das z. B. der Radius $M_3\mathfrak{c}'$ mit dem Perpendikel $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}_1'$ bildet, dem Dreiecke $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}_2'\gamma$ ähnlich ist (§. 4., 2.), so i

$$\begin{aligned} r_3 : \mathfrak{c}'\mathfrak{c}_1' &= \gamma\mathfrak{c}' : \mathfrak{c}'\mathfrak{c}_2' \\ &= \gamma A : AA_2 \\ &= \gamma B : BB_2 \\ &= \gamma\beta . AB . AC : 2 . \triangle ABC . \beta A \\ &= \alpha\gamma . AB . BC : 2 . \triangle ABC . \alpha B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 . 2\triangle ABC &= AB . \mathfrak{c}'\mathfrak{c}_1' . \frac{\beta\gamma . AC}{\beta A} \\ &= AB . \mathfrak{c}'\mathfrak{c}_1' . \frac{\alpha\gamma . BC}{\alpha B} \\ &= \mathfrak{c}'A . BB_1 . \frac{\alpha\gamma . BC}{\alpha B} + \mathfrak{c}'B . AA_1 . \frac{\beta\gamma . AC}{\beta A}, \end{aligned}$$

und durch Anwendung der Gleichungen (3):

$$4r_3 . \triangle ABC = \frac{\mathfrak{c}'A . BC(\gamma B . AB + \alpha B . BC)}{\alpha B} + \frac{\mathfrak{c}'B . AC . (\beta A . AC - \gamma A . AB)}{\beta A}.$$

Man erhält so:

$$\begin{aligned} 4r_3 . \triangle ABC &= \mathfrak{c}'A . BC^2 + \mathfrak{c}'B . AC^2 \\ &\quad + \left(\mathfrak{c}'A . BC . \frac{\gamma B}{\alpha B} - \mathfrak{c}'B . AC . \frac{\gamma A}{\beta A}\right) . AB, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4r_3 . \triangle ABC &= \mathfrak{c}A . BC^2 - \mathfrak{c}B . AC^2 \\ &\quad + \left(\mathfrak{c}A . BC . \frac{\gamma B}{\alpha B} + \mathfrak{c}B . AC . \frac{\gamma A}{\beta A}\right) . AB, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4r_2 . \triangle ABC &= -(\mathfrak{b}'A . BC^2 + \mathfrak{b}'C . AB^2) \\ &\quad + \left(\mathfrak{b}'A . BC . \frac{\beta C}{\alpha C} + \mathfrak{b}'C . AB . \frac{\beta A}{\gamma A}\right) . AC, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4r_2 . \triangle ABC &= -(\mathfrak{b}A . BC^2 - \mathfrak{b}C . AB^2) \\ &\quad + \left(\mathfrak{b}A . BC . \frac{\beta C}{\alpha C} - \mathfrak{b}C . AB . \frac{\beta A}{\gamma A}\right) . AC, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4r_1 . \triangle ABC &= \mathfrak{a}C . AB^2 + \mathfrak{a}B . AC^2 \\ &\quad + \left(\mathfrak{a}C . AB . \frac{\alpha B}{\gamma B} - \mathfrak{a}B . AC . \frac{\alpha C}{\beta C}\right) . BC, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4r_1 . \triangle ABC &= \mathfrak{a}'C . AB^2 - \mathfrak{a}'B . AC^2 \\ &\quad + \left(\mathfrak{a}'C . AB . \frac{\alpha B}{\gamma B} + \mathfrak{a}'B . AC . \frac{\alpha C}{\beta C}\right) . BC. \end{aligned}$$

Zur weiteren Umformung dieser Ausdrücke setze man:

$$\frac{\gamma B}{\alpha B}=\frac{\mathfrak{c}'B^2}{B\mathfrak{c}'-A\mathfrak{c}'}:\frac{\mathfrak{a}B^2}{\mathfrak{a}C-\mathfrak{a}B},$$

$$\frac{\gamma A}{\beta A}=\frac{\mathfrak{c}'A^2}{\mathfrak{c}'B-\mathfrak{c}'A}:\frac{\mathfrak{b}'A^2}{\mathfrak{b}'C-\mathfrak{b}'A}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{c}'A.BC.\frac{\gamma B}{\alpha B}-\mathfrak{c}'B.AC.\frac{\gamma A}{\beta A}$$

$$=\frac{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B}{\mathfrak{c}'B-\mathfrak{c}'A}\left(\frac{BC.\mathfrak{c}'B.(\mathfrak{a}C-\mathfrak{a}B)}{\mathfrak{a}B^2}-\frac{AC.\mathfrak{c}'A.(\mathfrak{b}'C-\mathfrak{b}'A)}{\mathfrak{b}'A^2}\right)$$

und da

$BC=\mathfrak{a}C+\mathfrak{a}B,\ AC=\mathfrak{b}'C+\mathfrak{b}'A$:

$$=\frac{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B}{\mathfrak{c}'B-\mathfrak{c}'A}\cdot\left(\frac{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}C^2}{\mathfrak{a}B^2}-\mathfrak{c}'B-\frac{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{b}'C^2}{\mathfrak{b}'A^2}+\mathfrak{c}'A\right)$$

$$=\frac{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B}{\mathfrak{c}'B-\mathfrak{c}'A}\left(\frac{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}C^2.\mathfrak{b}'A^2-\mathfrak{c}'A.\mathfrak{b}'C^2.\mathfrak{a}B^2}{\mathfrak{a}B^2.\mathfrak{b}'A^2}-(\mathfrak{c}'B-\mathfrak{c}'A)\right).$$

Da aber

$$\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A.\mathfrak{a}B=\mathfrak{b}'A.\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}C,$$

so lässt sich der obige Ausdruck verwandeln in:

$$\frac{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B}{\mathfrak{c}'B-\mathfrak{c}'A}\left(\frac{\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A.\mathfrak{a}B.\mathfrak{b}'A.\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}C}{\mathfrak{a}B^2.\mathfrak{b}'A^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{c}'B}-\frac{1}{\mathfrak{c}'A}\right)-(\mathfrak{c}'B-\mathfrak{c}'A)\right)$$

$$=-\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B\cdot\left(\frac{\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}C}{\mathfrak{a}B.\mathfrak{b}'A}\cdot\frac{1}{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{c}'A}+1\right)$$

$$=-\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B.\left(\frac{\mathfrak{b}'C.\mathfrak{a}C}{\mathfrak{b}'A.\mathfrak{a}B}+1\right).$$

In ähnlicher Weise findet man:

$$\mathfrak{c}A.BC.\frac{\gamma B}{\alpha B}+\mathfrak{c}B.AC.\frac{\gamma A}{\beta A}=+\mathfrak{c}A.\mathfrak{c}B\cdot\left(\frac{\mathfrak{b}'C}{\mathfrak{b}'A}\cdot\frac{\mathfrak{a}C}{\mathfrak{a}B}-1\right),$$

$$\mathfrak{b}'A.BC.\frac{\beta C}{\alpha C}+\mathfrak{b}'C.AB.\frac{\beta A}{\gamma A}=+\mathfrak{b}'A.\mathfrak{b}'C\cdot\left(\frac{\mathfrak{c}'B}{\mathfrak{c}'A}\cdot\frac{\mathfrak{a}B}{\mathfrak{a}C}+1\right),$$

$$\mathfrak{b}A.BC.\frac{\beta C}{\alpha C}-\mathfrak{b}C.AB.\frac{\beta A}{\gamma A}=-\mathfrak{b}A.\mathfrak{b}C\cdot\left(\frac{\mathfrak{c}'B}{\mathfrak{c}'A}\cdot\frac{\mathfrak{a}B}{\mathfrak{a}C}-1\right),$$

$$\mathfrak{a}C.AB.\frac{\alpha B}{\gamma B}-\mathfrak{a}B.AC.\frac{\alpha C}{\beta C}=-\mathfrak{a}C.\mathfrak{a}B\cdot\left(\frac{\mathfrak{c}'A}{\mathfrak{c}'B}\cdot\frac{\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{b}'C}+1\right),$$

$$\mathfrak{a}'C.AB.\frac{\alpha B}{\gamma B}+\mathfrak{a}'B.AC.\frac{\alpha C}{\beta C}=-\mathfrak{a}'C.\mathfrak{a}'B\cdot\left(\frac{\mathfrak{c}'A}{\mathfrak{c}'B}\cdot\frac{\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{b}'C}-1\right);$$

nd wenn man, nach dem Stewart'schen Satze, setzt

$$\mathfrak{c}'A.BC^2+\mathfrak{c}'B.AC^2=C\mathfrak{c}'^2.AB+\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B.AB,$$

erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
4.r_3.\triangle ABC &= AB(C\mathfrak{c}'^2-\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B.\frac{\mathfrak{b}'C.\mathfrak{a}C}{\mathfrak{b}'A.\mathfrak{a}B}),\\
4r_3.\triangle ABC &= -AB(C\mathfrak{c}^2-\mathfrak{c}A.\mathfrak{c}B.\frac{\mathfrak{b}'C.\mathfrak{a}C}{\mathfrak{b}'A.\mathfrak{a}B}),\\
4.r_2.\triangle ABC &= -AC(B\mathfrak{b}'^2-\mathfrak{b}'A.\mathfrak{b}'C.\frac{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}B}{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{a}C}),\\
4.r_2.\triangle ABC &= AC(B\mathfrak{b}^2-\mathfrak{b}A.\mathfrak{b}C.\frac{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}B}{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{a}C}),\\
4r_1.\triangle ABC &= BC(A\mathfrak{a}^2-\mathfrak{a}C.\mathfrak{a}B.\frac{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{b}'C}),\\
4r_1.\triangle ABC &= BC(A\mathfrak{a}'^2-\mathfrak{a}'C.\mathfrak{a}'B.\frac{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{b}'C}).
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Es bedarf nur der Erwähnung, dass in den in diesen Ausücken vorkommenden Brüchen so gut die accentuirten, wie die cht accentuirten Berührungspunkte genommen werden können. n einer andern Umformung gelangt man durch die Relation

$$\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A.\mathfrak{a}B=\mathfrak{b}'A.\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}C,$$

us welcher folgt, dass

$$\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B.\frac{\mathfrak{b}'C.\mathfrak{a}C}{\mathfrak{b}'A.\mathfrak{a}B}=\frac{\mathfrak{c}'B^2.\mathfrak{a}C^2}{\mathfrak{a}B^2}=\frac{\mathfrak{c}'A^2.\mathfrak{b}'C^2}{\mathfrak{b}'A^2},$$

$$\mathfrak{c}A.\mathfrak{c}B.\frac{\mathfrak{b}'C.\mathfrak{a}C}{\mathfrak{b}'A.\mathfrak{a}B}=\frac{\mathfrak{c}B^2.\mathfrak{a}C^2}{\mathfrak{a}B^2}=\frac{\mathfrak{c}A^2.\mathfrak{b}'C^2}{\mathfrak{b}'A^2},$$

$$\mathfrak{b}'A.\mathfrak{b}'C.\frac{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{a}B}{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{a}C}=\frac{\mathfrak{b}'A^2.\mathfrak{c}'B^2}{\mathfrak{c}'A^2}=\frac{\mathfrak{b}'C^2.\mathfrak{a}B^2}{\mathfrak{a}C^2},$$

u. s. w.

Zur Ableitung der Relation zwischen den Radien und den ittelpunktsentfernungen nehme ich die Ausdrücke in folgender Form:

$$_3.\triangle ABC=\mathfrak{c}'A.BC^2+\mathfrak{c}'B.AC^2-AB.\mathfrak{c}'A.\mathfrak{c}'B-AB.\mathfrak{c}'A^2.\frac{\mathfrak{b}'C^2}{\mathfrak{b}'A^2},$$

$$_2.\triangle ABC=-\mathfrak{b}'A.BC^2-\mathfrak{b}'C.AB^2+AC.\mathfrak{b}'A.\mathfrak{b}'C+AC.\mathfrak{b}'A^2.\frac{\mathfrak{c}'B^2}{\mathfrak{c}'A^2}.$$

Es ist dann

$$
\begin{aligned}
4.\triangle ABC(\mathfrak{r}_3.\mathfrak{b}'A+\mathfrak{r}_2.\mathfrak{c}'A)
&= AC\cdot\frac{\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{c}'A}(\mathfrak{c}'B.(\mathfrak{b}'A+\mathfrak{b}'C).\mathfrak{c}'A+\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A^2+\mathfrak{b}'A.\mathfrak{c}'B^2)\\
&\quad -AB\cdot\frac{\mathfrak{c}'A}{\mathfrak{b}'A}(\mathfrak{b}'C.(\mathfrak{c}'A+\mathfrak{c}'B).\mathfrak{b}'A+\mathfrak{c}'B.\mathfrak{b}'A^2+\mathfrak{c}'A.\mathfrak{b}'C^2)\\
&= AC\cdot\frac{\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{c}'A}(\mathfrak{c}'B.\mathfrak{b}'A.(\mathfrak{c}'A+\mathfrak{c}'B)+\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A.(\mathfrak{c}'B+\mathfrak{c}'A))\\
&\quad -AB\cdot\frac{\mathfrak{c}'A}{\mathfrak{b}'A}(\mathfrak{c}'B.\mathfrak{b}'A.(\mathfrak{b}'C+\mathfrak{b}'A)+\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A.(\mathfrak{b}'A+\mathfrak{b}'C))\\
&= AC.AB\left(\frac{\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{c}'A}-\frac{\mathfrak{c}'A}{\mathfrak{b}'A}\right)(\mathfrak{c}'B.\mathfrak{b}'A+\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A).
\end{aligned}
$$

Stellt man sich von A aus eine Tangente vor an den Kreis um M_1 und bezeichnet ihren Berührungspunkt mit K_1, so verhält sich, nach §. 3.:

$$
\begin{aligned}
AK_1^2:B\mathfrak{a}^2 &= AA_2:BB_2\\
&= A\gamma:B\gamma\\
&= A\mathfrak{c}'^2:B\mathfrak{c}'^2,\\
AK_1^2:C\mathfrak{a}^2 &= AA_2:CC_2\\
&= A\mathfrak{b}'^2:C\mathfrak{b}'^2,
\end{aligned}
$$

und es ist daher

$$AK_1=\frac{B\mathfrak{a}.\mathfrak{c}'A}{\mathfrak{c}'B}=\frac{C\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{b}'C}$$

und folglich auch

$$AK_1=BC\cdot\frac{\mathfrak{c}'A.\mathfrak{b}'A}{\mathfrak{c}'B.\mathfrak{b}'A+\mathfrak{b}'C.\mathfrak{c}'A},$$

folglich

$$AK_1.4.\triangle ABC(\mathfrak{r}_3.\mathfrak{b}'A+\mathfrak{r}_2.\mathfrak{c}'A)=AB.BC.AC.(\mathfrak{b}'A^2-\mathfrak{c}'A^2),$$

was mittelst des §. 3., wonach

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}'A^2 &= 2.q_2.AA_2,\\
\mathfrak{c}'A^2 &= 2.q_3.AA_2,\\
AK_1^2 &= 2.q_1.AA_2,
\end{aligned}
$$

und mittelst der Gleichung

$$\triangle ABC=\frac{AB.BC.AC}{4r}$$

übergeht in

$$(r_3\sqrt{q_2}+r_2\sqrt{q_3}).\sqrt{q_1}=r(q_2-q_3),$$

und man kann nun leicht in derselben Weise die entsprechenden Gleichungen für die andern Radien und Mittelpunktsentfernungen ableiten.

§. 9.

Sehnensysteme.

1. Von einem Punkte A auf dem Kreise um M (Taf. IV. Fig. 6.) ehen an den Kreis um M_1 die Tangenten AB, AC, welche den rsten Kreis wieder treffen in D und E. Nach Nr. 2. des §. 6. üssen DE und die Tangente in A einen gemeinschaftlichen Be- ührungskreis des Systems haben, dessen Berührungspunkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ auf der Verbindungslinie BC der Berührungspunkte der Seh- en AD und AE liegen; der Mittelpunkt dieses Berührungskrei- es sei $\mathfrak{M}$. Da ausser dem Kreise um M die Linie $A\mathfrak{a}$ nur einen erührungskreis haben kann, so ist klar, dass dieser Kreis um $\mathfrak{M}$ ein ganz bestimmter, von M_1 unabhängiger Kreis sein muss, er allein vom Punkte A abhängt. Der Berührungspunkt $\mathfrak{a}$ liegt it A in gleicher Entfernung von der Potenzlinie, welche $A\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{e}$ albirt; und es müssen die Linien BC für die verschiedenen Kreise M_1 des Systems, oder die Polaren des Punktes A für die ver- chiedenen Kreise des Systems, alle durch diesen Punkt gehen. lan hat zunächst den Lehrsatz:

Lehrsatz I. Die Tangentenpaare, welche von einem Punkte ines der Kreise eines Systems an die verschiedenen Kreise des ystems gehen, bestimmen mit dem Kreise Sehnen, welche Tan- enten sind des zweiten Berührungskreises der im Punkte an den reis gelegten Tangente.

Zur Bestimmung der Lage des Mittelpunkts $\mathfrak{M}$ hat man, $M\mathfrak{M}$ it $\mathfrak{q}$, den Radius des Kreises um M mit r, die Coordinaten des unktes A mit x und y bezeichnet,

$$A\mathfrak{a}^2=2\mathfrak{q}x,$$

d nach §. 4. 2.:

$$A\mathfrak{a}=2A\mathfrak{e}$$
$$=2\frac{rx}{y},$$

glich

$$2\mathfrak{q}\,.\,x = \frac{4r^2x^2}{y^2},$$

$$\mathfrak{q} = \frac{2xr^2}{y^2}.$$

Weitere Beziehungen ergeben sich für die Mittelpunkte Bestimmungskreise $M_1, M_2, \ldots$ und die Einschnittspunkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2,$ der entstehenden Sehnen DE in die Tangente $A\mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1$ wohl wie AM_1 auf BC senkrecht stehen, so sind diese Pun projectivisch, da sie durch die parallelen Strahlenbüschel $\mathfrak{M}$ un erzeugt werden. Mit diesen vier Gebilden sind ferner noch Linien BC, als Strahlen des Punktes $\mathfrak{a}$, projectivisch, die den Strahlen der Punkte A und $\mathfrak{M}$ senkrecht stehen und sich jenen auf einem Kreise schneiden, der $\mathfrak{a}A$, mit diesen auf ei Kreise, der $\mathfrak{a}\mathfrak{M}$ zum Durchmesser hat, woraus dann folgt, d auch die Einschnittspunkte $\mathfrak{e}_1$ der Linien BC in die Potenzl mit den genannten Gebilden projectivisch sind. Für diese let ren findet man, nach §. 2. 2., da die Potenz des Punktes A in zug auf den Kreis um M_1 einerseits $= \mathfrak{e}\mathfrak{e}_1 . 2y$, anderers $= 2q_1x$ ist,

$$\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1 = \frac{q_1 x}{y}.$$

Zur näheren Einsicht in die projectivischen Beziehungen d Folgendes. Liegt der veränderliche Punkt $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{a}$, so fällt mit M, BC mit $A\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}_1$ mit $\mathfrak{e}$ zusammen. Liegt $\mathfrak{a}_1$ in A, so BC, die dann auf $A\mathfrak{M}$ senkrecht stehen muss, die Polare vo für den Kreis um $\mathfrak{M}$, mit welchem Punkte M_1 zusammen Liegt $\mathfrak{a}_1$ im Durchschnitte der $A\mathfrak{a}$ mit der Centrale oder im A lichkeitspunkte der Kreise M und $\mathfrak{M}$, und zwar, für die Figur äusseren, der σ heissen mag, so wird BC auf $\sigma\mathfrak{M}$ oder der trallinie senkrecht, AM_1 derselben parallel, M_1 fällt in's Un liche, der Kreis um M_1 geht in die Potenzlinie, oder genaue das System der Potenzlinie und der unendlich entfernten I über, die Tangenten AB, AC fallen in eine, der Potenzlinie rallele Linie zusammen, ihre Einschnittspunkte D, E in den I um M sind nur ein einziger Punkt, in dessen Tangente die I DE sich verwandelt; diese ist die zweite äussere gemeinsc liche Tangente der Kreise M und $\mathfrak{M}$. Liegt $\mathfrak{a}_1$ im Unendli so dass $\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1$ der Tangente $A\mathfrak{a}$ parallel ist, AM_1 mit ders zusammenfällt, so wird M_1 der Aehnlichkeitspunkt σ. Man daher folgende einander entsprechende Punkte:

	$\mathfrak{a}$	M
	σ	der unendlichferne Punkt
der unendlichferne Punkt		σ
	A	$\mathfrak{M}$

so dass sich die Beziehung der Punkte $\mathfrak{a}_1$ und M_1 auf verschiedene Weise ausdrücken lässt, z. B.

$$\frac{\mathfrak{a}_1\sigma}{\mathfrak{a}\sigma} = 1 : \frac{M_1\sigma}{M\sigma},$$

$$\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_1 A} = \frac{M_1 M}{M_1\mathfrak{M}} : \frac{\sigma M}{\sigma\mathfrak{M}},$$

$$\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_1 A} : \frac{\sigma\mathfrak{a}}{\sigma A} = \frac{M_1 M}{M_1\mathfrak{M}},$$

$$\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_1\sigma} : \frac{A\mathfrak{a}}{A\sigma} = \frac{M_1 M}{\mathfrak{M}M},$$

$$\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_1\sigma} = \frac{M_1 M}{\sigma M}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt dann weiter, dass dem Punkte $\mathfrak{e}$ auf der Potenzlinie, für den

$$A\mathfrak{e} = \mathfrak{a}\mathfrak{e},$$

ein Punkt M_1 entsprechen muss, für den, nach der zweiten Gleichung,

$$1 = \frac{M_1 M}{M_1\mathfrak{M}} : \frac{\sigma M}{\sigma\mathfrak{M}},$$

welcher also der andere, d. h. der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und $\mathfrak{M}$ ist.

Wenn M_1 von O aus jenseits M liegt, so werden die Tangenten AB, AC imaginär, ohne dass die Linie DE aufhört, reell zu sein; der Punkt $\mathfrak{a}_1$ liegt dann von A aus über $\mathfrak{a}$ hinaus. Liegt $\mathfrak{a}_1$ über A hinaus, so fällt M_1 über $\mathfrak{M}$ hinaus.

Nimmt man eine Tangente AD willkührlich, so finden sich zwei Linien für die zweite AE, da es für AD zwei Berührungskreise gibt. Hiervon macht der Fall eine Ausnahme, dass D mit P oder Q zusammentrifft, in welchem Falle auch B in diesem Punkte liegen muss. Es fällt dann auch der zweite Berührungskreis, den die Sehne DE noch ausser dem Kreise $\mathfrak{M}$ hat, mit $\mathfrak{M}$ zusammen. Die beiden Kreise M_1, für welche dies der Fall ist, sind, wenn k_1 und k_2 die Entfernungen ihrer Mittelpunkte von M und ϱ_1, ϱ_2 ihre Radien sind, durch die Gleichungen gegeben:

$$AP^2 = 2k_1 . x,$$
$$AQ^2 = 2k_2 . x;$$
$$x : AP = p : \varrho_1,$$
$$x : AQ = p : \varrho_2.$$

Wenn die gemeinschaftlichen Punkte P, Q des Systems imaginär sind und man nimmt für den Kreis M_1 einen der zum System gehörenden Punkte P', Q', so fallen B und C beide in diesen Punkt, z. B. in P'; die zusammenfallenden Tangenten AB, AC schneiden den Kreis M nur in einem Punkte, so dass DE eine Tangente des Kreises M, also eine gemeinschaftliche der Kreise M und $\mathfrak{M}$, werden muss; und zwar bleibt nach dem Obigen nur übrig, dass sie eine innere wird. So folgt für die projectivische Beziehung der Punkte M_1 und $\mathfrak{a}_1$, dass den Punkten P' und Q' als Mittelpunkten die Einschnitte der inneren gemeinschaftlichen Tangenten in $A\mathfrak{a}$ entsprechen.

Es folgt aber zugleich, dass die von A durch P' gezogene Gerade den Kreis M zum zweiten Male in einem Punkte trifft, welcher der Berührungspunkt einer inneren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise M und $\mathfrak{M}$ ist. In Taf. II Fig. 7. sind die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise M_1, M_2 construirt, mit den Berührungspunkten α_1 und α_2, β_1 und β_2 für die äusseren, γ_1 und γ_2, δ_1 und δ_2 für die inneren. Es tritt so M_1 an die Stelle von M, M_2 an die Stelle von $\mathfrak{M}$ der Taf IV. Fig. 6., α_1 an die Stelle von A, und es geht nun $\alpha_1\delta_1$, $\beta_1\gamma_1$ durch P', ebenso $\alpha_2\delta_2$, $\beta_2\gamma_2$, während $\alpha_1\gamma_1$, $\beta_1\delta_1$, $\alpha_2\gamma_2$, $\beta_2\delta_2$ durch Q' gehen. Da nun $\alpha_1\alpha_2$ im Durchschnitte ι mit der Potenzlinie halbirt wird und ein um ι mit dem Radius $\iota\alpha_1$ beschriebener Kreis die Kreise M_1 und M_2 rechtwinklig schneidet, also auch durch die Punkte P', Q' geht (§. 1., 2.), so stehen $\alpha_1\delta_1$ und $\alpha_2\delta_2$, $\alpha_1\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$, und, dieselbe Betrachtung auf $\beta_1\beta_2$, oder eine der inneren Tangenten angewendet, $\beta_1\gamma_1$ und $\gamma_2\beta_2$, $\beta_1\delta_1$ und $\beta_2\delta_2$ auf einander senkrecht.

Liegt der Punkt A (Taf. IV. Fig. 6.) in einem der Berührungspunkte der von Q' an den Kreis M gelegten Tangenten, so geht der Kreis $\mathfrak{M}$ über in den Punkt Q' und alle durch die Tangenten AB, AC erzeugten Sehnen DE gehen durch diesen Punkt. Die durch den andern Punkt P' gehende AP' muss nach dem Vorhergehenden den Kreis M im Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente mit dem Kreise $\mathfrak{M}$, an dessen Stelle Q' tritt, also im Berührungspunkte der andern von Q' an Kreis M gelegten Tangente treffen. Diese Verhältnisse bleiben dieselben, wenn auch ein anderer Kreis an die Stelle des angenommenen

reises M tritt: für alle Kreise des Systems muss die Verbin-
ıngslinie der Berührungspunkte der von Q' daran gelegten Tan-
enten durch P' gehen, und da diese Verbindungslinie auf der
entrallinie senkrecht steht, so folgt, dass sie für alle Kreise des
ystems dieselbe ist. Diese Verbindungslinie ist die Polare des
'unktes Q' für den jedesmal gewählten Kreis M, und da auf ihr
ie Pole aller durch Q' gehenden Geraden liegen müssen, so müs-
en sich die inneren und äusseren gemeinschaftlichen Tangenten
uf derselben schneiden, denn diese Durchschnittspunkte sind die
'ole der Verbindungslinien der Berührungspunkte. In Taf. V. Fig. 7.
ind τ_1, τ_2 solche Durchschnittspunkte. Diese Betrachtungen füh-
en zu folgendem Zusatze zum Lehrsatz I.

Zusatz. Die zum Systeme der Kreise gehörenden Punkte
ind die Durchschnitte der Verbindungslinien ungleichartiger Be-
ührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier
reise des Systems, und diese Verbindungslinien stehen in den
'unkten auf einander senkrecht. Die Polare eines der beiden
'unkte für irgend einen Kreis ist die im andern auf der Central-
inie errichtete Senkrechte, und auf diesen Senkrechten liegen
ie Durchschnittspunkte ungleichartiger gemeinschaftlicher Tan-
enten irgend zweier Kreise des Systems. Legt man vom Durch-
chnittspunkte einer dieser beiden Senkrechten mit einem Kreise
les Systems Tangenten an die anderen Kreise des Systems, so
ehen die dadurch bestimmten Sehnen durch den Fusspunkt der
ndern Senkrechten.

2. Es mögen jetzt (Taf. IV. Fig. 6.) von einem zweiten Punkte
A' des Kreises M, ebenso wie es von A geschah, Tangenten
n den Kreis M_1 gelegt werden, und es sei die Bezeichnung die-
elbe, aber mit accentuirten Buchstaben. Da dann AD und $A'D'$
denselben Kreis M_1 berühren, so müssen nach dem 4. Satze in §. 6., 2.
uch AA' und DD' Tangenten desselben Kreises sein, und die
Berührungspunkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ müssen auf der Geraden BB' liegen. Da
uch AD und $A'E'$ denselben Kreis M_1 berühren, so müssen fer-
ner AA' und DE' Tangenten eines und desselben Kreises sein
mit den Berührungspunkten $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{f}$ auf der Geraden BC'. Die
Gerade AA' hat überhaupt nur zwei Berührungskreise; der Be-
rührungspunkt des einen $\mathfrak{b}$ liegt zwischen A und A', der des an-
dern $\mathfrak{b}'$ jenseits der Potenzlinie in derselben Entfernung von der-
selben. Es ist klar, dass BB' und BC' die Linie AA' nicht in
demselben Punkte treffen können, wie es doch der Fall sein müsste,
wenn DD' und DE' demselben dieser beiden Berührungskreise
angehören sollten. Durch Anwendung derselben Schlüsse auf AE
und $A'E'$ und auf AE und $A'D'$ findet man, dass auch EE' und

ED' Tangenten der Berührungskreise von AA' sein müssen und zwar so, dass DD' und EE' dem einen, DE' und $D'E$ dem andern angehören. Die Tangenten AD und $A'D'$ berühren den Kreis M_1 so, dass derselbe vom Berührungspunkte aus für beide Tangenten nach derselben Seite sich erstreckt, oder dass die Drehung der Tangenten um die Ausgangspunkte A, A', nach der Erstreckung des Kreises hin, dieselbe ist. Die Tangenten AD und $A'D'$ sollen daher gleichartige Tangenten in Bezug auf die Punkte A und A' heissen: ein Begriff, der sich auch auf Tangenten verschiedener Kreise anwenden lässt und der im Folgenden noch häufige Anwendung finden wird. Gleichartig sind sonach auch AE, $A'E'$, ungleichartig aber AD und $A'E'$, sowie $A'D'$ und AE, und die durch gleichartige Tangenten erzeugten Sehnen berühren den einen, die durch ungleichartige erzeugten den andern der beiden Berührungskreise von AA'. Diese Berührungskreise sind aber völlig unabhängig vom Kreise M_1 und müssen dieselben bleiben, welchen andern Kreis des Systems man auch an die Stelle von M_1 setzt.

Die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks $BB'CC'$ schneiden sich in den festen Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, während die Diagonalen BC, $B'C'$ durch die ebenfalls festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ gehen. Da nun diese Diagonalen die Linie $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ stets in Punkten schneiden müssen, die mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ harmonisch sind, so bilden sie in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ projectivische Strahlenbüschel. Fällt der veränderliche Kreis M_1 mit dem inneren Berührungskreise der Linie AA', der den Berührungspunkt $\mathfrak{b}$ hat, zusammen, so liegen B, C, B', C' alle in $\mathfrak{b}$, welcher Punkt dann der gemeinschaftliche Einschnittspunkt der Diagonalen in AA' ist. An die Stelle von $\mathfrak{b}$ tritt $\mathfrak{b}'$, wenn der andere Berührungskreis von AA' zum Kreise M_1 genommen wird. Geht BC durch A, so muss, weil A' der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{b}'$, A, $\mathfrak{b}$ ist, $B'C'$ durch A' gehen und M_1 fällt mit M zusammen. Geht umgekehrt BC durch A', so muss $B'C'$ durch A gehen, und es bestimmt sich M_1 durch ein Perpendikel von A auf $\mathfrak{a}A'$ oder von A' auf $\mathfrak{a}'A$, welche Perpendikel also die Centrale in demselben Punkte treffen müssen.

Nach bekannter Eigenschaft der Kreisvierecke und der in ihren Ecken an den Kreis gelegten Tangenten liegen die Durchschnitte zweier Seitenpaare des Vierecks mit zwei Ecken des Tangentenvierecks auf gerader Linie und zwar harmonisch. Es sind demnach einerseits der Durchschnitt von BC mit $B'C'$, der Durchschnitt von AB mit $A'C'$, der Punkt $\mathfrak{b}$ und der Durchschnitt von AC mit $A'B'$, andererseits der Durchschnitt von AB mit $A'B'$, der Durchschnitt von BC mit $B'C'$, der Durchschnitt von AC mit

$A'C'$ und der Punkt $\mathfrak{b}'$ harmonische Punkte. Die dritte hiezu gehörige Gruppe bilden A', $\mathfrak{b}$, A, $\mathfrak{b}'$. Die erste Gruppe liegt auf der Polaren von $\mathfrak{b}'$, die zweite auf der Polaren von $\mathfrak{b}$, die dritte auf der Polaren des Durchschnitts von BC mit $B'C'$, für den Kreis M_1.

Wählt man den einen der zum Systeme gehörigen Punkte, z. B. P', zum Kreise M_1, so fällt der Unterschied der gleichartigen und ungleichartigen Tangenten weg, und statt der vier Sehnen DD', EE', DE', $D'E$ erhält man nur eine, welche gemeinschaftliche Tangente der Berührungskreise von AA' sein muss, und zwar, da die Verbindungslinien der Berührungspunkte dieser Linie und der Linie AA' durch P' gehen müssen, in welchem Punkte sich B, C, B', C' vereinigen, eine mit AA' ungleichartige gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise, also im Fall der Taf. IV. Fig. 6. eine innere. Die Taf. V. Fig. 7. macht dies anschaulich, wenn man für A und A_1 die Punkte α und β, für $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ die Punkte α_1 und α_2, und M_1 und M_2 für die Mittelpunkte der Berührungskreise von AA' nimmt. Es muss $\alpha P'$, $\beta P'$ die Durchschnittspunkte der inneren gemeinschaftlichen Tangente $\delta_1\delta_2$ mit dem Kreise M, nämlich die Punkte γ' und δ' treffen. Ebenso muss dann $\alpha' P'$ durch γ, $\beta' P'$ durch δ, $\alpha Q'$ durch γ, $\beta Q'$ durch δ, $\alpha' Q'$ durch γ', $\beta' Q'$ durch δ' gehen.

Die Linien von P' oder Q' nach $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}$ sind, wie aus der obigen Betrachtung des Vierecks $BB'CC'$ folgt, harmonische Strahlen, und da $\mathfrak{b}P'\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}Q'\mathfrak{b}'$ rechte Winkel sind, so müssen $P'\mathfrak{b}$, $P'\mathfrak{b}'$ die Winkel, welche $P'\mathfrak{a}$, $P'\mathfrak{a}'$ bilden, $Q'\mathfrak{b}$, $Q'\mathfrak{b}'$ die Winkel der Strahlen $Q'\mathfrak{a}$, $Q'\mathfrak{a}'$ halbiren.

Die Einschnittspunkte der Linien DE in $A\mathfrak{a}$, DE' in $A'\mathfrak{a}'$, oder die Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_1'$, welche nach der vorigen Nummer mit M_1 und den andern Mittelpunkten projectivisch sind, müssen auch unter einander projectivisch sein.

Wenn AA' durch Q' geht, so sind $A\mathfrak{a}$ und $A'\mathfrak{a}'$ eine innere und eine äussere gemeinschaftliche Tangente des Kreises M mit einem Kreise, dessen Mittelpunkt nach der eingeführten Bezeichnung $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M}'$ zu nennen ist, welche beiden Punkte hier zusammenfallen; die Berührungspunkte mit demselben sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, so dass $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ durch Q' geht, wie das Taf. V. Fig. 7. zu sehen ist, wenn man γ statt A', α statt A, $\mathfrak{D}'$ statt $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{D}$ statt $\mathfrak{a}$ nimmt. Von den beiden Berührungskreisen der AA' verwandelt sich der eine in den Punkt Q'. Wählt man Q' zum Kreise M_1, so fallen die Tangenten AB und AC sowohl, als $A'B'$ und $A'C'$ zusammen und die Sehnen DE und $D'E'$ werden Tangenten, DE in A', so dass es mit $A'\mathfrak{a}'$, $D'E'$ in A, so dass es mit $A\mathfrak{a}$ zusammenfällt,

und der Einschnittspunkt der Sehne DE in $A\mathfrak{a}$, sowie der Einschnittspunkt der Sehne $D'E'$ in $A'\mathfrak{a}'$ der Durchschnittspunkt von $A\mathfrak{a}$ und $A'\mathfrak{a}'$ ist, der, beiläufig erwähnt, auf der in P' auf der Centrale errichteten Senkrechten liegt. In diesem Durchschnittspunkte sind somit entsprechende Punkte vereinigt und die projectivische Beziehung der Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ mit den Punkten $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots$ ist eine perspectivische. Wählt man P' zum Kreise M_1, so werden die andern gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise M und $\mathfrak{M}$ (M_3 in Fig. 7.) die Sehnen DE, $D'E'$, welche $A\mathfrak{a}$ und $A'\mathfrak{a}'$ in den Punkten schneiden, die auf der in Q auf der Centralen errichteten Senkrechten liegen, woraus dann weiter folgt, dass Q' der Mittelpunkt der perspectivischen Beziehung der Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_1'$ ist. Die Strahlen der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, nämlich BC und $B'C'$, sind ebenfalls perspectivisch, da die nach Q', in welchem Punkte $\mathfrak{b}'$ liegt, gehenden, einander entsprechenden Strahlen in einen, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, zusammenfallen. Andere entsprechende Strahlen sind $\mathfrak{a}P'$ und $\mathfrak{a}'P'$, ferner $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$; und da $\mathfrak{b}$ auf der in P' auf der Centrale errichteten Senkrechten liegt, welche die Polare des Punktes Q' für alle Kreise des Systems ist, also den zu $AQ'A'$ vierten harmonischen Punkt enthalten muss, so ist diese Senkrechte die Gerade, auf der sich die entsprechenden Strahlen der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, oder die Linien BC und $B'C'$ schneiden.

Steht AA' auf der Centralen senkrecht, so fallen wieder die Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ in einen zusammen, für den und für M, $A\mathfrak{a}$ und $A'\mathfrak{a}'$ gemeinschaftliche, und zwar gleichartige Tangenten sind. Der Punkt $\mathfrak{b}$ liegt im Durchschnitt von AA' mit der Centrallinie, während $\mathfrak{b}'$ im Unendlichen liegt und der dazu gehörige Berührungskreis in das System der Potenzlinie und unendlichen Linie sich verwandelt. Die diesen Kreis berührenden Sehnen DE', $D'E$ sind der Potenzlinie parallel, welche Richtung auch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_1'$ haben. Die Sehnen DE und $D'E'$, ferner DD' und EE', sowie die Polaren BC und $B'C'$ von A und A' kreuzen sich auf der Centrale und liegen symmetrisch gegen dieselbe.

In diesen Betrachtungen sind folgende Sätze enthalten.

Lehrsatz II. Gehen von zwei Punkten eines Kreises eines Systems an die verschiedenen Kreise desselben Systems Tangenten, welche den ersten Kreis wieder schneiden, so erzeugen jede zwei nicht von demselben Punkte ausgegangenen Tangenten Sehnen, welche sich als Tangenten so an die beiden Berührungskreise der Verbindungslinie der Punkte vertheilen, dass die durch ungleichartige Tangenten erzeugten den einen, die durch gleichartige Tangenten erzeugten den andern berühren. Die von den

Polaren der Punkte gebildeten Strahlenbüschel, sowie die Einschnittspunkte der durch Tangenten desselben Punktes erzeugten Sehnen in die in diesem Punkte an den ersten Kreis gelegte Tangente, sind unter einander und mit den Mittelpunkten der verschiedenen Bestimmungskreise projectivisch. Diese projectivische Beziehung geht in perspectivische über, wenn die beiden Punkte so liegen, dass sie Berührungspunkte gemeinschaftlicher Tangenten des Kreises mit irgend einem Kreise des Systems sind.

Zusatz. Ungleichartige gemeinschaftliche Tangenten zweier Kreise eines Systemes werden von irgend einem dritten Kreise des Systems so geschnitten, dass ein Paar der Verbindungslinien der Schnittpunkte sich in einem der beiden zum Systeme gehörenden Punkte schneiden, das andere Paar dann natürlich auf der Polaren dieses Punktes, d. h. auf der im andern Punkte auf der Centrale Senkrechten.

Der Beweis des Zusatzes liegt in der Betrachtung des Falls, dass für irgend ein Paar Punkte A, A' der Punkt P' als Kreis M_1 genommen wird.

Interessant ist noch, dass eine Gerade durch den Durchschnitt zweier ungleichartigen gemeinschaftlichen Tangenten, durch τ_2 z. B. (Taf. V. Fig. 7.), mit der Verbindungslinie der Berührungspunkte $\alpha_2\delta_2$ parallel gezogen, auf der Verbindungslinie $\alpha_1\delta_1$ der Berührungspunkte des andern Kreises senkrecht stehen, und da $\alpha_1\delta_1$ die Polare von τ_2 für Kreis M_1 ist, durch den Mittelpunkt M_1 dieses Kreises gehen muss.

3. Ausser den in der vorigen Nummer betrachteten Seitenpaaren DD', EE' und DE', $D'E$ des Vierecks $DD'EE'$ muss auch, nach §. 6., das dritte, DE, $D'E'$, einen gemeinschaftlichen Berührungskreis haben, und zwar so, dass alle sechs Berührungspunkte $\mathfrak{c}$ auf DD', $\mathfrak{d}$ auf EE', $\mathfrak{f}$ auf DE', $\mathfrak{l}$ auf $D'E$, $\mathfrak{g}$ auf $D'E'$, $\mathfrak{h}$ auf DE in gerader Linie liegen. Für die Sehne DE ist schon in der ersten Nummer dieses Paragraphen der Berührungskreis $\mathfrak{M}$ mit dem Berührungspunkte K_1 in der Linie BC nachgewiesen, dem für die Sehne $D'E'$ der Berührungskreis $\mathfrak{M}'$ mit dem Berührungspunkte K_1' im Durchschnitt von $B'C'$ mit $D'E'$ entspricht. Es fragt sich jetzt, ob der gemeinschaftliche Berührungskreis der Sehnen DE und $D'E'$ mit einem dieser Kreise $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ zusammenfällt. Die Vierecke $BB'CC'$ und $DD'EE'$ liegen so, dass zwei Paare zugeordneter Seiten ein und dieselbe Gerade $\mathfrak{cf}$ in denselben Punkten treffen:

BB' und DD' in $\mathfrak{c}$,

CC' und EE' in $\mathfrak{d}$,

BC' und DE' in f,
$B'C$ und $D'E$ in l.

Da nun die sechs Durchschnittspunkte der drei Paare zugeordneter Seiten eines Vierecks mit einer Geraden eine Involution bilden, also der sechste Punkt durch die fünf andern unzweideutig bestimmt ist, so folgt, dass von den dritten Seitenpaaren der Vierecke entweder beide Seiten die Linie cf in denselben Punkten schneiden, oder keine mit einer des andern Paars ihren Durchschnittspunkt auf cf hat. Sollte also z. B. der Kreis 𝔐 der gemeinschaftliche Berührungskreis der Sehnen DE und $D'E'$ sein, oder sollte K_1 mit 𝔥 zusammenfallen, BC und cf sich in demselben Punkte schneiden wie DE und cf, so müssten im Allgemeinen auch $B'C'$ und $D'E'$ sich auf cf schneiden und K_1' müsste mit 𝔤 zusammenfallen; und da an $D'E'$ in 𝔤 nur ein einziger Berührungskreis möglich ist, so müsste 𝔐 mit 𝔐' zusammenfallen, was nur in ganz besonderen Fällen stattfinden kann. Es folgt so, dass im Allgemeinen der gemeinschaftliche Berührungskreis der Sehnen DE und $D'E'$ nicht mit 𝔐 oder 𝔐' zusammenfällt, dass er also ein ganz bestimmter und zwar durch eine der beiden Sehnen vollkommen bestimmter Kreis ist, oder, da A und A' beliebige Punkte des Kreises M sind, dass er allein vom Kreise M_1 und gar nicht vom Punkte A oder A' abhängt, vielmehr für alle Punkte des Kreises M derselbe ist. Es versteht sich von selbst, dass es Lagen für den Punkt A gibt, bei welchen der in Rede stehende Kreis mit dem Kreise 𝔐 derselbe ist; und namentlich ist dies der Fall, wenn eine der Tangenten AB oder AC, z. B. AC, durch einen der Durchschnittspunkte der Kreise P (oder Q) geht; es fallen dann C, E und beide Berührungspunkte der Sehne DE ebenfalls nach P; die oben erwähnte Involution wird illusorisch und beweist nicht mehr, dass die Kreise 𝔐' und 𝔐 zusammenfallen müssen. Der hier abgeleitete Satz bildet die Ergänzung des Lehrsatzes I.; er lautet:

Lehrsatz III. Die von den verschiedenen Punkten eines Kreises an einen zweiten Kreis gelegten Tangenten bestimmen auf dem ersten Kreise Sehnen, welche einen dritten Kreis berühren, der zum System der beiden ersten gehört.

4. Man nehme nun einen zweiten Bestimmungskreis M_2 hinzu und lege an denselben von A und A' die, im Fall der Taf. IV. Fig. 6., gleichartigen Tangenten AFH und $A'F'H'$. Nach der zweiten Nummer dieses Paragraphen müssen dann AA', DD', HH' denselben Berührungskreis haben und es müssen die Berührungspunkte f auf HH' und $\mathfrak{b}_1$ ebenso in der Geraden FF' liegen, wie c und b

der Geraden BB', so dass diese Berührungspunkte abhängig
d von den Punkten A und A'. Weil aber auf diese Weise
D' und HH' denselben Kreis berühren, so müssen auch irgend
Paar andere gegenüberstehende Seiten des Vierecks $DD'HH'$,
o die Seiten DH und $D'H'$, einen gemeinschaftlichen Berüh-
gskreis haben, so dass die Berührungspunkte auf $\mathfrak{cf}$ liegen.
ese Berührungspunkte erscheinen demgemäss ebenfalls als ab-
ngig von den Punkten A und A', und man könnte meinen, der
rührungskreis ändere sich, wenn einer dieser Punkte seine
ge auf dem Kreise M änderte. Jedenfalls bleibt es zweifelhaft,
DH zwei Berührungskreise hat, ob der mit $D'H'$ gemeinsame
inen Berührungspunkt auf der Geraden BF oder in solcher
ge hat, dass seine Verbindungslinie mit A durch den Durch-
hnittspunkt von BH und DF geht (§. 4., 3.). Wollte man aber
s Erstere annehmen, so schnitten sich die Seiten AD und $\mathfrak{bc}$,
H und $\mathfrak{bf}$, DH und $\mathfrak{cf}$ der Dreiecke ADH und $\mathfrak{bcf}$ auf gerader
nie, und es müssten daher die Verbindungslinien der entspre-
enden Ecken, nämlich $A\mathfrak{b}$, $D\mathfrak{c}$, $H\mathfrak{f}$ sich in demselben Punkte
hneiden, was nicht möglich ist, da diese Linien Tangenten des-
lben Kreises sind. Es bleibt sonach für den in Rede stehen-
n Berührungspunkt nur die zweite der beiden Lagen übrig, und
folgt, dass der Berührungskreis durch den Punkt A schon voll-
mmen bestimmt ist, oder da A irgend ein Punkt des Kreises M
t, dass er durch die Kreise M_1 und M_2 vollkommen bestimmt
d für alle Punkte A derselbe ist. Hätte man statt der Tangente
$'D'$ die auf der andern Seite des Mittelpunkts an den Kreis M_2
ehende genommen und mit DH die Sehne zusammengestellt,
elche diese Tangente mit $A'E'$ auf dem Kreise M erzeugte, oder
ätte man überhaupt irgend ein Paar durch gleichartige Tangen-
n erzeugte Sehnen zusammengestellt, so wäre man durch ähn-
che Betrachtungen zu demselben Berührungskreise gelangt. Die
ehne HE dagegen, mit $H'E'$ oder irgend einer durch ungleich-
rtige Tangenten erzeugten Sehne zusammengestellt, führt auf
em obigen Wege zu einem zweiten Berührungskreise, der für
ngleichartige Tangenten gilt. Somit wäre denn auch der im Ein-
ange angeführte Poncelet'sche Satz, und zwar durch blosse
eometrische Betrachtungen, erwiesen. Des Zusammenhangs wegen
telle ich diesen Satz hier nochmals auf.

Lehrsatz IV. Legt man von den verschiedenen Punkten
ines Kreises eines Systems an jeden von zwei anderen Kreisen
les Systems eine Tangente, so bestimmen diese Tangenten auf
lem ersten Kreise Sehnen, welche zwei feste Kreise des Systems
berühren, und zwar so, dass alle durch gleichartige Tangenten

entstandenen Sehnen den einen, alle durch ungleichartige T
genten entstandenen den anderen berühren.

Die Anwendung auf eine grössere Anzahl von Kreisen unt
liegt keiner Schwierigkeit. Hat man im Kreise M irgend zw
Polygone, die man sich leicht ohne Figur vorstellen kann und d
durch $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ bezeichnet seien, so dass A
und $A'B'$, BC und $B'C'$, u. s. w. Tangenten sind der Kreise M_1
M_2, u. s. w., so werden auch die letzten Seiten EA, $E'A'$ Tan-
genten desselben Kreises M_5 sein, wenn nur in Bezug auf gleich-
artige oder ungleichartige Lage, BA und BC für B, CB und CD
für C, DC und DE für D sich ebenso verhalten wie $B'A'$ und
$B'C'$ für B', $C'B'$ und $C'D'$ für C', $D'C'$ und $D'E'$ für D'.

Die Anzahl der für die gegebenen Kreise möglichen Berüh-
rungskreise der letzten Polygonseite wächst natürlich mit der An-
zahl der gegebenen Kreise: es sind deren für zwei Kreise zwei
für drei vier, für vier acht und so fort nach Potenzen von Zwei

Es seien (Taf. V. Fig. 7.) die Bestimmungskreise wieder mi
M_1, M_2 bezeichnet, α, β, α', β' seien die Einschnittspunkte de
äusseren gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kreise in den Krei
M; γ, δ, γ', δ' die der inneren. Von β aus gehen an M_1 und
M_2 die gleichartigen Tangenten $\beta\alpha_1$, $\beta\alpha_2$, welche in dieselbe Ge-
rade zusammenfallen und als Sehne die Tangente $\alpha\mathfrak{D}$ in α erzeu-
gen. Diese Tangente muss also auch eine Tangente des Berüh-
rungskreises M_3 der durch gleichartige Tangenten erzeugten Sehnen
sein. Dasselbe gilt für die in α' an M gelegte Tangente, so wi
für diejenigen, welche in γ und γ' an M gelegt werden, da auch
$\delta\gamma_1$ und $\delta\gamma_2$, sowie $\delta'\delta_1$ und $\delta'\delta_2$, gleichartige Tangenten der Kreise
M_1 und M_2 für den Punkt δ und den Punkt δ' sind. Für die
Punkte α, α', γ, γ' dagegen sind die gemeinschaftlichen Tangen-
ten der Kreise M_1 und M_2 ungleichartig und es müssen daher die
in β, β', δ, δ' an M gelegten Tangenten den für ungleichartige
Berührung geltenden Kreis berühren. Diese Betrachtung führt
zunächst zu einem Zusatze zum Lehrsatz IV.

Zusatz. Die Durchschnittspunkte des ersten Kreises mit
den den beiden Bestimmungskreisen gemeinschaftlichen Tangen-
ten sind die Berührungspunkte seiner gemeinschaftlichen Tangen-
ten mit den beiden Berührungskreisen der erzeugten Sehnen.

Die obige Betrachtung macht es aber auch möglich, alle diese
Sätze von einer neuen und allgemeineren Seite aufzufassen.

Der Kreis M_3 ist durch den Punkt α vollkommen bestimmt
und bleibt daher derselbe, so lange die gemeinschaftliche Tan-

gente der Kreise M_1 und M_2, nämlich die Linie $\alpha_1\alpha_2$, den Kreis M in demselben Punkte α schneidet. Wenn man also irgend ein Paar Kreise des Systems construirt, welche eine gerade Linie berühren, die durch einen festen Punkt geht, und von irgend einem Punkte des durch diesen festen Punkt bestimmten Kreises des Systems Tangenten an dieselben legt, so bestimmen diese mit dem letztgenannten Kreise Sehnen, die einen festen Kreis berühren. Dabei ist Folgendes zu bedenken. Ist die durch α gehende Gerade eine äussere gemeinschaftliche Tangente ihrer Berührungskreise und liegt der zweite Einschnittspunkt β ausserhalb der Berührungspunkte α_1, α_2, so müssen die erzeugenden Tangenten gleichartige sein, ebenso wenn die Linie eine innere gemeinschaftliche Tangente ist und der zweite Einschnittspunkt zwischen den Berührungspunkten liegt; in den andern Fällen muss man ungleichartige Tangenten wählen. Dass zu jedem festen Durchschnittspunkt α gemeinschaftlicher Tangenten von Kreispaaren eines Systems sich noch drei andere feste Punkte hinzufinden, α', γ, γ', in welchen sich die andern gemeinschaftlichen Tangenten der Paare schneiden, ist aus den bisherigen Betrachtungen klar; man findet diese Punkte durch den durch α gelegten Kreis und durch Gerade, die man theils der Potenzlinie parallel, theils durch die Punkte P' und Q' zieht. Die in dieser Weise von α aus gezogenen Geraden bilden zugleich die Grenzen zwischen gleichartigen und ungleichartigen Bestimmungstangenten. Ist nämlich ι der Durchschnittspunkt der Linie $\alpha_1\alpha_2$ mit der Potenzlinie, so findet man die Berührungspunkte α_1, α_2 durch die Beziehung

$$\iota\alpha_1 = \iota\alpha_2 = \iota P' = \iota Q'.$$

So lange $\alpha_1\alpha_2$ oder $\alpha\beta$ zwischen γ und P' hindurchgeht, ist $\iota\sigma > \iota P'$, weil es dem stumpfen Winkel $\iota P'\sigma$ gegenüberliegt; σ ist also ein äusserer Aehnlichkeitspunkt und β liegt ausserhalb der Berührungspunkte, so dass die Bestimmungstangenten gleichartige sein müssen. Geht $\alpha\beta$ zwischen P' (oder γ') und α' hindurch, so ist $\iota P' > \iota\sigma$; der Punkt σ ist innerer Aehnlichkeitspunkt, während β die vorige Lage hat, so dass die Bestimmungstangenten ungleichartige sein müssen. Der gewonnene Lehrsatz ist nun:

Lehrsatz V. Legt man an jeden der beiden, zu einem bestimmten System gehörenden Berührungskreise irgend eines Strahles eines festen Punktes, eine Tangente von irgend einem Punkte des durch den festen Punkt bestimmten Kreises, und zwar so, dass diese Tangenten in Bezug auf Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit sich ebenso verhalten, wie die in dem Strahle vereinigten Tangenten für den zweiten Einschnittspunkt des Strahles, so be-

stimmen diese Tangenten mit dem durch den festen Punkt
den Kreise Sehnen, welche Tangenten sind des zweiten
rungskreises der im festen Punkte an den durch ihn besti
Kreis gelegten Tangente.

Man nenne die von einem Punkte A des durch den festen
α bestimmten Kreises M an den ersten Berührungskreis
Strahls gelegten Tangenten a_1 und a_1', und es sei die na
Bedingung des Lehrsatzes zu a_1 gehörende des Kreises M
des zweiten Berührungskreises des Strahles, a_2, die zu
hörende a_2'; ebenso b_1 und b_1', b_2 und b_2' für ein Paar
rungskreise eines zweiten Strahles u. s. w. Dann werden,
der Punkt A feststeht, auch durch die anderen, der Bedi
des Satzes nicht entsprechenden Tangentenpaare a_1 und a_2
und a_2, b_1 und b_2', b_1' und b_2, u. s. w. Sehnen erzeugt,
einen festen Berührungskreis haben. Denn bezeichnet m
Einschnittspunkte der Tangenten in den Kreis M entspre
mit deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$, u. s. f., so sind nach
satz V. $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2'$, u. s. f. Tangenten des
die Tangente in α bestimmten Kreises, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2'$,
aber Tangenten des durch die Tangente in A bestimmten K
nach Lehrsatz I. Betrachtet man also die Dreiecke $\mathfrak{A}_1$
$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2'$, u. s. f., so sind zwei Seiten derselben
genten fester Kreise, also auch die dritten.

Ich bemerke noch zum Schluss dieses Paragraphen, da
Strahlen in der obigen Beziehung a_1 und a_2, a_1' und a_2', b
b_2', b_1 und b_2, u. s. f. ein Strahlensystem bilden, das jed
liebigen Kreis, unabhängig von dem Systeme, aus dem das
lensystem hervorgegangen, in Sehnen schneidet, die Tan
eines zweiten Kreises sind, wenn der Mittelpunkt A dieses
lensystems in irgend einen Punkt des Umfangs des Kreise
legt wird. Denn die zu den Winkeln des Strahlensysten
Peripheriewinkeln gehörenden Sehnen haben unter einander
dasselbe Verhältniss, welches auch der Kreis sei, und di
sammtheit dieser Sehnen für irgend einen Kreis ist der Ges
heit derselben für den Kreis M ähnlich.

§. 10.

Die Gleichung zwischen den Radien und Mittelpu entfernungen.

1. Die Ableitung der Gleichung, die sich schon in
und §. 8. ergeben hat, ist nun, nachdem die geometrische

ıngen des §. 9. vorausgegangen, auf einfachere Art möglich.
ann irgend einen besonderen Fall zu Grunde legen, z. B.
ass der Ausgangspunkt der bestimmenden Tangenten einer
meinschaftlichen Punkte des Systems, oder den, dass der-
einer der in der Centrale befindlichen Punkte des Kreises
Zu der einfachsten Art aber führt der Zusatz zum Lehr-
. des vorigen Paragraphen. Die Tangente in α (Taf. V.
), deren zweiter Berührungskreis $\mathfrak{D}$ zum Berührungspunkte
chneide die Potenzlinie in n; αK liege zwischen der Cen-
und der gemeinschaftlichen Tangente der Kreise M_1 und
enkrecht auf dieser, die Senkrechte von α auf die Potenz-
i gleich x. Es ist dann

$$\frac{M_2\alpha_2 - \alpha K}{\alpha\alpha_2} = \frac{\alpha K - M_1\alpha_1}{\alpha\alpha_1},$$

$$\alpha K(\alpha\alpha_1 + \alpha\alpha_2) = M_2\alpha_2 . \alpha\alpha_1 + M_1\alpha_1 . \alpha\alpha_2,$$

nach der eingeführten Bezeichnung $MM_1 = q_1$, $MM_2 = q_2$,
r_2, $M_1\alpha_1 = r_1$, $M\alpha = r$ gesetzt:

$$\alpha K = \frac{r_2 . \sqrt{2q_1x} + r_1\sqrt{2q_2x}}{\sqrt{2q_1x} + \sqrt{2q_2x}}$$

$$= \frac{r_2\sqrt{q_1} + r_1\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

ıt nun $\alpha\eta$ auf αM, $\alpha\iota$ auf αK, $\iota\eta$ auf MK senkrecht, so dass

$$\text{Dr. } \alpha\iota\eta \sim \text{Dr. } \alpha KM$$

$$\alpha\iota : \alpha\eta = \alpha K : \alpha M.$$

ist

$$\alpha\eta = \eta\vartheta = \tfrac{1}{2}\alpha\vartheta$$

MM_3 durch q_3 bezeichnet,

$$\alpha\vartheta = \sqrt{2q_3x}.$$

ınkt ι ist die Mitte von $\alpha_1\alpha_2$, und es ist

$$\alpha_2\alpha - \alpha_1\alpha = 2\alpha\iota,$$

$$\alpha\iota = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2q_2x} - \sqrt{2q_1x}),$$

velche Werthe die Proportion übergeht in

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{2q_2x} - \sqrt{2q_1x}) : \tfrac{1}{2}\sqrt{2q_3x} = \alpha K : r,$$

$$\alpha K = \frac{r(\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1})}{\sqrt{q_3}},$$

folglich

$$\frac{r_2\sqrt{q_1} + r_1\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}} = \frac{r(\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1})}{\sqrt{q_3}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Gleichung gilt, wenn die an M_1 und M_2 gelegten Tangenten gleichartig sind, und dass sie für ungleichartige Tangenten übergeht in

$$\frac{r_1\sqrt{q_2} - r_2\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}} = \frac{r(\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1})}{\sqrt{q_3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Mittelst des Stewart'schen Satzes, nach welchem

$$r^2(q_2 - q_1) + r_2^2 q_1 - r_1^2 q_2 = q_1 q_2 (q_2 - q_1),$$

$$q_2 - q_1 = (\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1})(\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}) = \frac{r_1^2 q_2 - r_2^2 q_1}{r^2 - q_1 q_2},$$

gehen die Gleichungen (1) und (2) über in

$$\sqrt{q_3} = \frac{r(r_1\sqrt{q_2} - r_2\sqrt{q_1})}{r^2 - q_1 q_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\sqrt{q_3} = \frac{r(r_1\sqrt{q_2} + r_2\sqrt{q_1})}{r^2 - q_1 q_2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese letzteren Formen muss man wählen, wenn die beiden gegebenen Kreise in einen zusammenfallen, $q_2 = q_1$ wird. Für gleichartige Tangenten fällt der Kreis M_3 mit M zusammen und es ist

$$\sqrt{q_3} = 0.$$

Für ungleichartige erhält man:

$$\sqrt{q_3} = \frac{2rr_1\sqrt{q_1}}{r^2 - q_1^2}.$$

Ist für diesen Fall der Gleichheit von q_2 und q_1 der Kreis M_3 gegeben, so gibt es zwei Kreise M_1, deren einer die Linie αP in P, deren anderer die Linie αQ in Q berührt, wenn α wie bisher den Berührungspunkt der gemeinschaftlichen Tangente der Kreise M und M_3 bedeutet; denn (Lehrs. V.) nur für die Strah-

', αQ fallen die beiden Bestimmungskreise, welche die n des Punktes α berühren müssen, in einen zusammen.

s den obigen Gleichungen (1) und (2) überzeugt man sich wenn man nicht geometrische Betrachtungen vorzieht, dass ührungen entweder für alle Ecken des dem Kreise M ein-ebenen Dreiecks ungleichartig, oder für zwei Ecken gleich-ir die dritte ungleichartig sind, indem die Gleichungen nur nden zwei Weisen neben einander bestehen können, ent-

$$\left\{\begin{array}{l} r_1\sqrt{q_3 q_2}+r_2\sqrt{q_1 q_3}=r(q_1-q_2), \\ r_1\sqrt{q_3 q_2}+r_3\sqrt{q_1 q_2}=r(q_1-q_3), \\ r_2\sqrt{q_1 q_3}-r_3\sqrt{q_1 q_2}=r(q_3-q_2), \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} r_1\sqrt{q_2 q_3}-r_2\sqrt{q_1 q_3}=r(q_2-q_1), \\ r_1\sqrt{q_3 q_2}-r_3\sqrt{q_1 q_2}=r(q_3-q_2), \\ r_3\sqrt{q_1 q_2}-r_2\sqrt{q_1 q_3}=r(q_2-q_3). \end{array}\right.$$

; den Gleichungen (1) und (3) gewinnt man durch Elimi-von r_2 (oder r_1) noch eine neue Form:

$$\left.\begin{array}{rl} 2rr_1\sqrt{q_2 q_3} & =r^2(q_2-q_1+q_3)-q_1\cdot q_2\cdot q_3 \\ & =r^2(q_2+q_3)-q_1(r^2+q_2 q_3) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

(2) und (4) erhält man dieselbe Gleichung.

Der durch diese Gleichungen ausgedrückte Zusammenhang n den Berührungskreisen der Sehnen eines Kreises führt m. neuen selbständigen Beweise des Lehrsatzes IV. Es :h nämlich die allgemeine Gültigkeit der Gleichungen leicht , wenn dieselbe für einen einzigen besondern Fall erwie-

Um die Untersuchung von der Realität oder Unmöglich-gemeinschaftlichen Tangenten oder der Durchschnittspunkte ise unabhängig zu machen, wähle ich den Endpunkt G . Fig. 8.) des in der Centrale liegenden Durchmessers GH ises M. Von G gehen an die Kreise M_1 und M_2 die tigen Tangenten $G\mathfrak{a}A$, $G\mathfrak{b}B$; A_1 und B_1 sind die Pro-n der Punkte A und B auf OM. Es ist dann, die Radien telpunktsentfernungen wie bisher bezeichnet, und $OM=m$

$$GA:GH=G\mathfrak{a}:GM_1,$$

$$Ga = \sqrt{2q_1 . GO} = \sqrt{2q_1 . (r+m)},$$

folglich

$$GA = \frac{2r\sqrt{2q_1(r+m)}}{r+q_1},$$

ebenso

$$GB = \frac{2r\sqrt{2q_2(r+m)}}{r+q_2}.$$

Wählt man für AB den hier allein zulässigen Berührung M_3, dessen Berührungspunkt zwischen A und B liegt, so

$$AB = \sqrt{2q_3 . OA_1} + \sqrt{2q_3 . OB_1}.$$

Ferner ist

$$Aa = \sqrt{2q_1 . OA_1},$$

$$Aa : Ga = HM_1 : GM_1,$$

$$Aa = Ga . \frac{r-q_1}{r+q_1};$$

folglich

$$\sqrt{2q_1 . OA_1} = \sqrt{2q_1(r+m)}\,\frac{r-q_1}{r+q_1},$$

$$\sqrt{OA_1} = \sqrt{r+m} \cdot \frac{r-q_1}{r+q_1};$$

ebenso

$$\sqrt{OB_1} = \sqrt{r+m} . \frac{r-q_2}{r+q_2}.$$

Für HA und HB findet man

$$HA : M_1 a = HG . M_1 G,$$

$$HA = \frac{2rr_1}{r+q_1},$$

und ebenso

$$HB = \frac{2rr_2}{r+q_2}.$$

Nach dem ptolemäischen Satze ist

$$AB . GH + AG . HB = BG . AH,$$

und wenn man hier die gefundenen Werthe einsetzt:

$$2r.\sqrt{2q_3}.\sqrt{r+m}\left(\frac{r-q_1}{r+q_1}+\frac{r-q_2}{r+q_2}\right)+\frac{2r\sqrt{2q_1(r+m)}}{r+q_1}.\frac{2rr_2}{r+q_2}$$
$$=\frac{2r\sqrt{2q_2(r+m)}}{r+q_2}.\frac{2rr_1}{r+q_1},$$

elche Gleichung sich leicht auf die Gleichung (3) der vorigen ummer zurückführen lässt. Hätte man ein Paar ungleichartige angenten $G\mathfrak{b}B$ und $G\mathfrak{a}'A'$ gewählt, so würde man zu der Gleiung (4) gelangt sein. Die Gleichungen der vorigen Nummer nd also für den Berührungskreis einer Sehne erwiesen, welche urch Tangenten entsteht, die von G ausgehen; und zwar ist zu emerken, dass für eine durch gleichartige Tangenten von G aus ntstandene Sehne das q_3 kleiner ist, als das zu ungleichartigen 'angenten gehörende, wovon man sich augenblicklich durch die leichungen überzeugt.

Es muss nun gezeigt werden, dass wenn die Endpunkte einer ehne AB mit G verbunden werden, die Gleichungen nicht nur ur Auffindung des Berührungskreises der Sehne AB, aus denen on GA und GB, sondern auch zur Auffindung eines dieser letzeren aus den beiden anderen dienen, oder dass sie überhaupt gültig sind, wenn nur eine Ecke des Dreiecks in G liegt.

Da von A an den Kreis M_3 noch eine Tangente geht, ausser AB, die man sich unter $A\mathfrak{B}$ vorstelle, so gibt es auch ausser GB noch eine zweite $G\mathfrak{B}$, welche mit GA den Kreis M_3 hervorbringt. Der zu dieser Sehne $G\mathfrak{B}$ gehörende Berührungskreis, derjenige natürlich, dessen Berührungspunkt zwischen G und $\mathfrak{B}$ liegt, habe den Mittelpunkt $\mathfrak{M}_2$, und es sei $M\mathfrak{M}_2=\mathfrak{q}_2$. Da $\mathfrak{B}$ auf dem Bogen zwischen A und G liegen muss, so ist, übereinstimmend mit der Bemerkung über gleichartige und ungleichartige Tangenten,

$$\mathfrak{q}_2 < q_2.$$

Aus den Gleichungen (1) und (3)

$$(r_1\sqrt{q_2}+r_2\sqrt{q_1}).\sqrt{q_3}=r(q_2-q_1),$$
$$(r_1\sqrt{q_2}-r_2\sqrt{q_1}).r=\sqrt{q_3}\,(r^2-q_1q_2)$$

indet man

$$2.r_1\sqrt{q_2}.r\sqrt{q_3}=r^2(q_2-q_1)+q_3(r^2-q_1q_2),$$

nd da nach dem Stewart'schen Satze

$$r^2 \cdot (q_1 - q_3) + r_1^2 \cdot q_3 - r_3^2 \cdot q_1 = q_1 \cdot q_3 (q_1 - q_3),$$

$$r_1^2 q_3 - r_3^2 q_1 = (q_3 - q_1)(r^2 - q_1 q_3),$$

und die vorige Gleichung sich umformen lässt in

$$2rr_1 \sqrt{q_2 q_3} = r^2 (q_3 - q_1) + q_2 (r^2 - q_1 q_3),$$

so ergibt sich, wenn man $r^2 - q_1 q_3$ eliminirt:

$$2rr_1 \sqrt{q_2 q_3} (q_3 - q_1) = r^2 (q_3 - q_1)^2 + q_2 (r_1^2 q_3 - r_3^2 q_1),$$

$$r^2 (q_3 - q_1)^2 - 2rr_1 \sqrt{q_2 q_3} (q_3 - q_1) + r_1^2 q_2 q_3 = r_3^2 q_1 q_2,$$

$$r(q_3 - q_1) - r_1 \sqrt{q_2 q_3} = \pm r_3 \sqrt{q_1 q_2},$$

$$\sqrt{q_2} = \frac{r(q_3 - q_1)}{r_1 \sqrt{q_3} \pm r_3 \sqrt{q_1}},$$

oder, da $q_1 > q_3$:

$$\sqrt{q_2} = \frac{r(q_1 - q_3)}{-r_1 \sqrt{q_3} \mp r_3 \sqrt{q_1}},$$

welche Werthe sich ihrer Grösse gemäss so vertheilen, dass

$$\sqrt{q_2} = \frac{r(q_1 - q_3)}{r_3 \sqrt{q_1} - r_1 \sqrt{q_3}},$$

$$\sqrt{\mathfrak{q}_2} = -\frac{r(q_1 - q_3)}{r_3 \sqrt{q_1} + r_1 \sqrt{q_3}}.$$

Das Vorzeichen — im Werthe von $\sqrt{\mathfrak{q}_2}$, welches übrigens auf $\mathfrak{q}_2$ selbst keinen Einfluss hat, kommt daher, dass man von einer Gleichung ausgegangen ist, in welcher $q_2 > q_1$ war, während $\mathfrak{q}_2 < q_1$, so dass für $\mathfrak{q}_2$ und das zugehörige $\mathfrak{r}_2$ die Differenz $r_1 \sqrt{q_2} - r_2 \sqrt{q_1}$ hätte umgestellt und in $\mathfrak{r}_2 \sqrt{q_1} - r_1 \sqrt{\mathfrak{q}_2}$ verwandelt werden müssen.

Nachdem nun die Gültigkeit der Gleichungen (1) bis (4) für Dreiecke nachgewiesen ist, die eine Ecke in G haben, fehlt noch der Beweis der allgemeinen Gültigkeit. Man nehme ein beliebiges Dreieck ABC und verbinde dessen Ecken mit G und denke sich dann die Berührungskreise der sechs entstandenen Sehnen, deren Berührungspunkte alle zwischen den Endpunkten der Sehnen liegen mögen. Der Berührungskreis von GA sei M_1, von $GB - M_2$, von $GC - M_6$, von $AB - M_3$, von $AC - M_4$, von

$BC - M_5$. Man hat dann mit Berücksichtigung der Art der Berührung für das Dreieck CBG:

$$\frac{\sqrt{q_6}}{r} = \frac{q_2 - q_5}{r_5\sqrt{q_2} + r_2\sqrt{q_5}} = \frac{r_5\sqrt{q_2} - r_2\sqrt{q_5}}{r^2 - q_2 q_5},$$

für das Dreieck CAG:

$$\frac{\sqrt{q_6}}{r} = \frac{q_1 - q_4}{r_4\sqrt{q_1} + r_1\sqrt{q_4}} = \frac{r_4\sqrt{q_1} - r_1\sqrt{q_4}}{r^2 - q_1 q_4},$$

folglich

$$\frac{q_2 - q_5}{r_5\sqrt{q_2} + r_2\sqrt{q_5}} = \frac{r_4\sqrt{q_1} - r_1\sqrt{q_4}}{r^2 - q_1 q_4},$$

$$\frac{q_1 - q_4}{r_4\sqrt{q_1} + r_1\sqrt{q_4}} = \frac{r_5\sqrt{q_2} - r_2\sqrt{q_5}}{r^2 - q_2 q_5},$$

oder

$$(q_2 - q_5)(r^2 - q_1 q_4) = (r_5\sqrt{q_2} + r_2\sqrt{q_5})(r_4\sqrt{q_1} - r_1\sqrt{q_4}),$$

$$(q_1 - q_4)(r^2 - q_2 q_5) = (r_5\sqrt{q_2} - r_2\sqrt{q_5})(r_4\sqrt{q_1} + r_1\sqrt{q_4}).$$

Nun ist

$$(q_2 - q_5)(r^2 - q_1 q_4) - (q_1 - q_4)(r^2 - q_2 q_5)$$
$$= (q_2 - q_1)(r^2 - q_4 q_5) - (q_5 - q_4)(r^2 - q_1 q_2),$$

$$(r_5\sqrt{q_2} + r_2\sqrt{q_5})(r_4\sqrt{q_1} - r_1\sqrt{q_4}) - (r_5\sqrt{q_2} - r_2\sqrt{q_5})(r_4\sqrt{q_1} + r_1\sqrt{q_4})$$
$$= (r_5\sqrt{q_4} + r_4\sqrt{q_5})(r_2\sqrt{q_1} - r_1\sqrt{q_2})$$
$$- (r_5\sqrt{q_4} - r_4\sqrt{q_5})(r_2\sqrt{q_1} + r_1\sqrt{q_2}),$$

folglich

$$(q_2 - q_1)(r^2 - q_4 q_5) - (q_5 - q_4)(r^2 - q_1 q_2)$$
$$= (r_5\sqrt{q_4} + r_4\sqrt{q_5})(r_2\sqrt{q_1} - r_1\sqrt{q_2})$$
$$- (r_5\sqrt{q_4} - r_4\sqrt{q_5})(r_2\sqrt{q_1} + r_1\sqrt{q_2}).$$

Zugleich ist, wegen des Dreiecks ABG:

$$q_2 - q_1 = \frac{(r_1\sqrt{q_2} + r_2\sqrt{q_1})\sqrt{q_3}}{r},$$

$$r_1\sqrt{q_2} - r_2\sqrt{q_1} = \frac{(r^2 - q_1 q_2)\sqrt{q_3}}{r},$$

und nach dem Stewart'schen Satze:

$$r^2.(q_5-q_4)+r_5^2.q_4-r_4^2 q_5=q_4.q_5(q_5-q_4),$$

$$r_5\sqrt{q_4}-r_4\sqrt{q_5}=\frac{(q_5-q_4)(q_4q_5-r^2)}{r_5\sqrt{q_4}+r_4\sqrt{q_5}},$$

wodurch die Gleichung übergeht in

$$(r_1\sqrt{q_2}+r_2\sqrt{q_1})(r^2-q_4q_5)\frac{\sqrt{q_3}}{r}-(q_5-q_4)(r^2-q_1q_2)$$

$$=-(r^2-q_1q_2)(r_5\sqrt{q_4}+r_4\sqrt{q_5})\frac{\sqrt{q_3}}{r}$$

$$-\frac{(q_5-q_4)(q_4q_5-r^2)(r_2\sqrt{q_1}+r_1\sqrt{q_2})}{r_5\sqrt{q_4}+r_4\sqrt{q_5}}$$

oder

$$\frac{\sqrt{q_3}}{r}\{(r^2-q_4q_5)(r_1\sqrt{q_2}+r_2\sqrt{q_1})+(r^2-q_1q_2)(r_5\sqrt{q_4}+r_4\sqrt{q_5})\}$$

$$=\frac{q_5-q_4}{r_5\sqrt{q_4}+r_4\sqrt{q_5}}\{(r^2-q_1q_2)(r_5\sqrt{q_4}+r_4\sqrt{q_5})$$

$$+(r^2-q_4q_5)(r_1\sqrt{q_2}+r_2\sqrt{q_1})\}$$

oder

$$\frac{\sqrt{q_3}}{r}=\frac{q_5-q_4}{r_5\sqrt{q_4}+r_4\sqrt{q_5}},$$

wie es für das Dreieck ABC sein muss.

§. 11.

Coordinatenwerthe für Sehnen, welche einen Kreis berühren.

Die Sehne AB des Kreises M werde vom Kreise M_1 in D berührt, die Projectionen der Punkte A, B, D auf die Centrale seien A_1, B_1, D_1; GG_1 und HH_1 seien Senkrechte von den Endpunkten G, H des Durchmessers GH auf AB. Setze wie bisher $OM=m$, $OM_1=m_1$, $MM_1=q_1$, $MP=r$, $M_1P=r_1$, ferner $AA_1=y_1$, $OA_1=x_1$, $BB_1=y_2$, $OB_1=x_2$.

Dass

$$\left.\begin{aligned} y_1^2 &= A_1G.A_1H=(r+m-x_1)(r-m+x_1), \\ y_2^2 &= (r+m-x_2)(r-m+x_2) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ist bekannt.

Weil die Peripheriewinkel über HB an A und G, so wie die über AG an B und H u. s. w. gleich sind, so hat man folgende ähnliche Dreiecke:

$$AHA_1 \sim GBG_1,$$
$$HAH_1 \sim BGB_1,$$
$$BHB_1 \sim GAG_1,$$
$$HBH_1 \sim AGA_1;$$

also

$$HA_1 : HA = BG_1 : BG,$$
$$HA : H_1A = BG : B_1G$$
u. s. w.

woraus man durch Multiplication erhält:

$$HA_1 : H_1A = BG_1 : B_1G,$$

und da

$$H_1A = G_1B,$$
$$H_1B = G_1A,$$

weil ein Perpendikel von M auf AB sowohl AB als G_1H_1 halbirt, so ist

$$H_1A^2 = G_1B^2$$
$$= HA_1 . GB_1,$$

woraus sich die Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} H_1A^2 = G_1B^2 = (r - m + x_1)(r + m - x_2), \\ H_1B^2 = G_1A^2 = (r - m + x_2)(r + m - x_1). \end{array}\right\} \quad (2)$$

Man hat ferner die Proportion

$$HH_1 : HA = BB_1 : BG,$$
$$GG_1 : GB = AA_1 : AH,$$

woraus, mit Benutzung der Beziehungen,

$$HA^2 = HA_1 . GH,$$
$$BG^2 = GB_1 . GH,$$
$$AA_1{}^2 = HA_1 . GA_1,$$
$$BB_1{}^2 = HB_1 . GB_1$$

erhalten wird:

$$HH_1^2 = HA_1 . HB_1,$$
$$GG_1^2 = GA_1 . GB_1,$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} HH_1^2 = (r-m+x_1)(r-m+x_2), \\ GG_1^2 = (r+m-x_1)(r+m-x_2). \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Für die drei Parallelen HH_1, GG_1, M_1D ist

$$HH_1 - GG_1 : HG = M_1D - GG_1 : GM_1$$

oder

$$HH_1 . GM_1 + GG_1 . HM_1 = M_1D . HG, \quad . \; . \; . \; (4)$$

eine Gleichung, die als allgemein geltend betrachtet werden kann, wenn man beim Uebergange von M_1 auf die andere Seite des Punktes H, die Grösse HM_1 als negativ in Rechnung bringt und ebenso jedes Perpendikel negativ nimmt, das nach der andern Seite der Linie HG hin gerichtet ist: jenes ist der Fall, wenn man den zweiten Berührungskreis der Linie AB betrachtet, dieses, wenn AB die Strecke GH schneidet. Mittelst der Gleichungen (3) erhält man aus (4):

$$(5)$$
$$(r+q_1)\sqrt{(r-m+x_1)(r-m+x_2)} + (r-q_1)\sqrt{(r+m-x_1)(r+m-x_2)} = 2rr_1.$$

Man hat in ähnlicher Weise

$$BB_1 - AA_1 : AB = DD_1 - AA_1 : AD,$$
$$BB_1 . AD + AA_1 . BD = DD_1 . AB.$$

Ist $A\alpha \parallel A_1B_1$, so ist

$$\text{Dr. } AB\alpha \sim DM_1D_1,$$

da die Seiten des einen dieser Dreiecke auf denen des andern senkrecht stehen; und es verhält sich:

$$A\alpha : AB = DD_1 : DM_1$$

oder

$$A_1B_1 : AB = DD_1 : DM_1,$$

folglich, wenn man $AD = \sqrt{2q_1x_1}$, $BD = \sqrt{2q_1x_2}$, $AA_1 = y_1$, $BB_1 = y_2$ setzt:

$$r_1(x_1 - x_2) = \sqrt{2q_1x_2} \cdot y_1 + \sqrt{2q_1x_1} \cdot y_2. \quad . \; . \; (6)$$

Da

$$AB = AD + BD$$
$$= H_1A - H_1B,$$

st zufolge der Gleichungen (2):

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2q_1}\,(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = \sqrt{(r - m + x_1)(r + m - x_2)} \\ \qquad - \sqrt{(r - m + x_2)(r + m - x_1)}.\end{array}\right\} \quad (7)$$

andere Gleichung findet sich noch aus der Proportion:

$$_1H_1 : GH = A_1B_1 : AB$$
$$= x_1 - x_2 : \sqrt{2q_1}\,(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$$
$$= (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) : \sqrt{2q_1}\,(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$$
$$= (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) : \sqrt{2q_1},$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2r}{\sqrt{2q_1}}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = \sqrt{(r - m + x_1)(r + m - x_2)} \\ \qquad + \sqrt{(r - m + x_2)(r + m - x_1)}.\end{array}\right\} \quad (8)$$

Welche Zeichenänderungen in diesen Gleichungen für beson- Fälle nothwendig sind, ist leicht zu sehen. Ich will nur zeigen, wie dieselben sich zum Beweise des Lehrsatzes IV. tzen lassen. Nimmt man in Taf. IV. Fig. 9. zu den Punkten ıd B noch den Punkt C hinzu und denkt sich die Berührungs- e M_2 für AC, M_3 für BC, so, dass die Berührungspunkte len Sehnen selbst liegen, so gelten die obigen Gleichungen AC, wenn man x_2, y_2 mit den Coordinaten x_3, y_3 von C, q_1 q_2, r_1 mit r_2 vertauscht, für CB, wenn man x_1, y_1 mit x_3, y_3, die Constanten des Kreises M_1 mit denen des Kreises M_3 uscht. Man findet dann aus (7) und (8) durch Addition und raction:

$$2\sqrt{(r - m + x_1)(r + m - x_2)}$$
$$= \sqrt{x_1}\cdot\left(\frac{2r}{\sqrt{2q_1}} + \sqrt{2q_1}\right) - \sqrt{x_2}\left(\frac{2r}{\sqrt{2q_1}} - \sqrt{2q_1}\right),$$

$$2\sqrt{(r - m + x_2)(r + m - x_1)}$$
$$= \sqrt{x_1}\left(\frac{2r}{\sqrt{2q_1}} - \sqrt{2q_1}\right) - \sqrt{x_2}\left(\frac{2r}{\sqrt{2q_1}} + \sqrt{2q_1}\right).$$

Ebenso:

$$2\sqrt{(r-m+x_1)(r+m-x_3)}$$
$$=\sqrt{x_1}\left(\frac{2r}{\sqrt{2q_2}}+\sqrt{2q_2}\right)-\sqrt{x_3}\left(\frac{2r}{\sqrt{2q_2}}-\sqrt{2q_2}\right),$$

$$2\sqrt{(r-m+x_3)(r+m-x_1)}$$
$$=\sqrt{x_1}\left(\frac{2r}{\sqrt{2q_2}}-\sqrt{2q_2}\right)-\sqrt{x_3}\left(\frac{2r}{\sqrt{2q_2}}+\sqrt{2q_2}\right);$$

und durch Division:

$$\frac{\sqrt{r+m-x_2}}{\sqrt{r+m-x_3}}=\frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}}\cdot\frac{\sqrt{x_1}(r+q_1)-\sqrt{x_2}(r-q_1)}{\sqrt{x_1}(r+q_2)-\sqrt{x_3}(r-q_2)},$$

$$\frac{\sqrt{r-m+x_2}}{\sqrt{r-m+x_3}}=\frac{\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}}\cdot\frac{\sqrt{x_1}(r-q_1)-\sqrt{x_2}(r+q_1)}{\sqrt{x_1}(r-q_2)-\sqrt{x_3}(r+q_2)};$$

woraus man findet:

$$\sqrt{x_1}=\frac{\sqrt{r+m-x_3}.\sqrt{q_2}.\sqrt{x_2}.(r-q_1)-\sqrt{r+m-x_2}.\sqrt{q_1}.\sqrt{x_3}.(r-q_2)}{\sqrt{r+m-x_3}.\sqrt{q_2}.(r+q_1)-\sqrt{r+m-x_2}.\sqrt{q_1}.(r+q_2)},$$

$$\sqrt{x_1}=\frac{\sqrt{r-m+x_3}.\sqrt{q_2}.\sqrt{x_2}.(r+q_1)-\sqrt{r-m+x_2}.\sqrt{q_1}.\sqrt{x_3}.(r+q_2)}{\sqrt{r-m+x_3}.\sqrt{q_2}.(r-q_1)-\sqrt{r-m+x_2}.\sqrt{q_1}.(r-q_2)},$$

und wenn man diese Werthe einander gleichsetzt und die Producte bildet:

$$\sqrt{(r+m-x_3)(r-m+x_3)}\cdot q_2((r-q_1)^2-(r+q_1)^2)\cdot\sqrt{x_2}+\sqrt{(r+m-x_2)(r-m+x_2)}\cdot q_1((r-q_2)^2-(r+q_3)^2)\sqrt{x_3}$$
$$-\sqrt{(r+m-x_3)(r-m+x_2)}\sqrt{q_1q_2}\{\sqrt{x_2}(r-q_1)(r-q_2)-\sqrt{x_3}(r+q_1)(r+q_2)\}$$
$$-\sqrt{(r+m-x_2)(r-m+x_3)}\cdot\sqrt{q_1q_2}\{\sqrt{x_3}(r-q_1)(r-q_2)-\sqrt{x_2}(r+q_1)(r+q_2)\}=0$$

oder

$$-4rq_1q_2(y_3\sqrt{x_2}+y_2\sqrt{x_3})$$
$$-\sqrt{(r+m-x_3)(r-m+x_2)}\{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3})(r^2+q_1q_2)-(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})r(q_1+q_2)\}\sqrt{q_1q_2}$$
$$-\sqrt{(r+m-x_2)(r-m+x_3)}\{-(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3})(r^2+q_1q_2)-(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})r(q_1+q_2)\}\sqrt{q_1q_2}=0,$$

was sich so ordnen lässt:

$$4rq_1q_2(y_3\sqrt{x_2}+y_2\sqrt{x_3})=(\sqrt{x_3}-\sqrt{x_2})(r^2+q_1q_2)\{\sqrt{(r+m-x_3)(r-m+x_2)}-\sqrt{(r+m-x_2)(r-m+x_3)}\}\sqrt{q_1q_2}$$
$$+(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_2})\cdot r\cdot(q_1+q_2)\{\sqrt{(r+m-x_3)(r-m+x_2)}+\sqrt{(r+m-x_2)(r-m+x_3)}\}\cdot\sqrt{q_1q_2},$$

und, der Bemerkung über die für CB nöthigen Vertauschungen gemäss, mittelst der Gleichungen (6), (7), (8) übergeht in:

$$4rq_1q_2\cdot\frac{r_3(x_3-x_2)}{\sqrt{2q_3}}=-(\sqrt{x_3}-\sqrt{x_2})(r^2+q_1q_2)\cdot\sqrt{2y_3}(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_2})\sqrt{q_1q_2}$$
$$+(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_2})\cdot r\cdot(q_1+q_2)\cdot\frac{2r}{\sqrt{2q_3}}(\sqrt{x_3}-\sqrt{x_2})\cdot\sqrt{q_1q_2}$$

und, nachdem man mit $\sqrt{q_1 q_2} \cdot \frac{2(x_3 - x_2)}{\sqrt{2q_3}}$ dividirt hat:

$$2rr_3 \sqrt{q_1 q_2} = -q_3(r^2 + q_1 q_2) + r^2(q_1 + q_2),$$

welches die Gleichung (5) des vorigen Paragraphen ist.

§. 12.

Die Verbindungslinien der Berührungspunkte.

Von einem Punkte A (Taf. V. Fig. 10.), den man sich auf einem Kreise M eines Systems denken mag, gehen an die Kreise M_1 und M_2 die Tangenten AB_1 und AB_2; man verbinde die Berührungspunkte und fälle auf die Verbindungslinie die Senkrechten AA', M_1D_1, M_2D_2, welche letzteren beide auf den Tangenten die Punkte C_1, C_2 bestimmen; dann ist

$$AB_2 : AA' = C_2B_2 : C_2D_2,$$
$$AB_1 : AA' = C_1B_1 : C_1D_1;$$

folglich

$$AB_2 : AB_1 = \frac{C_2B_2}{C_2D_2} : \frac{C_1B_1}{C_1D_1}.$$

Nun ist

$$\frac{C_2B_2}{C_2D_2} = \frac{M_2B_2}{D_2B_2},$$
$$\frac{C_1B_1}{C_1D_1} = \frac{M_1B_1}{D_1B_1};$$

also, wenn man der leichteren Uebersicht wegen die Tangenten mit t_1, t_2, die entstehenden Sehnen, deren Hälften B_1D_1, B_2D_2 sind, mit s_1, s_2 bezeichnet:

$$t_2 : t_1 = \frac{s_2}{r_2} : \frac{s_1}{r_1},$$

oder

$$s_2 : s_1 = r_2 t_2 : r_1 t_1$$
$$= r_2 \sqrt{q_2} : r_1 \sqrt{q_1}.$$

Man hat somit den Satz:

Lehrsatz. Gehen von den Punkten eines Kreises eines Systems an zwei andere Tangenten, so werden diese letzteren Kreise durch die Verbindungslinien der Berührungspunkte so geschnitten, dass die entstehenden Sehnen ein festes Verhältniss haben, und zwar ist das Verhältniss der Sehnen zusammengesetzt

n Verhältniss der Radien und dem Verhältniss der Tan- welches letztere gleich der Quadratwurzel aus dem Po- erhältniss, oder aus dem Verhältniss der Entfernungen der nkte von dem des ersten Kreises ist.

rzu füge ich noch den

irsatz. Alle Geraden, welche zwei Kreise unter einem ehnenverhältniss schneiden, sind Tangenten eines Kegel- der die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise be- nd umgekehrt, die Tangenten eines die gemeinschaftlichen en zweier Kreise berührenden Kegelschnitts schneiden die so, dass die entstehenden Sehnen ein bestimmtes Ver- haben und die in den Durchschnittspunkten an die Kreise Tangenten sich auf einem Kreise des, durch die beiden en bestimmten, Systems schneiden.

st zuerst klar, dass die Durchschnittspunkte der inneren haftlichen Tangenten mit den äusseren auf einem Kreise welcher die Verbindungslinie M_1M_2 der beiden Mittel- zum Durchmesser hat. Denn sind E, F, E', F' diese so dass EE', FF' die inneren gemeinschaftlichen Tan- ind, so wird durch die Gerade M_2F z. B. der eine, durch r andere der beiden Nebenwinkel halbirt, welche durch mmentreffen der inneren Tangente FF' mit der äusseren Punkte F entstehen, und es stehen daher M_2F und M_1F nder senkrecht, woraus die Lage des Punktes F, sowie ren genannten Punkte, auf dem bezeichneten Kreise folgt. den Endpunkten des Durchmessers, M_2 und M_1, auf die E gefällten Perpendikel, oder die Radien r_2, r_1, sind, wenn te, in denen FE' und EF' die Centrale M_1M_2 schnei- r, was dasselbe ist, die Fusspunkte der auf diese gefäll- rechten mit P und Q bezeichnet werden (in den früheren hen P' und Q'), die mittleren Proportionalen zwischen l M_2Q, M_1P und M_1Q, was im vorigen Paragraphen ist. Man hat also

$$r_2^2 = M_2P \,.\, M_2Q,$$
$$r_1^2 = M_1P \,.\, M_1Q.$$

$M_2\delta$ eine Senkrechte auf M_2M_1 bis zum Einschnitt in die B_1B_2, die FE' und EF' in H und G trifft, so hat man chung (4) des vorigen Paragraphen gemäss):

$$M_2\delta \,.\, PQ + PG \,.\, M_2Q = QH \,.\, M_2P.$$

da $M_2\delta$ auf QP, M_2D_2 auf HG senkrecht steht:

$$M_2\delta : M_2D_2 = GH : PQ,$$

folglich, wenn man M_2D_2, als den Radius des um M_2 beschri benen Berührungskreises der Linie B_1B_2, mit ϱ_2, und eben M_1D_1 mit ϱ_1 bezeichnet,

$$\varrho_2 . GH = QH . M_2P - PG . M_2Q$$

und ebenso

$$\varrho_1 . GH = PG . M_1Q - QH . M_1P.$$

Für die halben Sehnen B_2D_2 und B_1D_1 hat man

$$B_2D_2^2 = r_2^2 - \varrho_2^2,$$
$$B_1D_1^2 = r_1^2 - \varrho_1^2,$$

und wenn man für r_2, ϱ_2, r_1, ϱ_1 die gefundenen Ausdrücke in A wendung bringt:

$$GH^2 . B_2D_2^2 = GH^2 . \tfrac{1}{4}s_2^2 = GH^2 . M_2P . M_2Q - (QH . M_2P - PG . M_2Q)$$
$$GH^2 . B_1D_1^2 = GH^2 . \tfrac{1}{4}s_1^2 = GH^2 . M_1P . M_1Q - (PG . M_1Q - QH . M_1P)$$

also für das Sehnenverhältniss:

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{GH^2 . M_2P . M_2Q - (QH . M_2P - PG . M_2Q)^2}{GH^2 . M_1P . M_1Q - (PG . M_1Q - QH . M_1P)^2}.$$

Es ist aber

$$GH^2 = PQ^2 + (QH - PG)^2,$$

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (M_2P - M_2Q)(M_1Q - M_1P) \\ &= M_2P . M_1Q + M_2Q . M_1P - M_2P . M_1P - M_2Q . M_1Q \\ &= M_2P . M_1Q - 2\sqrt{M_2P . M_1Q . M_2Q . M_1P} + M_2Q . M_1P \\ &\quad - M_2P . M_1P + 2\sqrt{M_2P . M_1P . M_2Q . M_1Q} - M_2Q . M_1Q \\ &= (\sqrt{M_2P . M_1Q} - \sqrt{M_2Q . M_1P})^2 - (\sqrt{M_2P . M_1P} - \sqrt{M_2Q . M_1Q} \end{aligned}$$

und da

$$\sqrt{M_2P . M_1P} = PE,$$
$$\sqrt{M_2Q . M_1Q} = QF;$$

so ist

$$PQ^2 = (\sqrt{M_2P . M_1Q} - \sqrt{M_2Q . M_1P})^2 - (PE - QF)^2,$$

$$\begin{aligned} GH^2 &= (\sqrt{M_2P . M_1Q} - \sqrt{M_2Q . M_1P})^2 + (QH - PG)^2 - (PE - Q \\ &= (\sqrt{M_2P . M_1Q} - \sqrt{M_2Q . M_1P})^2 \\ &\quad - (QF + QH - PE - PG)(QF - QH - PE + PG) \\ &= (\sqrt{M_2P . M_1Q} - \sqrt{M_2Q . M_1P})^2 - (HE' - GF')(HF - G \end{aligned}$$

und

$$H^2 . M_2P . M_2Q = (\sqrt{M_2P . M_2Q . M_2P . M_1Q}$$
$$- \sqrt{M_2P . M_2Q . M_2Q . M_1P})^2$$
$$- M_2P . M_2Q . (HE' - GF')(HF - GE)$$
$$= (M_2P . QF - M_2Q . PE)^2$$
$$- M_2P . M_2Q . (HE' - GF')(HF - GE),$$

ähnlicher Weise:

$$GH^2 . M_1P . M_1Q = (M_1Q . PE - M_1P . QF)^2$$
$$- M_1P . M_1Q . (HE' - GF')(HF - GE).$$

ereinigt man die ersten Glieder dieser Ausdrücke mit den zwei- n im Zähler und Nenner des Ausdrucks für $\frac{s_2^2}{s_1^2}$, so kommt:

$$(M_2P . QF - M_2Q . PE)^2 - (M_2P . QH - M_2Q . PG)^2$$
$$= (M_2P . (QF + QH) - M_2Q . (PE + PG))(M_2P . (QF - QH) - M_2Q(PE - PG))$$
$$= (M_2P . HE' - M_2Q . GF')(M_2P . HF - M_2Q . GE),$$

$$(M_1Q . PE - M_1P . QF)^2 - (M_1Q . PG - M_1P . QH)^2$$
$$= (M_1Q(PE + PG) - M_1P . (QF + QH))(M_1Q(PE - PG) - M_1P(QF - QH))$$
$$= (M_1Q . GF' - M_1P . HE')(M_1Q . GE - M_1P . HF).$$

Danach ist

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{(M_2P . HE' - M_2Q . GF')(M_2P . HF - M_2Q . GE) - M_2P . M_2Q(HE' - GF')(HF - GE)}{(M_1Q . GF' - M_1P . HE')(M_1Q . GE - M_1P . HF) - M_1P . M_1Q(HE' - GF')(HF - GE)}$$

und wenn man auflöst und zusammenzieht:

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{M_2P . (M_2P - M_2Q) HE' . HF + M_2Q(M_2Q - M_2P) . GF' . GE}{M_1Q(M_1Q - M_1P) GF' . GE + M_1P(M_1P - M_1Q) HE' . HF}$$
$$= \frac{M_2P . PQ . HE' . HF - M_2Q . PQ . GF' . GE}{M_1Q . PQ . GF' . GE - M_1P . PQ . HE' . HF}$$
$$= \frac{M_2P . HE' . HF - M_2Q . GF' . GE}{M_1Q . GF' . GE - M_1P . HE' . HF},$$

woraus man sieht, dass das Sehnenverhältniss der Kreise M_1 und M_2 von dem Verhältniss der Producte $HE'.HF$ und $GE.GF'$ oder von dem Verhältniss der Potenzen der Punkte H und G in Bezug auf den Kreis, der $M_1 M_2$ zum Durchmesser hat, abhängt, und das eine dieser Verhältnisse unverändert bleibt, so lange das andere seinen Werth behält.

Der Beweis, dass die Tangenten eines Kegelschnitts, der EE', FF', EF, $E'F'$ berührt, die Kreise M_1 und M_2 unter demselben Sehnenverhältniss schneiden, hat nun keine Schwierigkeit mehr. Durch die Tangente $B_1 B_2$, welche $E'F'$ in $\mathfrak{a}'$, EF in $\mathfrak{a}$ schneide, ist der Kegelschnitt bestimmt, und schneidet eine andere Tangente desselben $E'F'$ in $\mathfrak{b}'$, EF in $\mathfrak{b}$, so muss:

$$\frac{\mathfrak{a}'E'}{\mathfrak{a}'F'} : \frac{\mathfrak{b}'E'}{\mathfrak{b}'F'} = \frac{\mathfrak{a}E}{\mathfrak{a}F} : \frac{\mathfrak{b}E}{\mathfrak{b}F},$$

$$\frac{\mathfrak{a}'E'}{\mathfrak{a}'F'} : \frac{\mathfrak{a}E}{\mathfrak{a}F} = \frac{\mathfrak{b}'E'}{\mathfrak{b}'F'} : \frac{\mathfrak{b}E}{\mathfrak{b}F},$$

oder es muss der Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{a}'E'}{\mathfrak{a}'F'} : \frac{\mathfrak{a}E}{\mathfrak{a}F}$$

constant sein. Es ist aber

$$\frac{\mathfrak{a}'E'}{\mathfrak{a}'F'} = \frac{HE'}{GF'},$$

$$\frac{\mathfrak{a}E}{\mathfrak{a}F} = \frac{GE}{HF},$$

$$\frac{\mathfrak{a}'E'}{\mathfrak{a}'F'} : \frac{\mathfrak{a}E}{\mathfrak{a}F} = \frac{HE'.HF}{GF'.GE},$$

und durch das Verhältniss $\frac{HE'.HF}{GF'.GE}$ ist das Sehnenverhältniss der Kreise M_2 und M_1 bestimmt.

VIII.

Elementare Bestimmung des Inhalts der Fässer.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Im Archiv. Thl. XX. Nr. XVII. S. 301. habe ich eine Abhandlung: „Ueber den Inhalt der Fässer" geliefert, in welcher ich mittelst der Integralrechnung die genaue Formel zur Bestimmung des Inhalts der Fässer entwickelt und aus derselben für die Praxis zweckmässige Näherungsformeln, insbesondere auch die berühmte Lambert'sche Fassregel, abgeleitet, zugleich aber auch auf die Verbesserungen hingewiesen habe, deren die letztere Regel noch bedürftig sein möchte. Wegen der ungemeinen praktischen Wichtigkeit der Lambert'schen Fassregel habe ich mich, im Interesse des stereometrischen Elementar-Unterrichts, neuerlichst vielfach bemüht, eine möglichst einfache elementare Entwickelung dieser wichtigen Regel zu finden. Je fruchtloser meine in dieser Beziehung angestellten Versuche anfänglich waren: desto angenehmer wurde ich überrascht, als es mir ganz vor Kurzem gelang, eine Entwickelung nicht bloss der in Rede stehenden Regel, sondern selbst auch ihrer nothwendigen Verbesserung, zu finden, welche ich für so ungemein einfach, elegant und allgemein instructiv halte, dass ich keinen Anstand nehme, dieselbe zu der allgemeinen Aufnahme in den stereometrischen Elementar-Unterricht dringend zu empfehlen, ganz vorzüglich und vor allen Dingen auf eine mehr praktische Richtung verfolgenden Lehranstalten, also auf allen sogenannten höheren Bürgerschulen, Realschulen, Gewerbeschulen, u. s. w. Auch leugne ich nicht, dass mir die ganz zufällige Auffindung dieser Darstellungsweise, so einfach die Sache auch an sich ist, eben deshalb

viele Freude gemacht hat, und dass ich sehr wünsche, durc
selbe Etwas zur Vervollständigung und Verbesserung des s
metrischen, und somit des geometrischen Unterrichts über
auf den genannten Lehranstalten beizutragen. Möge diese
terricht, bei völlig strenger theoretischer Grund
immer mehr und mehr eine Richtung auf das wirklich pra
Anwendbare nehmen, und die Kräfte der Schüler nicht durc
Menge oft ziemlich unnützer, wenn auch rein wissenschaftli
weilen keineswegs uninteressanter, geometrischer Sätze und
chen, und meist eben so unnützer geometrischer Construc
die Jeder, wer nur etwas mathematischen Geist besitzt, sich
in unendlicher Menge ausdenken kann, zersplittern und erm
Möge man sich versichert halten, dass auf dem ersteren Wege, -
mer, was ich nicht genug wiederholen kann, bei grösster St
der wissenschaftlichen Darstellung, und ununterbr
ner, vorzugsweise auf das Praktische gerichtete
bung in der Auflösung recht vieler dahin zielender
gaben, — die Stählung der geistigen Kraft, im Allgemein
tüchtige Vorbereitung für den künftigen praktischen Beruf, die I
ung des Interesses an der reinen Wissenschaft u. s. w. im Allgen
sicherer und schneller erreicht und erzielt wird, als auf dem letz
welcher nur zu leicht Ermüdung und Ueberdruss, namentlich bei
gen praktischen Naturen, herbeiführt. Nur erst, wenn man allg
den ersteren Weg zu betreten sich entschliesst, wird auf u
Real- und höheren Bürgerschulen der mathematische Unt
wahrhafte Früchte tragen; aber freilich gehören dazu auch
tüchtige Lehrer, weil gewiss nur der Lehrer, welcher selbst dur
durch Mathematiker ist, fruchtreiche, geistig anregende praktisc
wendungen zu machen und zu denselben seine Schüler sic
führen fähig ist; und ausserdem ist, wenn der in Rede ste
Weg glücklich betreten werden soll, jedenfalls eine theilweis
gestaltung der Wissenschaft nöthig, indem dieselbe am wen
in der Weise, wie sie in den Lehrbüchern mancher unserer ge
lichen mathematischen Pädagogen dargestellt zu werden
zu dem in Rede stehenden Zwecke etwas taugt. Ich werde
sehr freuen, wenn die folgende Darstellung, der man gewiss
den geringsten Mangel an vollkommener wissenschaftlicher S
vorwerfen können wird, wenn man nur nicht übersieht, da
gewonnenen stereometrischen Formeln durchaus nur Nähe
formeln sind und sein sollen *), und auf ein anderes Prädic

---

*) Die genaue Formel, die nur mittelst der Integralrechnung
ten werden kann, in der Praxis aber auch gar nicht gebraucht
s. m. Archiv. Thl. XX. S. 307.

keinen Anspruch machen können, als ein dankenswerther Beitrag zu der in Rede stehenden wissenschaftlichen Umgestaltung erkannt werden sollte.

Hierbei muss ich mir noch die folgende Bemerkung erlauben. Herr Professor Koppe hat in seiner Schrift: „Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie. Essen. 1843. S. 34.“ nach seiner Meinung eine elementare Entwickelung der Lambert'schen Formel — denn diese meint er doch wohl? und von einer andern kann in der That auch bei der jetzigen Lage der Sache gar keine Rede sein — zur Inhaltsberechnung der Fässer gegeben, und sagt in der Vorrede: „Was endlich noch den Anhang über die Ausmessung der Fässer anlangt, so ist es mir beim Vortrage der Stereometrie immer als eine Lücke erschienen, dass ich nicht im Stande war, meinen Schülern eine auf elementarem Wege abzuleitende Anweisung über die Inhaltsberechnung dieser Körpergattung mitzutheilen, welche so vielfache Anwendung findet. Vielleicht haben andere Lehrer das nämliche Bedürfniss gefühlt, und so wird denselben der Anhang, welcher sich durch Einfachheit des Resultats sowohl, als der Ableitung für den Schulunterricht empfiehlt, eine willkommene Zugabe sein.“ Hiergegen ist nun aber zu bemerken, dass Herr Koppe das Fass durch Umdrehung einer halben Ellipse, oder vielmehr eines viereckigen Theils derselben, um die Hauptaxe der Ellipse entstehen lässt, wie auch ich beispielsweise in meiner Abhandlung über den Inhalt der Fässer im Archiv. Thl. XX. S. 315. gethan habe; und unter dieser Voraussetzung lässt sich allerdings auf verschiedene Arten der Inhalt des Fasses ganz genau auf elementarem Wege bestimmen. Dieses Koppe'sche Fass ist aber gar nicht das Lambert'sche Fass, welches so entsteht, wie ich gleich nachher zeigen werde; und das, worauf es bei diesem Gegenstande lediglich ankommt, ist eben die Inhaltsbestimmung des Lambert'schen Fasses, auf welches die von Herrn Koppe gebrauchte Methode oder eine ähnliche gar nicht anwendbar ist, weshalb ich auch die von Herrn Koppe angegebene elementare Methode, insofern es sich, was ja doch hier der Fall ist, um die Inhaltsbestimmung der Fässer zu praktischem Gebrauche handelt, zu der Aufnahme in den stereometrischen Elementar-Unterricht nicht empfehlen kann, **weil ein solcher Körper wie der von Herrn Koppe betrachtete, bei der jetzigen Lage der Sache, ein Fass gar nicht genannt wird.**

I.

Erklärung.

Wenn (Taf. V. Fig. I.) $ABCD$ ein Rechteck und CED ein durch die Punkte C und D beschriebener, gegen AB und CD concaver Kreisbogen ist, dessen Mittelpunkt also in der auf der Linie AB in ihrer Mitte M senkrecht stehenden Linie EE' liegt: so heisst der durch Umdrehung der Figur $ACEDB$ um AB entstandene Körper ein Fass. Die Linien CC' und DD' heissen die Bodendurchmesser, EE' heisst der Spunddurchmesser oder die Spundtiefe, AB nennt man die Höhe des Fasses.

II.

Arithmetischer Hülfssatz.

Wenn n und m positive ganze Zahlen bezeichnen, so nähert sich der Bruch

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+n^m}{n^{m+1}},$$

wenn man, indem m ungeändert bleibt, n in's Unendliche wachsen lässt, dem Bruche

$$\frac{1}{m+1}$$

als seiner Gränze immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Beweis.

Weil, wie man sich leicht durch Multiplication mit $a-b$ auf beiden Seiten überzeugen kann,

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}=a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots.+ab^{m-1}+b^m$$

ist, so ist

$$\frac{(n+1)^{m+1}-n^{m+1}}{(n+1)-n}=(n+1)^{m+1}-n^{m+1}$$

$$=(n+1)^m+(n+1)^{m-1}n+(n+1)^{m-2}n^2+\ldots.+(n+1)n^{m-1}+n^m,$$

also offenbar, wenn nur $m>0$ ist:

$$(n+1)^{m+1}-n^{m+1}>(m+1).n^m,$$

$$(n+1)^{m+1}-n^{m+1}<(m+1).(n+1)^m;$$

r:

$$(m+1).n^m<(n+1)^{m+1}-n^{m+1}<(m+1).(n+1)^m;$$

lich, indem man für n nach und nach $0, 1, 2, 3, \ldots . n$ setzt:

$$(m+1).0^m<1^{m+1}-0^{m+1}<(m+1).1^m,$$

$$(m+1).1^m<2^{m+1}-1^{m+1}<(m+1).2^m,$$

$$(m+1).2^m<3^{m+1}-2^{m+1}<(m+1).3^m,$$

$$(m+1).3^m<4^{m+1}-3^{m+1}<(m+1).4^m,$$

u. s. w.

$$(m+1).n^m<(n+1)^{m+1}-n^{m+1}<(m+1).(n+1)^m.$$

Addirt man nun auf beiden Seiten und hebt auf, was sich ıeben lässt, so erhält man:

$$(m+1)\{1^m+2^m+3^m+\ldots.+n^m\}<(n+1)^{m+1},$$

$$(m+1)\{1^m+2^m+3^m+\ldots.+(n+1)^m\}>(n+1)^{m+1};$$

ı:

$$1^m+2^m+3^m+\ldots.+n^m<\frac{(n+1)^{m+1}}{m+1},$$

$$1^m+2^m+3^m+\ldots.+(n+1)^m>\frac{(n+1)^{m+1}}{m+1};$$

r, wenn man in der zweiten Relation $n-1$ für n setzt:

$$1^m+2^m+3^m+\ldots.+n^m<\frac{(n+1)^{m+1}}{m+1},$$

$$1^m+2^m+3^m+\ldots.+n^m>\frac{n^{m+1}}{m+1};$$

lich, wenn man auf beiden Seiten mit n^{m+1} dividirt:

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+n^m}{n^{m+1}}<\frac{1}{m+1}(1+\frac{1}{n})^{m+1},$$

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+n^m}{n^{m+1}}>\frac{1}{m+1}.$$

ıer ist der Bruch

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}$$

immer zwischen

$$\frac{1}{m+1} \text{ und } \frac{1}{m+1}(1+\frac{1}{n})^{m+1}$$

enthalten, und da sich nun

$$\frac{1}{m+1}(1+\frac{1}{n})^{m+1} \text{ dem Bruche } \frac{1}{m+1}$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n in's Unendliche wächst, so nähert sich offenbar um so mehr auch der Bruch

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}} \text{ dem Bruche } \frac{1}{m+1}$$

bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n in's Unendliche wächst, wie bewiesen werden sollte.

Für $m=0$ ist

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}=\frac{n}{n}=1=\frac{1}{m+1},$$

und der Satz gilt also, wenigstens in gewisser Rücksicht, auch noch in diesem Falle.

III.

Aufgabe.

Eine Näherungsformel für den Inhalt eines Fasses zu finden.

Auflösung.

Man bezeichne die Höhe des Fasses durch $2h$, den Halbmesser am Spund durch R, den Halbmesser am Boden durch r. In Taf. V. Fig. 2. sei O der Mittelpunkt des Kreisbogens CED und $OM=a$. Steht nun GG' auf AB in F senkrecht, so sei $MF=x$ und $FG=y$. Zieht man OG und fällt von O auf das verlängerte GG' ein Perpendikel OH, so ist

$$\overline{OH}^2=\overline{OG}^2-\overline{GH}^2,$$

also offenbar:

$$x^2=(a+R)^2-(a+y)^2,$$

folglich, wenn man $x=h$, also $y=r$ setzt:

$$h^2 = \pm (a+R)^2 - (a+r)^2.$$

den beiden vorstehenden Gleichungen erhält man leicht.

$$x^2 = 2a(R-y) + (R^2 - y^2),$$
$$h^2 = 2a(R-r) + (R^2 - r^2);$$

$$(R-r)x^2 = 2a(R-r)(R-y) + (R-r)(R^2-y^2),$$
$$(R-y)h^2 = 2a(R-r)(R-y) + (R-y)(R^2-r^2);$$

ich durch Subtraction:

$$(R-r)x^2 - (R-y)h^2$$
$$= (R-r)(R^2-y^2) - (R-y)(R^2-r^2)$$
$$= (R-r)(R-y)(R+y) - (R-r)(R-y)(R+r),$$

$$(R-r)x^2 - (R-y)h^2 = (R-r)(R-y)(y-r).$$

ist aber $y \overset{=}{>} r$, also

$$R-y \overset{=}{<} R-r;$$

$y \overset{=}{<} R$, also

$$y-r \overset{=}{<} R-r;$$

die oberen Zeichen, nämlich die Gleichheitszeichen, offenbar ht beide zu gleicher Zeit stattfinden können. Also ist offen- immer

$$(R-r)(R-y)(y-r) < (R-r)^3,$$

glich nach dem Obigen

$$(R-r)x^2 - (R-y)h^2 < (R-r)^3,$$

er, wenn man mit R^3 auf beiden Seiten dividirt:

$$\frac{R-r}{R}\left(\frac{x}{R}\right)^2 - \frac{R-y}{R}\left(\frac{h}{R}\right)^2 < \left(\frac{R-r}{R}\right)^3.$$

i jedem in der Wirklichkeit vorkommenden Fasse ist nun immer

$$\frac{R-r}{R}$$

ein der Null sehr nahe kommender Bruch, und gegen diese sehr kleine Grösse ist

$$\left(\frac{R-r}{R}\right)^3$$

eine sehr kleine Grösse von der dritten Ordnung; also kann man nach dem Obigen mit sehr grosser Annäherung

$$\frac{R-r}{R}\left(\frac{x}{R}\right)^2-\frac{R-y}{R}\left(\frac{h}{R}\right)^2=0,$$

folglich auch

$$(R-r)x^2-(R-y)h^2=0$$

setzen; aus welcher Gleichung

$$y=R-(R-r)\frac{x^2}{h^2},$$

also

$$y^2=R^2-2R(R-r)\frac{x^2}{h^2}+(R-r)^2\frac{x^4}{h^4}$$

folgt, natürlich mit nur annähernder Richtigkeit. Setzt man aber

$$x=\frac{m}{n}h.$$

so ist

$$y^2=R^2-2R(R-r)\frac{m^2}{n^2}+(R-r)^2\frac{m^4}{n^4}.$$

Setzt man jetzt, indem man sich die halbe Höhe h des Fasses in n gleiche Theile getheilt, und in hinreichend bekannter Weise in das halbe Fass n Cylinder von der gemeinschaftlichen Höhe $\frac{h}{n}$ beschrieben denkt, für m nach und nach $1, 2, 3, 4, \ldots n$; so ist das halbe Fass offenbar die Gränze, welcher die Summe dieser n Cylinder, nämlich

$$\pi\left\{R^2-2R(R-r)\frac{1^2}{n^2}+(R-r)^2\frac{1^4}{n^4}\right\}\frac{h}{n}$$

$$+\pi\left\{R^2-2R(R-r)\frac{2^2}{n^2}+(R-r)^2\frac{2^4}{n^4}\right\}\frac{h}{n}$$

$$+\pi\left\{R^2-2R(R-r)\frac{3^2}{n^2}+(R-r)^2\frac{3^4}{n^4}\right\}\frac{h}{n}$$

u. s. w.

$$+\pi\left\{R^2-2R(R-r)\frac{n^2}{n^2}+(R-r)^2\frac{n^4}{n^4}\right\}\frac{h}{n},$$

ı nähert, wenn n in's Unendliche wächst. Vorstehende Summe aber

$$R^2-2R(R-r)\frac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^3}+(R-r)^2\frac{1^4+2^4+3^4+....+n^4}{n^5}\},$$

da nun nach II. die Gränzen, denen die Brüche

$$\frac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^3} \text{ und } \frac{1^4+2^4+3^4+....+n^4}{n^5}$$

ı nähern, wenn n in's Unendliche wächst, respective $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ l *), so ist nach dem Obigen der Inhalt des halben Fasses:

$$\pi h\{R^2-\frac{2}{3}R(R-r)+\frac{1}{5}(R-r)^2\}$$

r

$$\pi h\{R^2-\frac{2}{3}R(R-r)+\frac{1}{3}(R-r)^2+\frac{1}{5}(R-r)^2-\frac{1}{3}(R-r)^2\},$$

r

*) Weil bekanntlich auf verschiedene Arten leicht die folgenden ımen gefunden werden können:

$$1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

$$1^4+2^4+3^4+....+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n;$$

ist

$$\frac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2},$$

$$\frac{1^4+2^4+3^4+....+n^4}{n^5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{30n^4};$$

raus gleichfalls auf der Stelle folgt, dass die beiden Brüche

$$\frac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^3} \text{ und } \frac{1^4+2^4+3^4+....+n^4}{n^5}$$

ı, wenn n in's Unendliche wächst, respective den Gränzen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ ern. Der allgemeine Satz II. ist aber an sich sehr wichtig und, wie gesehen haben, leicht zu beweisen. Wer aber die Anwendung der gen Summationen vorziehen möchte, kann dann bei der obigen Inltsbestimmung der Fässer den Satz II. ganz entbehren.

$$\pi h\{\frac{2}{3}R^2+\frac{1}{3}r^2-\frac{2}{15}(R-r)^2\}.$$

Also ist der Inhalt des ganzen Fasses:

$$\frac{2}{3}(2hR^2\pi)+\frac{1}{3}(2hr^2\pi)-\frac{2}{15}(2h(R-r)^2\pi),$$

was den folgenden Satz giebt:

Der Inhalt eines Fasses wird erhalten, wenn man zu $\frac{2}{3}$ des Cylinders, welcher die Spundtiefe zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, $\frac{1}{3}$ des Cylinders, welcher den Bodendurchmesser zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, addirt, und von der Summe $\frac{2}{15}$ des Cylinders, welcher den Unterschied zwischen der Spundtiefe und dem Bodendurchmesser zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, subtrahirt *).

Vernachlässigt man das immer nur sehr kleine Glied

$$-\frac{2}{15}(2h(R-r)^2\pi),$$

so erhält man für den Fassinhalt die Formel

$$\frac{2}{3}(2hR^2\pi)+\frac{1}{3}(2hr^2\pi),$$

was die folgende berühmte Lambert'sche Fassregel giebt:

Der Inhalt eines Fasses wird erhalten, wenn man zu $\frac{2}{3}$ des Cylinders, welcher die Spundtiefe zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, $\frac{1}{3}$ des Cylinders, welcher den Bodendurchmesser zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, addirt**).

Diese Regel ist einfacher, aber nicht so genau wie die vorhergehende.

Auf die vorhergehende Weise lässt sich, glaube ich, die ganze Lehre von der Berechnung des Inhalts der Fässer, so weit dieselbe irgend für die Praxis von Wichtigkeit ist, ganz einfach völlig elementar erledigen, und dürfte nach meiner Meinung wohl verdienen, in den stereometrischen Elementar-Unterricht allgemein eingeführt zu werden, namentlich auf den oben näher bezeichneten Lehranstalten.

---

*) M. s. Archiv. Thl. XX. S. 313.

**) M. s. a. a. O. S. 302.

IX.

Ueber die Tangentenboussole.

Von

Herrn Doctor *Hädenkamp*,
Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm.

Zur Erforschung der Wirkungsgesetze galvanischer Electrici-
.t sind die Galvanometer ganz unentbehrliche physikalische In-
:rumente geworden, von denen sich auch bereits eine ziemliche
,uswahl unter verschiedenen Namen in den Händen der Physiker
efindet. Die sogenannten, von Pouillet zuerst construirten Tan-
entenboussolen können wohl zu denjenigen Messinstrumenten
alvanischer Kräfte gerechnet werden, die, in der Construction am
infachsten, in der Anwendung die sichersten Resultate geben
önnen, wenn sie mit der nöthigen Vorsicht gebraucht werden.
.uch ist es ein wesentlicher Vortheil, dass sie wohlfeil sind.
:ine genaue Kenntniss der Bedingungen, unter welchen diese
astrumente nur richtige Resultate geben können, ist für den Ex-
erimentator ganz unerlässlich. Damit bei diesen Instrumenten
ie Kraft des durch den electrischen Kreisring gehenden lineären
itroms der Tangente der Ablenkung vom magnetischen Meridian
roportional sei, — wenn dieser Ring selbst ein magnetischer
leridian ist und senkrecht auf der horizontalen Nadel angenommen
rird, — gilt als wesentliche Bedingung, dass die Länge der Nadel
n Verhältniss zu den Dimensionen des Ringes sehr klein sei.
Dadurch wird nun gerade die Genauigkeit der Messungen, welche
inen grösseren eingetheilten Kreis für die Nadel erfordert, be-
einträchtigt. Man versieht allerdings, um diesem Uebelstand ab-
uhelfen, noch die Nadel mit einem ihr genau parallelen längeren
itreifen, damit an einem grösseren Kreise kleinere Theilungen
bgelesen werden können. Man gibt, wenn ich nicht irre, als

Regel an, dass die Länge der Nadel nicht den vierten Theil des Durchmessers des Kreisringes überschreiten dürfe, ohne irgendwo für eine solche Länge den auf die Wirkungsgesetze sich stützenden Grund angegeben zu sehen. Da ich bei meiner Tangentenboussole Zweifel über die Proportionalität des Stroms nach der Tangente des Ablenkungswinkels erheben musste, so habe ich, um eine mathematische Aufklärung über diesen Punkt zu erlangen, Veranlassung genommen, eine Untersuchung darüber anzustellen, wie die Ablenkung der Nadel für jede beliebige Länge derselben sei. Da eine solche Untersuchung auch noch wohl mathematisches Interesse hat, so theile ich sie hier mit. Ich habe schon im 14. Bande S. 204. dieses Journals untersucht, welche Wirkung ein durch einen Kreis- oder elliptischen Ring gehender lineärer Strom auf ein in der Ebene des Ringes liegendes magnetisches Theilchen ausübt. Die folgenden mathematischen Betrachtungen sind als Erweiterungen der dort angestellten zu betrachten.

I.

La Place hat aus den von Savart und Biot angestellten Versuchen gefunden, dass die von einem lineären Stromelemente auf ein magnetisches Theilchen ausgeübte Wirkung dem umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung und dem Sinus des Winkels proportional sei, welchen das Stromelement mit der dieses Element und das magnetische Theilchen verbindenden geraden Linie macht, dass aber die Richtung dieser Kraft auf der durch die Schenkel dieses Winkels gelegten Ebene senkrecht sei. Um dieses Gesetz hier auf die Tangentenboussole anwenden zu können, denken wir uns die magnetischen Kräfte der durch NS zu bezeichnenden Nadel dieses Apparats an den beiden Polen vereinigt und bezeichnen die Intensität des Nordpols N der Nadel durch μ, die des Südpols S durch μ', die Entfernungen der Pole N und S von dem Elemente ∂s des Stromes r und r_1, die Winkel, die ∂s mit r und r_1 bildet, durch u und u', und endlich die Cosinusse der Winkel, die das Loth auf der durch ∂s und r gelegten Ebene mit den Coordinatenaxen macht, durch v, v', v'', und ebenso die Cosinusse der Winkel, die das Loth auf der durch ∂s und r_1 gelegten Ebene mit denselben Axen bildet, durch w, w', w''. Die Intensität des Stroms werde durch i bezeichnet. Durch diese Bezeichnungen können wir nach dem eben ausgesprochenen Gesetze die Wirkungen, die der durch den Kreisring gehende electrische Strom auf N und S ausübt, nach den drei Coordinaten zerlegt, leicht ausdrücken.

Die durch X, Y, Z bezeichneten Wirkungen auf den Pol N len so ausgedrückt:

$$X = \mu i \int \frac{\partial s \sin u}{r^2} . v,$$

$$) \ldots \ldots \quad Y = \mu i \int \frac{\partial s \sin u}{r^2} . v',$$

$$Z = \mu i \int \frac{\partial s \sin u}{r^2} . v'';$$

durch X_1, Y_1, Z_1 bezeichneten Wirkungen auf den Pol S sind:

$$X_1 = \mu' i \int \frac{\partial s \sin u'}{r_1^2} . w,$$

$$) \ldots \ldots \quad Y_1 = \mu' i \int \frac{\partial s \sin u'}{r_1^2} . w',$$

$$Z_1 = \mu' i \int \frac{\partial s \sin u'}{r_1^2} . w''.$$

Nennen wir die Cosinusse der Winkel, die das Element des ungsdraths ∂s mit den Coordinatenaxen macht, ξ, η, ζ, und iso mögen durch ξ', η', ζ' die Cosinusse der Winkel, die r den Coordinatenaxen macht, bezeichnet werden; dann erhält zur Bestimmung von v, v', v'' folgende Gleichungen:

$$\xi v + \eta v' + \zeta v'' = 0,$$

$$\xi' v + \eta' v' + \zeta' v'' = 0,$$

$$v^2 + v'^2 + v''^2 = 1.$$

diesen Gleichungen erhält man leicht:

$$v \sin u = \zeta \eta' - \eta \zeta',$$

$$v' \sin u = \xi \zeta' - \xi' \zeta,$$

$$v'' \sin u = \xi' \eta - \eta' \xi.$$

:h diese Gleichungen werden die obigen Gleichungen (1) folle:

$$X = \mu i \int \frac{(\zeta \eta' - \eta \zeta') \partial s}{r^2},$$

$$) \ldots \ldots \quad Y = \mu i \int \frac{(\xi \zeta' - \xi' \zeta) \partial s}{r^2},$$

$$Z = \mu i \int \frac{(\xi' \eta - \eta' \xi) \partial s}{r^2}.$$

Für die Gleichungen (2), welche die Wirkungen des Strom auf den Pol S ausdrücken, erhält man in ähnlicher Weise, we die Cosinusse der Winkel, die r_1 mit den Coordinatenaxen bild durch ξ_1, η_1, ζ_1 bezeichnet werden:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} X_1 &= \mu' i \int \frac{(\zeta\eta_1 - \zeta_1\eta)\partial s}{r_1^2}, \\ Y_1 &= \mu' i \int \frac{(\xi\zeta_1 - \xi_1\zeta)\partial s}{r_1^2}, \\ Z_1 &= \mu' i \int \frac{(\eta\xi_1 - \eta_1\xi)\partial s}{r_1^2}. \end{aligned}$$

II.

Wir wollen jetzt untersuchen, bei welcher Stellung der Na die Stromkraft und der Erdmagnetismus bei einer gleichzeitig Einwirkung sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Wir w len die Wirkungen des Erdmagnetismus auf die Pole N und der Nadel, nach den Coordinaten zerlegt, durch X_2, Y_2, Z_2 u X_3, Y_3, Z_3 bezeichnen. Die Coordinaten der Angriffspunkte si alsdann die Coordinaten von N und S, die wir durch $\alpha\beta\gamma$ u $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ bezeichnen. Man hat bekanntlich dann als Bedingung d Gleichgewichts die beiden folgenden Gleichungen:

$$X\gamma - Z\alpha + X_1\gamma_1 - Z_1\alpha_1 + X_2\gamma - Z_2\alpha + X_3\gamma_1 - Z_3\alpha_1 = 0,$$

$$Y\gamma - Z\beta + Y_1\gamma_1 - Z_1\beta_1 + Y_2\gamma - Z_2\beta + Y_3\gamma_1 - Z_3\beta_1 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich die Lage der Nadel bestimme Man kann ihnen dadurch eine einfachere Form geben, dass m den Mittelpunkt der Coordinaten in den Drehpunkt der Nad verlegt. Dann ist nämlich $\alpha_1 = -\alpha$, $\beta_1 = -\beta$, $\gamma_1 = -\gamma$, und d durch gehen die vorhergehenden Gleichungen in diese über:

$$(5) \quad \begin{aligned} (X - X_1 - (X_3 - X_2))\gamma &= (Z - Z_1 - (Z_3 - Z_2))\alpha, \\ (Y - Y_1 - (Y_3 - Y_2))\gamma &= (Z - Z_1 - (Z_3 - Z_2))\beta. \end{aligned}$$

Durch eine schickliche Wahl der Coordinaten-Ebenen lass sich auch diese Formeln noch vereinfachen. Es sei die Ebe der x und y der magnetische Meridian, die der x und z der H rizont, so dass an dem im magnetischen Meridiane liegend Kreisringe der Tangentenboussole die Axe der x dem horizon len Durchmesser dieses Ringes parallel wird und die Axe der durch den Mittelpunkt desselben geht und darauf senkrecht i Setzen wir die horizontale magnetische Kraft der Erde $= M$ u

m die Inclination unberücksichtigt, dann wird, da $\mu = -\mu'$ nommen ist:

$$X_2 = \mu M, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0;$$
$$X_3 = -\mu M, \; Z_2 = 0, \quad Z_3 = 0.$$

ırch erhält endlich die Gleichung, welche die Lage der horiılen Nadel unter der Einwirkung des Erdmagnetismus und Stroms bestimmt, die einfache Form:

$$) \; . \; . \; . \; . \quad (X - X_1 + 2\mu M)\gamma = (Z - Z_1)\alpha,$$

, wenn die Abweichung der Nadel vom magnetischen Meri- ν ist:

$$(X - X_1 + 2\mu M)\,\mathrm{tg}\,\nu = Z - Z_1.$$

ıleibt nun noch übrig, X, X_1, Z, Z_1 zu bestimmen.

III.

Seien die Coordinaten des Elements ∂s des Kreisringes x, y, z setzen wir:

$$x = b\cos\varphi,$$
$$y = b\sin\varphi;$$

ı ist bei der oben angenommenen Lage des Coordinatensystems:

$$\partial s = b\partial\varphi$$

$z=$ einer Constanten; b bedeutet den Halbmesser des Rin-. Für die obigen Werthe von r, r_1, ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 und η', ζ' erhält man:

$$= (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (z - \gamma)^2, \quad r_1^2 = (x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 + (z - \gamma_1)^2,$$

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial s} = -\sin\varphi, \quad \xi' = \frac{x - \alpha}{r}, \quad \xi_1 = \frac{x - \alpha_1}{r_1};$$

$$\eta = \frac{\partial y}{\partial s} = \quad \cos\varphi, \; \eta' = \frac{y - \beta}{r}, \quad \eta_1 = \frac{y - \beta_1}{r_1};$$

$$\zeta = \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \qquad \zeta' = \frac{z - \gamma}{r}, \quad \zeta_1 = \frac{z - \gamma_1}{r_1};$$

aus:

$$\zeta\eta' - \eta'\zeta = -\frac{(z - \gamma)\cos\varphi}{r},$$

$$\xi\zeta' - \zeta\xi' = -\frac{(z-\gamma)\sin\varphi}{r},$$

$$\eta\xi' - \eta'\xi = \frac{(x-\alpha)\cos\varphi + (y-\beta)\sin\varphi}{r};$$

$$\xi\eta_1 - \eta\xi_1 = -\frac{(z-\gamma_1)\cos\varphi}{r_1},$$

$$\xi\zeta_1 - \xi_1\zeta = -\frac{(z-\gamma_1)\sin\varphi}{r_1},$$

$$\eta\xi_1 - \eta_1\xi = \frac{(x-\alpha_1)\cos\varphi + (y-\beta_1)\sin\varphi}{r_1}.$$

Diese Werthe in die obigen Gleichungen (1) und (2) gesetzt, erhält man:

$$(7) \ldots \begin{cases} X = -\mu i(z-\gamma)b\int\frac{\cos\varphi\partial\varphi}{r^3}, \\ Y = -\mu i(z-\gamma)b\int\frac{\sin\varphi\partial\varphi}{r^3}, \\ Z = \mu ib\int\frac{(b-\alpha\cos\varphi-\beta\sin\varphi)\partial\varphi}{r^3}; \\ X_1 = -\mu' i(z-\gamma_1)b\int\frac{\cos\varphi\partial\varphi}{r_1^3}, \\ Y_1 = -\mu' i(z-\gamma_1)b\int\frac{\sin\varphi\partial\varphi}{r_1^3}, \\ Z_1 = \mu' ib\int\frac{(b-\alpha_1\cos\varphi-\beta_1\sin\varphi)\partial\varphi}{r_1^3}. \end{cases}$$

Um die ganze Wirkung des Ringes auf die Nadel zu erhalten, müssen diese Integrale von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ genommen werden. Die vorhergehenden Formeln gelten für jede Lage der Nadel gegen den Kreisring. Bei der Tangentenboussole soll der Mittelpunkt der Nadel mit dem Mittelpunkte des Ringes zusammenfallen, und für diesen Fall wollen wir auch nur, um eine grössere Complication zu vermeiden, die Werthe von X, X_1, Z, Z_1 berechnen. Es ist bei dieser Voraussetzung

$$r^2 = b^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - 2b\alpha\cos\varphi;$$

und wenn wir

$$c^2 = (b+\alpha)^2 + \gamma^2, \quad k^2 = \frac{4b\alpha}{c^2}$$

nd

$$\varphi = \pi - 2\psi$$

etzen, wird:

$$r^2 = c^2(1 - k^2 \sin^2\psi) = c^2\Delta^2(k, \psi),$$

so

$$r = c\Delta(k, \psi);$$

ähnlicher Weise:

$$r_1 = c\Delta(k, \frac{\varphi}{2}).$$

erdurch werden die Formeln (7) folgende:

$$X = -\frac{2\mu i\gamma b}{c^3}\int_0^\pi \frac{\cos 2\psi\,\partial\psi}{\Delta(k, \psi)^3},$$

$$Z = \frac{2\mu i b}{c^3}\int_0^\pi \frac{(b + \alpha\cos 2\psi)\,\partial\psi}{\Delta(k, \psi)^3}$$

d

$$X_1 = \frac{\mu i b\gamma}{c^3}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{\Delta(k, \frac{\varphi}{2})^3},$$

$$Z_1 = -\frac{\mu i b}{c^3}\int_0^{2\pi} \frac{(b + \alpha\cos\varphi)\,\partial\varphi}{\Delta(k, \frac{\varphi}{2})^3}.$$

Die hier vorkommenden Integrale lassen sich auf elliptische ster und zweiter Gattung zurückführen, da bekanntlich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\psi}{\Delta^3} = \frac{E(k, \frac{\pi}{2})}{k'^2},$$

$$k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\psi\,\partial\psi}{\Delta^3} = 2F(k, \frac{\pi}{2}) - \frac{1 + k'^2}{k'^2}E(k, \frac{\pi}{2})$$

t.

Aus den vorhergehenden Gleichungen erhält man:

$$X - X_1 = -\frac{4\mu i b\gamma}{c^3}\int_0^\pi \frac{\cos 2\psi\,\partial\psi}{\Delta^3},$$

$$Z - Z_1 = \frac{4\mu i b}{c^3}\left(b\int_0^\pi \frac{\partial\psi}{\Delta^3} + \alpha\int_0^\pi \frac{\cos 2\psi\,\partial\psi}{\Delta^3}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (6), so erhält man, wenn man die halbe Länge der Nadel durch l bezeichnet, folgende:

$$M\gamma = \frac{4ib}{c^3}\left(b\alpha\int_0^\pi \frac{\partial\psi}{\Delta^3} + l^2\int_0^\pi \frac{\cos 2\psi\,\partial\psi}{\Delta^3}\right),$$

die man auch, da $\gamma = l\sin\nu$ und $\alpha = l\cos\nu$ ist, so schreiben kann:

$$M\sin\nu = \frac{4ib}{c^3}\left(b\cos\nu\int_0^\pi \frac{\partial\psi}{\Delta^3} + l\int_0^\pi \frac{\cos 2\psi\,\partial\psi}{\Delta^3}\right).$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dass im Allgemeinen für jede Länge der Nadel die Stromkraft i keineswegs der Tangente der Ablenkung ν proportional ist und zur Bestimmung von i aus ν eine ziemlich weitläufige Rechnung erforderlich ist. Nur bei erster Annäherung ist i der Tangente von ν proportional. Entwickelt man nemlich die vorhergehenden Integrale nach Potenzen von l, so erhält man, wenn nur die erste Potenz von l beibehalten wird:

$$\frac{bM\operatorname{tg}\nu}{4\pi} = i.$$

Behält man in der Reihenentwickelung der vorhergehenden elliptischen Integrale noch die zweiten Potenzen oder die Quadrate von l bei, so ist, wenn der Kürze wegen $\frac{l}{b} = \lambda$ gesetzt wird:

$$\cos\nu\int_0^\pi \frac{\partial\psi}{\Delta^3} + \lambda\int_0^\pi \frac{\cos 2\psi\,\partial\psi}{\Delta^3} = \pi\left[\cos\nu\left(1 + \tfrac{3}{4}k^2 + \frac{15k^4}{64}\right) - \tfrac{3}{8}\lambda k^2\right];$$

hieraus ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$\frac{bM\operatorname{tang}\nu}{4\pi}.\left(1 + \tfrac{9}{2}\lambda^2\right)\left(1 + \tfrac{15}{4}\lambda^2\cos^2\nu\right) = i.$$

Ich werde hier in Erörterungen über die praktischen Anwendungen dieser Formeln nicht weiter eingehen, da es hier nur auf die mathematische Behandlung dieses Gegenstandes ankam.

Die vorhergehenden Formeln lassen sich auch auf ein anderes, nach den werthvollen Untersuchungen Poggendorff's nicht minder wichtiges Messinstrument für galvanische Kräfte, auf die Sinusboussole, anwenden. Da bei diesem Messapparate der Kreisring so gedreht wird, dass die Nadel in der Ebene dieses Ringes liegt, so ist für diesen Fall:

$$\alpha = l,\quad \gamma = 0,\quad X = 0,\quad X_1 = 0,$$

$$Z_2 = -\mu M\sin\nu,\quad Z_3 = \mu M\sin\nu;$$

ie obige allgemeine Gleichung (6) wird dadurch folgende:

$$Z-Z_1-2\mu M\sin\nu=0.$$

der

$$Z-Z_1=2\mu M\sin\nu.$$

etzt man in diese Gleichung den oben gefundenen Werth für $-Z_1$, so wird:

$$M\sin\nu=\frac{2ib^2}{c^3}\left(\int_0^\pi\frac{\partial\psi}{\varDelta^3}+\lambda\int_0^\pi\frac{\cos2\psi\,\partial\psi}{\varDelta^3}\right).$$

ür die erste Annäherung, d. h. wenn in der Entwickelung der tegrale nach Potenzen von λ die erste Potenz von λ nur berück-chtigt wird, erhält man auch hier:

$$\frac{bM\sin\nu}{2\pi}=i.$$

X.

Nachricht von der Vollendung der Gradmessung zwischen der Donau und dem Eismeere.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Ph. Wolfers*

in Berlin.

Ueber diese nun vollendete 36jährige Arbeit sind bereits früher einige kleine Schriften erschienen und in dieser Zeitschrift (Literar. Bericht LXXXI. S. 5. und LXXXII. S. 4.) besprochen worden. Während jene Schriften mehr als Monographieen zu betrachten waren, enthält die vorliegende*) bei dem geringen Umfange von

*) Ich habe diesen interessanten Aufsatz nicht in den Literar. Ber., ür den ihn der Herr Verfasser wohl eigentlich bestimmt hatte, sondern n das Archiv selbst aufgenommen. G.

20 Seiten manche gleich interessante und lehrreiche Mittheilungen über Gradmessungen im allgemeinen und die oben genannte in's besondere. Ohne Zweifel haben wir noch ein umfassendes Werk zu erwarten, welches über diese grosse Arbeit ausführlich berichten wird; allein auch diese kleine Schrift ist geeignet, jeden Leser anzuziehen und zu befriedigen. Um diess zu zeigen, möge hier ein kurzer Bericht über ihren Inhalt eine Stelle finden.

Zunächst werden, um den Zweck der Gradmessungen anzudeuten, folgende 3 Sätze angeführt:

1. Die Kenntniss der Figur der Erde ist der Ausgangspunkt für alle Untersuchungen über die Bildungsgeschichte des Erdballs.
2. Sie ist der Astronomie unentbehrlich, als Grundlage zur Erforschung der räumlichen Verhältnisse des Weltalls.
3. Sie ist von unmittelbarem praktischen Nutzen in ihrer Anwendung auf die Chartographie eines ausgedehnten Ländergebietes und auf die Berechnung der für diese ausgeführten geodätischen Vermessungen.

Indem der Verfasser nun eine gedrängte Uebersicht der ausgeführten Gradmessungen gibt, erwähnt er, ohne die der Griechen und Araber besonders zu beschreiben, dass diese Völker sehr deutliche Vorstellungen von einer Kugelgestalt der Erde und eine nahezu richtige Kenntniss ihres Durchmessers besessen haben. Nach dem Wiederaufleben der Wissenschaften führte der Franzose Fernel eine Gradmessung zwischen Paris und Amiens aus, deren Entfernung er bestimmte, indem er in möglichst gerader Linie von dem ersten zum letzten Orte fuhr und die Umdrehungen der Räder seines Wagens zählte. Durch Aufhebung der begangenen Fehler wurde das Resultat nahe richtig. — 1617 lieferte der Holländer Snellius die erste wissenschaftlich begründete Messung eines Meridiangrades. Er war sich der begangenen Rechnungsfehler und Schwächen in den Beobachtungsmethoden bewusst, starb aber, ehe er diese fortschaffen konnte, und erst 100 Jahre später leitete sein Landsmann Musschenbroek aus Snellius' Papieren und einzelnen wiederholten Messungen die genaue Bestimmung eines Meridiangrades ab.

1635 maass der Engländer Norwood einen Meridiangrad zwischen London und York mit der Kette, und zwar erheblich genau, während die einige Jahre später von Riccioli und Grimaldi in Italien ausgeführte Messung sehr ungenau war. — 1669 wiederholte Picard, im Auftrage der 1666 gestifteten Pariser Akademie, die obige Messung zwischen Paris und Amiens, Lahire

hrte dieselbe nördlich von Paris bis Dünkirchen, Cassini süd-
ch bis Perpignan fort, so dass 1718 ein $8^1/_3{}^0$ umfassender Bo-
en zwischen der Nordsee und dem Mittelmeere vollendet war.

1672 fand Richer, welcher für andere astronomische Zwecke
ach Cayenne gesandt worden war, dass dort in der Nähe des
equators das Secundenpendel bedeutend kürzer als in Paris war.
iermit war ein indirecter Beweis für die, von Newton und Huy-
ens theoretisch gefundene, Abplattung der Erde nach den Polen
u gewonnen. Ist diess der Fall, so muss zugleich die Länge der
reitengrade nach den Polen zu grösser werden; allein eine Ver-
leichung der Riccioli'schen, der französischen und verbesserten
nellius'schen Gradmessung ergab das Gegentheil, eine Abplat-
ung am Aequator. Nachdem über diese mangelhafte Ueberein-
stimmung vielfache und lange währende Erörterungen in der Pari-
ser Akademie stattgefunden hatten, beschloss diese, directe Mes-
sungen nahe am Aequator und am Pole ausführen zu lassen. Daher
maassen in der Zeit von 1735 bis 1741 La Condamine, Bouguer
und Godin, unterstützt vom Spanier Ulloa, einen Bogen
von 3° in Peru; hingegen Maupertuis, Clairaut, Camus und
Lemonnier, unterstützt vom Schweden Celsius, einen Bogen
von nahe 1° unter dem Polarkreise. Diese Messung ward zuerst
vollendet und bereits 1737 war entschieden, dass der Grad unter
dem Polarkreise grösser als in Frankreich sei, ein gleiches Re-
sultat ergab die erst später vollendete Peruaner Gradmessung.
Eine Abplattung nach dem Pole zu war hiermit entschieden, aber
noch nicht ihre Grösse und eben so wenig die Grösse der Erde selbst.

Es folgten nun schnell auf einander die weiteren Gradmessungen:

1750 maass La Caille am Vorgebirge der guten Hoffnung, in
33° südlicher Breite, einen Bogen von $1^1/_4{}^0$;

1751—1753 Le Maire und Boscovich im Kirchenstaate
nahe 2°;

1764 Mason und Dixon in Pensylvanien;

1768 Beccaria bei Turin;

1770—1777 Liesganig im österreichischen Italien;

1790 und 1791 Reuben Burrow in Bengalen 1° 8′, verbun-
den mit einer Längengradmessung von 38′.

1792 begannen Delambre und Mechain die im Jahre 1808
durch Biot und Arago vollendete Gradmessung von Dünkirchen
bis Formentera, welche $12^1/_2{}^0$ umfasste und ursprünglich den Zweck
hatte, ein genaues Längenmaass zu ermitteln. Dieser Zweck ist
ur unvollständig erreicht worden, jedoch erklärt sich hierdurch,
arum das diese Arbeit beschreibende Werk den Titel: „Base
u système métrique" führt.

Im Anfange dieses Jahrhunderts wiederholte Svanberg die oben erwähnte Messung von Maupertuis und dehnte sie von 57′ bis auf 1° 37′ aus. Im südlichen England begann Roy eine Gradmessung, welche Mudge auf 3° und Colby auf 10° ausdehnte. Während die Dreiecke dieser Messung bereits wiederholt mit den französischen verbunden worden sind, steht doch die Veröffentlichung ihrer Resultate noch bevor. Hierauf folgt der Zeit nach die ostindische Gradmessung, welche Lambton und dann Everest von 1802—1825 bis nahe auf 16° ausgedehnt haben, und die später noch weiter bis 8° nördlich vom Aequator fortgeführt worden ist.

Tenner und Struve begannen im zweiten Jahrzehend die russische Gradmessung, welche 1831 bereits 8° umfasste; über sie, als den Gegenstand der vorliegenden Schrift, folgen unten weitere Mittheilungen. Schumacher führte in Dänemark eine $1\frac{1}{2}°$, Gauss in Hannover eine 2° umfassende Messung aus; beide sind durch neue Beobachtungs- und Rechnungsmethoden wichtig geworden. Dasselbe gilt von der, 1831—1836 durch Bessel und Baeyer in Ostpreussen ausgeführten, $1\frac{1}{2}°$ umfassenden Musterarbeit. Gleich nach der Vollendung derselben stellte Bessel sich die Aufgabe, aus ihr im Verein mit 9 andern und zwar den vorzüglichsten Gradmessungen die wahrscheinlichsten Werthe für die Grösse und Abplattung der Erde herzuleiten. Er fand

den Durchmesser des Aequators der Erde = 6544154 Toisen,
die Axe zwischen den Polen = 6522279 „
aus ihrem Unterschied von 21875 Toisen die Abplattung $\frac{1}{299,15}$.

Diese Werthe sind zwar gewiss schon sehr genau, müssen aber wahrscheinlich dennoch bald gegen neue vertauscht werden, indem später neue und bedeutende Gradmessungen hinzugekommen sind, nämlich:

1. die durch Everest fortgesetzte und zum Theil umgearbeitete ostindische Gradmessung, welche sich jetzt vom Cap Comorin bis zum Himalaya über 21° 21′ erstreckt;
2. die Messung von Maclear am Vorgebirge der guten Hoffnung, mehrere Grade umfassend;
3. die russisch-skandinavische von der Donau bis zum Eismeere, welche über 25° 20′ umfasst.

Je grösser der gemessene Bogen ist, desto genauer lässt sich die Curve ermitteln, zu welcher er gehört; diess ist von selbst klar.

Nach den erwähnten Untersuchungen von Bessel und den angestellten Pendelversuchen ist die Erde, abgesehen von den geringen Erhebungen und Senkungen des Landes gegen die Oberfläche des Meeres, ein Umdrehungskörper, welcher der Kugel nahe kommt; daher kann man Gradmessungen, welche unter verschiedenen Längen angestellt sind, mit einander verbinden. Bei jeder einzelnen kommen Beobachtungsfehler und die ungleiche Vertheilung der Massen auf und in der Erde, welche die Richtung der Schwere verschieden ablenken, in Betracht. Die Ablenkungen von oberhalb der Erde sind desto geringer, je gleichförmiger das Terrain überhaupt, und von desto geringerem Einfluss, je grösser der ganze gemessene Bogen ist. Diesen hat man als ein Aggregat einzelner für sich abgeschlossener, aber mit einander verbundener kleinerer Bogen zu bestimmen. Die russische Gradmessung hat von allen die grösste Ausdehnung, auf sie folgt die ostindische, welche jedoch vielleicht zur Benutzung im nördlichen Theile verkürzt werden dürfte, da auf diesen wahrscheinlich die Anziehung des Himalaya störend eingewirkt hat.

Die nicht grosse Gradmessung von Maclear ist wichtig, weil sie die einzige auf der südlichen Halbkugel angestellte ist und sich bis -35^{0} erstreckt. In Südamerika würde eine solche bis -56^{0} ausgeführt werden können, wogegen der Verfasser zeigt, dass in Asien eine grössere Gradmessung wegen der hohen Gebirge und des Mangels an Cultur nicht füglich ausgeführt werden könnte. In Nordamerika liesse sich eine Messung von $+25^{0}$ bis $+60^{0}$ ausführen, sie ist aber weniger Bedürfniss, weil diese Breiten in den ausgeführten Messungen bereits genügend vertreten sind. Da aber die französische nur bis $+38^{0}\,40'$ ab-, die ostindische bis $+29^{0}\,30'$ aufsteigt, würde eine in Amerika von $+25^{0}$ bis $+42^{0}$, d. h. von der Südspitze von Florida bis zum Erie-See, eine vorhandene Lücke ausfüllen. Doch wäre es auch möglich, die russische Gradmessung bis Candia in $+34^{0}$ Breite, also auf 36^{0} zu verlängern, wenn nicht das türkische Reich dazwischen läge.

Auf die Idee, diese Gradmessung anzustellen, verfielen in dem zweiten Jahrzehend dieses Jahrhunderts gleichzeitig Tenner und Struve, und nachdem der Kaiser Alexander das Unternehmen genehmigt hatte, begann Tenner 1817, Struve 1821 die Arbeit, welche sich in drei, 1831, 1844 und 1853 endende Perioden theilen lässt. Die erste enthält die Messungen beider Gelehrten zwischen $+52^{0}$ und $+60^{0}$ Breite, also in einer Ausdehnung von 8^{0}; in der zweiten wurden die Messungen gegen Norden bis Torneå ausgedehnt, der Bogen auf $13^{0}\,49'$ gebracht und die Vorarbeiten zur Weiterführung gegen Süden bis zum Dniester beendet.

In der dritten Periode, wo ein Aufschwung in der Arbeit durch die lebhafte Betheiligung des Generalstabes, auf Anregung des Generals von Berg, möglich wurde, kam die skandinavische Fortsetzung bis zum Eismeere, die russische bis zur Donau und die Bestimmung der Polhöhen auf den End- und angemessenen Mittelpunkten hinzu. In dieser Periode vollendete Tenner ausser den Messungen in Bessarabien die Vermessung Polens, durch welche die früher besprochene Verbindung der russischen Gradmessung mit der preussischen und österreichischen möglich wurde.

Die skandinavische Messung ward, auf Struve's mündliche Anregung in Stockholm im Jahre 1844, durch Hansteen und Selander bis $+70^0\ 40'$ in Fuglenaes bei Hammerfest ausgeführt. Diese Arbeit war höchst mühselig wegen des rauhen Klimas, der unwirthlichen Gegend und der kurzen günstigen Jahreszeit. Diese Gradmessung bildet ein selbstständiges Ganzes, ist aber mit der russischen eng verbunden; auf das Verhältniss der Ausdehnung beider kann man aus der Anzahl der Dreiecke schliessen, welche bei ersterer 34, bei letzterer 225 beträgt. Diese ist, wie oben schon angedeutet, durch 13 gemessene Polhöhen und Azimuthe in 12 partielle Bogen von $2^0\ 7'$ mittlerer Ausdehnung zerlegt.

Die angewandten Maassstäbe sind mit der Toise du Perou, dem Standardmaasse der ostindischen, Bessel's Toise, dem Normalmaasse der hannoverschen und dänischen Messung und der Wiener Normalklafter gehörig verglichen worden. Die Rechnungsarbeiten sind der Vollendung nahe, eben so ein grosses, aus Struve's Feder zu erwartendes, beschreibendes Werk.

Am südlichen Endpunkte wird auf den Befehl des Kaisers eine gusseiserne Säule theils als Denkmal, theils zur Bezeichnung des Endpunktes für eine später aufzunehmende Fortsetzung, ein entsprechendes Denkmal auf des Königs Oskar Befehl am nördlichen Endpunkte mit norwegischer und lateinischer Inschrift errichtet werden. Jene Säule wird in russischer und lateinischer Sprache die in letzterer lautende Inschrift erhalten:

Terminus australis arcus meridiani $25^0\ 20'$ quem inde a fluvio Danubio ad Oceanum Arcticum usque per Rossiam, Sueciam et Norvegiam jussu et auspiciis Imperatorum Augustissimorum Alexandri I. et Nicolai I. atque Regis Augustissimi Oscaris I. annis MDCCCXVI ad MDCCCLII continuo labore emensi sunt Trium gentium geometrae. Latitudo $45^0\ 20'\ 2'',8$.

XI.

Zur Theorie der Differenzenreihen.

Von

Herrn *Oskar Werner*,

Lehrer der Mathematik in Dresden.

Bezeichnen in dem Ausdrucke

$$S_\mu = a_0 - \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 - \ldots (-1)^n \mu_n a_n$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ ganz beliebige Zahlen, dagegen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n$ die auf einander folgenden Binomialcoefficienten für den Exponenten μ, so erhalten wir, wenn wir auf jedes Glied desselben den bekannten Satz aus der Theorie der höheren Differenzenreihen

$$a_n = a_0 + n_1 \varDelta a_0 + n_2 \varDelta^2 a_0 + \ldots + n_n \varDelta^n a_0$$

anwenden:

$$\begin{aligned} S_\mu = a_0 - \mu_1 (a_0 + 1_1 \varDelta a_0) + \mu_2 (a_0 + 2_1 \varDelta a_0 + 2_2 \varDelta^2 a_0) \\ - \mu_3 (a_0 + 3_1 \varDelta a_0 + 3_2 \varDelta^2 a_0 + 3_3 \varDelta^3 a_0) + \ldots \\ \ldots (-1)^n \mu_n (a_0 + n_1 \varDelta a_0 + n_2 \varDelta^2 a_0 + \ldots + n_n \varDelta^n a_0) \end{aligned}$$

oder durch Vereinigung der gleichen Differenzen:

$$S_\mu = C_0 a_0 - C_1 \varDelta a_0 + C_2 \varDelta^2 a_0 - \ldots (-1)^n C_n \varDelta^n a_0,$$

wobei zur Abkürzung

$$C_m = \mu_m . m_m - \mu_{m+1} . (m+1)_m + \mu_{m+2} . (m+2)_m - \ldots (-1)^{n-m} \mu_n n_m$$

oder

$$C_m = m_0 \mu_m - (m+1)_1 \mu_{m+1} + (m+2)_2 \mu_{m+2} - \ldots (-1)^{n-m} n_{n-m} . \mu_n$$

gesetzt worden ist. Vorstehende $(n-m+1)$gliederige Reihe kann

auf folgende Weise summirt werden. Wir gehen zunächst v... der leicht zu beweisenden Relation

$$(-1)^{r-1}(\mu-m-1)_{r-1}\mu_m+(-1)^r(m+r)_r\mu_{m+r}=(-1)^r(\mu-m-1)_r\mu_m$$

aus, und erhalten aus ihr, wenn wir der Reihe nach $r=1$, 2, 3, ... $n-m$ setzen, die Gleichungen:

$$\mu_m-(m+1)_1\mu_{m+1}=-(\mu-m-1)_1\cdot\mu_m,$$
$$-(\mu-m-1)_1\mu_m+(m+2)_2\mu_{m+2}=+(\mu-m-1)_2\cdot\mu_m,$$
$$+(\mu-m-1)_2\mu_m-(m+3)_3\mu_{m+3}=-(\mu-m-1)_3\cdot\mu_m,$$

u. s. w.

$$(-1)^{n-m-1}(\mu-m-1)_{n-m-1}\cdot\mu_m+(-1)^{n-m}n_{n-m}\cdot\mu_n$$
$$=(-1)^{n-m}(\mu-m-1)_{n-m}\cdot\mu_m.$$

Aus der Addition dieser Gleichungen folgt endlich, wenn m... aufhebt:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}(-1)^{n-m}(\mu-m-1)_{n-m}\cdot\mu_m=\mu_m-(m+1)_1\mu_{m+1}\\+(m+2)_2\mu_{m+2}-\dots.(-1)^{n-m}n_{n-m}\cdot\mu_n\end{aligned}\right.$$

Wir haben daher durch Vergleichung mit dem Vorhergehenden:

$$C_m=(-1)^{n-m}(\mu-m-1)_{n-m}\cdot\mu_m,$$

und, wenn wir auf den Anfang unserer Entwickelung zurückblicken,

$$S_\mu=(-1)^n\{(\mu-1)_n a_0+(\mu-2)_{n-1}\mu_1\Delta a_0+(\mu-3)_{n-2}\mu_2\Delta^2 a_0$$
$$+\dots.+(\mu-n-1)_0\mu_n\Delta^n a_0\}$$

oder

$$a_0-\mu_1a_1+\mu_2a_2-\dots.(-1)^n\mu_na_n=(-1)^n\{(\mu-1)_na_0+(\mu-2)_{n-1}\cdot\mu_1\Delta a_0$$
$$+(\mu-3)_{n-2}\cdot\mu_2\Delta^2a_0+\dots.(\mu-n-1)_0\mu_n\Delta^na_0\},$$

d. i.

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&a_0-\mu_1a_1+\mu_2a_2-\dots.(-1)^n\mu_na_n\\&=(-1)^n\mu(\mu-1)_n\left\{\frac{a_0}{\mu}+\frac{n_1}{\mu-1}\Delta a_0+\frac{n_2}{\mu-2}\Delta^2a_0+\dots.+\frac{n_n}{\mu-n}\Delta^na_0\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ein Correlat zu dieser Formel erhalten wir, wenn wir auf jedes Glied der Reihe

$$a_0+\mu_1\Delta a_0+\mu_2\Delta^2a_0+\dots.+\mu_n\Delta^na_0$$

m Satz

$$\Delta^n a_0 = (-1)^n (a_0 - n_1 a_1 + n_2 a_2 - \ldots. (-1)^n a_n)$$

lwenden und der Hauptsache nach denselben Gang wie vorher nschlagen. Kürzer jedoch gelangen wir auf folgendem Wege m Ziele.

Vermittels der Relation

$$\Delta^r a_{n-1} + \Delta^{r+1} a_{n-1} = \Delta^r a_n$$

iten wir aus der Hauptreihe

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = -\Delta a_0, \quad A_2 = \Delta^2 a_0, \ldots. A_n = (-1)^n \Delta^n a_0$$

icht folgende Differenzenreihen ab:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta A_0 = -a_1, \quad \Delta A_1 = \Delta a_1, \quad \Delta A_2 = -\Delta^2 a_1, \ldots. \Delta A_n = (-1)^{n-1} \Delta^n a_1;$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 A_0 = a_2, \quad \Delta^2 A_1 = -\Delta a_2, \quad \Delta^2 A_2 = \Delta^2 a_2, \ldots. \Delta^2 A_n = (-1)^{n-2} \Delta^n a_2;$$

u. s. w.

$k$te Differenzenreihe:

$$\Delta^k A_0 = (-1)^k a_k, \quad \Delta^k A_1 = (-1)^{k-1} \Delta a_k,$$
$$\Delta^k A_2 = (-1)^{k-2} \Delta^2 a_k, \ldots. \Delta^k A_n = (-1)^{n-k} \Delta^n a_k.$$

ach (2) ist aber

$$A_0 - \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 - \ldots. (-1)^n \mu_n A_n$$

$$= (-1)^n \mu(\mu-1)_n \left\{ \frac{n_0}{\mu} A_0 + \frac{n_1}{\mu-1} \Delta A_0 + \frac{n_2}{\mu-2} \Delta^2 A_0 + \ldots. + \frac{n_n}{\mu-n} \Delta^n A_0 \right\},$$

aher ergiebt sich aus dem unmittelbar Vorhergehenden:

$$(3) \quad \begin{cases} a_0 + \mu_1 \Delta a_0 + \mu_2 \Delta^2 a_0 + \ldots. + \mu_n \Delta^n a_0 \\ = (-1)^n \mu(\mu-1)_n \left\{ \frac{n_0}{\mu} a_0 - \frac{n_1}{\mu-1} a_1 + \frac{n_2}{\mu-2} a_2 - \ldots. (-1)^n \frac{n_n}{\mu-n} a_n \right\}. \end{cases}$$

Die Formeln (2) und (3) sind vorzüglich brauchbar, wenn die Glieder a_0, a_1, a_2,.... eine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung bilden. Um diess an einem Beispiele zu zeigen, sei $a_0 = 1^2$, $a_1 = 2^2$, $a_2 = 3^2$, ... $a_n = (n+1)^2$; dann ist $\Delta a_0 = 3$, $\Delta^2 a_0 = 2$, $\Delta^3 a_0 = 0$, $\Delta^4 a_0 = 0$, u. s. w. zu setzen; folglich erhalten wir aus (1):

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} 1^2-\mu_1.2^2+\mu_2.3^2-....(-1)^n\mu_n(n+1)^2 \\ =(-1)^n\mu(\mu-1)_n\left\{\frac{1}{\mu}+3.\frac{n_1}{\mu-1}+2.\frac{n_2}{\mu-2}\right\}, \end{array}\right.$$

woraus für $\mu=-1$:

$$1^2+2^2+3^2+....+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

folgt.

XII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Professor Dr. Wolfers zu Berlin.

In Euler's „Institutiones calculi differentialis, pars posterior §. 366. Exemplum I." wird die Summe der Reihe

$$\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{16-x^2}+\text{etc.}$$

für $x=1$ bestimmt. Der allgemeine Ausdruck derselben

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x\operatorname{tg}\pi x}-\frac{1}{1-x^2}$$

nimmt für $x=1$ die Form

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{0}-\frac{1}{0}$$

an; es kann zunächst die Aufgabe sein, aus diesem allgemeinen Ausdrucke den für $x=1$ sich ergebenden Werth $\frac{3}{4}$ der obigen Reihe abzuleiten.

Diese nimmt aber für diesen Werth von $x=1$ die Form

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\text{etc.}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\text{etc.}$$

an und es wird eine zweite Aufgabe sein, dass der Werth dieser in's Unendliche fortgesetzten Reihe den obigen Werth $\frac{3}{4}$ annimmt. Diess lässt sich, ganz unabhängig von dem obigen, anderweitig hergeleiteten allgemeinen Ausdrucke und etwa ähnlich wie im eilften Theile dieser Zeitschrift pag. 428. §. 17. zeigen.

Die ihrem Werthe nach so gefundene Reihe lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3+5}+\frac{1}{3+5+7}+\frac{1}{3+5+7+9}+\frac{1}{3+5+7+9+11}+\text{etc.},$$

deren Summe dann gleichfalls bestimmt ist.

XIII.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Doctor Hädenkamp, Oberlehrers am Gymnasium zu Hamm, an den Herausgeber.

Sie erwähnen im 22. Bande Seite 227. und 228. der Auflösung einer lineären Gleichung von n unbekannten Grössen von der Form

$$\frac{x_1}{y-a_1}+\frac{x_2}{y-a_2}+\frac{x_3}{y-a_3}+\ldots.\frac{x_n}{y-a_n}=1,$$

die Liouville in seinem Journale gegeben haben soll. Ich habe die Auflösung solcher Gleichungen schon vor 13 Jahren gefunden und solche in den zwei Abhandlungen: „Ueber Transformation vielfacher Integrale" und „Ueber die Abel'schen Integrale" im 22. Bande Seite 184. und im 25. Bande Seite 182. des Crelle'schen Journals nebst andern Eigenschaften, die solche Gleichungen haben,

mitgetheilt und wichtige Anwendungen davon auf die Transformation vielfacher Integrale gemacht. In der ersten der erwähnten Abhandlungen habe ich die Bedingung, dass

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}\dots\frac{x_n}{a_n}=1$$

sei, gemacht, in der andern nicht. Es sind die y_1, y_2, y_3 etc. in den erwähnten Abhandlungen nichts anderes, als die sogenannten elliptischen Coordinaten, von denen man so fruchtbare Anwendungen auf die Lösungen verschiedener Probleme gemacht hat. Ich habe in den genannten Abhandlungen nur die Zahl der Variabeln unbestimmt und beliebig gelassen und so diese Transformation nur verallgemeinert. Da ich das Journal des Herrn Liouville nicht kenne, so ersuche ich Sie, den Herrn Liouville auf diese schon früher gegebenen Lösungen aufmerksam zu machen. Auch wünsche ich eine ähnliche Berichtigung in diesem Journale von Ihrer Seite *).

Hamm den 25. April 1854.

Ihr

Hädenkamp.

Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes.

Von Herrn Oskar Werner, Lehrer der Mathematik in Dresden.

Construirt man (Taf. I. Fig. 1.) über der Seite BC des beliebigen Dreiecks ABC den Rhombus $BCDE$, macht $\angle ABF = \angle CBE$ und $\angle JCA = \angle BCD$, zieht ferner zu BF und CJ die Parallelen CK und BL, macht $BF = BK$ und $JC = CL$ und vollendet endlich die Parallelogramme $ABFG$ und $ACJH$, so ist der Flächenraum des Rhombus $BCDE$ der Summe der Flächenräume der Parallelogramme $ABFG$ und $ACJH$ gleich.

Indem wir uns beim Beweise dieses Satzes an Taf. I. Fig. 2. halten, bemerken wir, dass diese Figur aus Taf. I. Fig. 1. erhalten wird, indem wir die Parallelogramme $ABFG$ und $ACJH$ in die Lage bringen, dass wir einerseits BF auf BK und AB in die Richtung von BF fallen lassen, und andererseits JC auf LC legen

*) Ich glaube, dass durch die vollständige Mittheilung dieses Briefes beiden Wünschen des Herrn Dr. Hädenkamp genügt sein wird. G.

AC in die Richtung von JC bringen. Es kommt also jetzt
ıf an, zu beweisen, dass

$$BCDE = BFGK + CJHL.$$

Wir ziehen zu diesem Zwecke die Geraden AM, PE, PD, JQ respective parallel BE, AB, AC, BC, BC. Dann ist

$$\angle CBE = \angle ABF,$$

ich

$$CBE + \angle ABC = \angle ABF + \angle ABC,$$

$$\angle ABE = \angle CBF.$$

ausserdem noch

$$BE = BC$$

$$AB = BF,$$

rgiebt sich

$$ABEP \cong BCOF.$$

l aber

$$ABEP = BEMN$$

$$BCOF = BFGK,$$

st

$$BEMN = BFGK.$$

$$\angle BCD = \angle ACJ,$$

folglich

$$\angle BCD + \angle ACB = \angle ACJ + \angle ACB,$$

d. i.

$$\angle ACD = \angle BCJ.$$

Da ausserdem noch

$$CD = CB$$

und

$$CA = CJ,$$

so ergiebt sich

$$ACDP \cong BCJQ.$$

Weil aber

$$ACDP = CDMN$$

und

$$BCJQ = CJHL,$$

so ist

$$CDMN = CJHL.$$

liren wir die Resultate rechts und links, so folgt

$$BEMN + CDMN = BFGK + CJHL$$

r

$$BCDE = BFGK + CJHL,$$

, wenn wir Taf. I. Fig. 1. berücksichtigen,

$$BCDE = ABFG + ACJH,$$

urch unser Satz vollständig bewiesen ist.

Als Spezialitäten dieses Satzes sind folgende hervorzuheben:

1) $\angle CBE = R$. Diess liefert den Lehrsatz: Theilt man zwei Seiten eines Dreieckes durch Senkrechte von den gegenüberstehenden Ecken, so ist das Quadrat der nicht getheilten Seite gleich der Summe der Rechtecke, welche aus den zwei getheilten Seiten und ihren, der nicht getheilten Seite zunächst liegenden Abschnitten construirt werden.

2) Die Rhombusseite CD fällt in die Richtung der Dreiecksseite AC, dann verschwindet das Parallelogramm $ACJH$ und man erhält (Taf. I. Fig. 3.) Rhombus $BCDE =$ Parallelogramm $ABFG$.

3) $\angle ACB = \angle CBE = R$ (ein bekannter Satz).

4) $\angle CAB = \angle CBE = R$ (Pythagoräischer Lehrsatz).

Zur ebenen Trigonometrie.

Von Herrn Quidde, Lehrer am Gymnasium zu Bückeburg.

Da im Archiv mehrfach Ableitungen der goniometrischen Grundformeln gegeben worden sind, so nehme ich keinen Anstand, auch die folgende mitzutheilen, an die sich dann noch einige Betrachtungen knüpfen. Sie ist ausserordentlich einfach, da sie nur eine Uebersetzung des ptolemäischen Satzes ist, den man bei dem Beginn des Unterrichts in der Trigonometrie voraussetzen kann. Sie hat aber ausserdem den Vorzug, diese goniometrischen Grundformeln in Zusammenhang zu bringen mit dem, was man als die Grundlage der ganzen neueren Geometrie zu betrachten hat, nämlich mit dem anharmonischen Verhältniss. Die Möglichkeit der Uebertragung beruht auf einem einfachen, allgemein bekannten Satze: „dass der Sinus eines Peripheriewinkels gleich der Sehne ist, dividirt durch den Durchmesser“, von dessen Richtigkeit man sich sogleich überzeugt, wenn man einen Peripheriewinkel wählt, dessen einer Schenkel ein Durchmesser ist. Dieser Satz, der in den meisten Lehrbüchern der Trigonometrie nur beiläufig, etwa in Form einer Uebungsaufgabe vorkommt, verdiente vielmehr an die Spitze gestellt zu werden, nicht nur der Anwendung wegen, die ich von demselben zu machen gedenke, sondern weil alle die trigonometrischen Sätze, die man selbstständig zu beweisen pflegt, mittelst desselben als leichte Uebertragungen von goniometrischen Sätzen erscheinen, die man vorher, im goniometrischen Theile, ebenfalls selbstständig bewiesen hat. Zu der Uebertragung ist nur eine Multiplication oder Division mit dem Durchmesser des dem Dreieck umschriebenen Kreises nothwendig. In solchem Zusammenhange stehen z. B., die Seiten des Dreiecks mit a, b, c, die Gegenwinkel mit A, B, C bezeichnet, die Formeln:

$$\left.\begin{array}{r} a = b\cos C + c\cos B, \\ \sin A = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B; \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} b + c : a = \cos\frac{C-B}{2} : \cos\frac{C+B}{2}, \\ \sin B + \sin C : \sin A = \cos\frac{C-B}{2} : \cos\frac{C+B}{2}; \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{r} b - c : a = \sin\frac{C-B}{2} : \sin\frac{C+B}{2}, \\ \sin B - \sin C : \sin A = \sin\frac{C-B}{2} : \sin\frac{C+B}{2}; \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A, \\ \sin A^2 = (\sin B.\cos C + \cos B \sin C)^2; \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} B\cos C + \cos B \sin C)^2 &= \sin B^2 \cos C^2 + 2\sin B \cos B \sin C \cos C \\ &\quad + \cos B^2 \sin C^2 \\ &= \sin B^2(1-\sin C^2) + 2\sin B \cos B \sin C \cos C + \sin C^2(1-\sin B^2) \\ &= \sin B^2 + \sin C^2 - 2\sin B \sin C(\sin B.\sin C - \cos B.\cos C) \\ &= \sin B^2 + \sin C^2 - 2\sin B \sin C.\cos A \end{aligned}$$

u. s. f. Weiter verfolgt hat diesen Dualismus z. B. Müller
einer „Trigonometrie, Halle 1852, Seite 202. u. f.", wess-
ich hier diesen Gegenstand verlasse und zur Ableitung der Formel

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

rgehe. Man stelle sich ein Viereck in einem Kreise vor, $ABCD$,
ch welche Buchstabenfolge zugleich die Folge der Punkte auf
Umfange des Kreises dargestellt sei. Man hat dann nach
ptolemäischen Satze

$$AB.CD + BC.DA = AC.BD,$$

wenn man durch das Quadrat des Durchmessers dividirt,

$$\sin BDA.\sin CAD + \sin BDC.\sin ABD = \sin ABC.\sin BAD.$$

nun AC ein Durchmesser und setzt man

$$CAD = y,$$
$$BDC = BAC = x,$$
$$BAD = x + y;$$

st

$$\sin BDA = \sin BCA = \sin(90^0 - BAC) = \cos x,$$
$$\sin ABD = \sin ACD = \sin(90^0 - CAD) = \cos y,$$
$$\sin ABC = \sin 90^0 = 1;$$

folglich

$$\cos x . \sin y + \sin x . \cos y = \sin(x+y). \qquad (5)$$

Ist AD ein Durchmesser und

$$BAD = x, \quad CAD = y;$$

so ist

$$\sin BDA = \cos x,$$
$$\sin CAD = \sin y,$$
$$\sin BDC = \sin(x-y),$$
$$\sin ABD = 1,$$
$$\sin ABC = \sin ADC = \cos y,$$
$$\sin BAD = \sin x;$$

folglich

$$\cos x . \sin y + \sin(x-y) = \cos y . \sin x. \qquad (6)$$

Setzt man $90^0 - x$ an die Stelle von x, so geht die Formel (5) über in:

$$\sin x \sin y + \cos x \cos y = \cos(x-y) \qquad (7)$$

und die Formel (6) in

$$\sin x \sin y + \cos(x+y) = \cos y \cos x. \qquad (8)$$

Verbindet man einen Punkt S des Kreises mit den Ecken des Vierecks und bezeichnet die auf einander folgenden Strahlen SA, SB, SC, SD mit a, b, c, d, so hat man durch Anwendung des oben für den Sinus eines Peripheriewinkels gegebenen Satzes:

$$\sin ab . \sin cd + \sin bc . \sin da = \sin ac . \sin bd,$$

eine bekannte Relation zwischen den vier Strahlen eines Punktes, welcher für die vier Einschnittspunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ der Strahlen in eine gerade Linie, wenn die Punkte in der angegebenen Ordnung auf einander folgen, die Relation entspricht:

$$\mathfrak{ab} . \mathfrak{cd} + \mathfrak{ad} . \mathfrak{bc} = \mathfrak{ac} . \mathfrak{bd}.$$

Diese Relationen also sind Folgerungen aus dem ptolemäischen Satze, und da sie der Lehre vom anharmonischen Verhältniss angehören, so ist hiemit der Zusammenhang dieser Lehre mit jenem Satze und damit auch mit den goniometrischen Grundformeln nachgewiesen.

XIV.

Die Theorie der periodischen Funktionen, begründet durch die Betrachtung der Integrale zwischen imaginären Grenzen.

Von

Herrn *Julius Toeplitz*,

Lehrer am Gymnasium zu Lissa im Grossherzogthum Posen.

Die Integralrechnung allein giebt uns die naturgemässen Mittel an die Hand, neue Funktionen zu finden und ihre Eigenschaften zu erforschen. Je mehr also dafür geschieht, die Prinzipien der Integralrechnung fest zu begründen, desto klarer werden uns die Eigenschaften der Funktionen vor Augen treten, und desto sicherer werden wir mit denselben umgehen. Ein Integral wird nun direkt als eine Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Gliedern definirt, diese Definition jedoch nur für den Fall gewöhnlich konsequent durchgeführt, wenn die Grenzen der Integration reelle Grössen sind. In diesem Aufsatze will ich nun den Versuch machen, diese Definition auf die Integrale zwischen imaginären Grenzen auszudehnen. Mein Bestreben geht dahin, zu zeigen, dass nur durch diese Ausdehnung das wahre Wesen der Integrale uns zugänglich werde, dass neue Eigenschaften der Integrale sich dadurch ganz von selbst ergeben und dass durch sie allein die wahre Quelle der Periodicität der Funktionen aufgefunden werde.

Bevor ich nun zu diesem meinen Thema übergehe, will ich den verehrten Lesern in dem ersten Paragraphen das ins Gedächtniss zurückrufen, was ich aus der Theorie der Integrale zwischen reellen Grenzen als bekannt voraussetze.

§. I.

Eine Funktion fx heisst **kontinuirlich** zwischen den reellen Grenzen a und b, wenn fx für jeden beliebigen Werth von x, der zwischen diesen Grenzen liegt, immer einen endlichen Werth annimmt, und ausserdem die Grösse $\frac{f(x+\varepsilon)-fx}{\varepsilon}$ für dieselben Werthe von x einen endlichen Werth annimmt, während ε unendlich klein wird. Dieser letztere endliche Werth, den die Grösse $\frac{f(x+\varepsilon)-fx}{\varepsilon}$ annimmt, wird gewöhnlich durch das Zeichen $\frac{\partial f}{\partial x}$ oder $f'x$ bezeichnet. Wenn also fx zwischen den Grenzen a und b kontinuirlich ist, so findet zwischen diesen Grenzen folgende Gleichung statt:

$$f(x+\varepsilon)-fx=\varepsilon\,.\,f'x. \tag{1}$$

Legen wir nun der Variablen x alle Werthe bei, welche zwischen a und b liegen, und bilden wir folgende Summe:

$$\varepsilon_1\,.\,fa+\varepsilon_2\,.\,f(a+\varepsilon_1)+\varepsilon_3\,.\,f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\ldots+\varepsilon_n\,.\,f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}),$$

in welcher $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ldots\ \varepsilon_{n-1},\ \varepsilon_n$ unendlich kleine Grössen von der Art sind, dass:

$$a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n=b$$

ist, so wird leicht bewiesen, dass diese Summe gegen einen bestimmten endlichen Werth konvergirt, der nur von den Grenzen a und b und von der Form der Funktion fx abhängt. Die eben genannte Summe wird **das Integral der Funktion** fx **zwischen den reellen Grenzen** a **und** b genannt und durch das Symbol $\int_a^b fx\,.\,dx$ bezeichnet. Wir haben also als Definition die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b fx\,.\,dx=\varepsilon_1\,.\,fa+\varepsilon_2\,.\,f(a+\varepsilon_1)+\varepsilon_3\,.\,f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\ldots\\ \ldots+\varepsilon_n\,.\,f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}=b-\varepsilon_n).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Mit Hülfe dieser Definitionsgleichung werden leicht folgende Eigenschaften der Integrale entwickelt:

$$\frac{\partial\int_a^b fx\,.\,dx}{\partial b}=fb. \tag{3}$$

$$\int_a^b fx.dx = -\int_b^a fx.dx. \quad (4)$$

$$\int_a^b \{\varphi x + c.\psi x\} dx = \int_a^b \varphi x.dx + c.\int_a^b \psi x.dx. \quad (5)$$

$$\int_a^b fx.dx = \int_a^p fx.dx + \int_p^a fx.dx. \quad (6)$$

Die Gleichungen (4) und (6), mit einander verbunden, zeigen, dass wir bei der Bildung der obigen Summe (2) auch über die Grenze b hinausgehen, und dann wieder zu derselben zurückkehren können, wenn nur die Funktion fx auf diesem ganzen Wege kontinuirlich bleibt.

Da ferner fx zwischen den Grenzen a und b kontinuirlich ist, so folgt aus der Gleichung (1):

$$f(a+\varepsilon_1) - fa = \varepsilon_1.f'a,$$

$$f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2) - f(a+\varepsilon_1) = \varepsilon_2.f'(a+\varepsilon_1),$$

$$f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \varepsilon_3.f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

. . . .

$$f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n=b) - f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}) = \varepsilon_n.f'(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1});$$

also durch Addition dieser Gleichungen:

$$fb - fa = \varepsilon_1.f'a + \varepsilon_2.f'(a+\varepsilon_1) + \varepsilon_3.f'(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon_n.f'(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1})$$

oder

$$fb - fa = \int_a^b f'x.dx. \quad (7)$$

Bei all dem Bisherigen ist zu bemerken, dass die Funktion fx selbst auch eine imaginäre Form haben kann. Alsdann aber bringt man sie auf die Form: $\varphi x + i.\psi x$, wo φx und ψx reelle Funktionen von x sind; und dann hat man aus der Gleichung (5): $\int_a^b fx.dx = \int_a^b \varphi x.dx + i.\int_a^b \psi x.dx$. Dabei müssen freilich φx und ψx zwischen den Grenzen a und b kontinuirlich sein.

Dies sind die bekannten Prinzipien, an die ich erinnern wollte, weil ich nur auf sie allein bei der nachfolgenden Behandlung meines Themas Bezug nehmen will.

§. II.

Die Funktion fx heisst kontinuirlich zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ (wo α und β reelle Grössen sind und $i=\sqrt{-1}$ ist), wenn in dem Ausdrucke $f(u+vi)=\varphi(u,v)+i.\psi(u,v)$ sowohl $\varphi(u,v)$ als $\psi(u,v)$ für alle Werthe von u zwischen α und γ, verbunden mit allen Werthen von v zwischen β und δ, kontinuirlich bleiben. Ferner wollen wir ein imaginäres unendlich Kleines den Ausdruck δi nennen, wenn δ unendlich klein und reell ist.

Um nun die Definition eines Integrals zwischen den imaginären Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ zu geben, wollen wir der Art und Weise, nach der wir oben das Integral $\int_a^b fx.dx$ gebildet haben, eine grössere Ausdehnung geben. Zu diesem Zwecke lassen wir die Variable x durch unendlich kleine Inkremente, die wir ganz nach unserem Belieben bald reell, bald imaginär annehmen, von dem Werthe $\alpha+\beta i$ zu dem Werthe $\gamma+\delta i$ übergehen; für diese unendlich vielen Werthe der Variablen x bilden wir die entsprechenden Werthe der Funktion fx, multipliziren jeden dieser Werthe mit dem nächstfolgenden unendlich kleinen, reellen oder imaginären Inkremente von x und addiren dann all diese Produkte. Eine solche Summe nennen wir das Integral der Funktion fx zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$.

Diese Definition scheint nun viele Unbestimmtheiten in sich zu enthalten. Denn, wenn z. B. $1+2i$ und $5+6i$ die gegebenen Grenzen sind, so kann man x erst durch reelle Inkremente von dem Werthe $1+2i$ zu dem Werthe $3+2i$, dann durch imaginäre Inkremente von dem Werthe $3+2i$ zu dem Werthe $3+6i$, und endlich wieder durch reelle Inkremente von dem Werthe $3+6i$ zu dem Werthe $5+6i$ übergehen lassen. Man könnte aber auch auf unendlich viele andere verschiedene Weisen verfahren, da nur die Bedingung gestellt ist, dass die Reihe der x mit dem Werthe $1+2i$ beginne und mit dem Werthe $5+6i$ schliesse, während die Art und Weise der Uebergänge ganz unserem Belieben überlassen ist. Man könnte also schliessen, dass nach unserer Definition zwischen denselben Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ bei ein und derselben Funktion fx unendlich viele solcher Summen vorhanden sind, die wir

ßen Integrale genannt haben. Es bieten sich uns daher folgende Fragen zur Erörterung dar: erstens, wie muss die Funktion fx beschaffen sein, damit jede dieser Summen sich einer bestimmten endlichen Grenze nähere; zweitens, welche von diesen Summen sind einander gleich; und endlich, wenn einige dieser Summen verschiedene bestimmte Werthe annehmen, um welche Differenz unterscheiden sie sich dann von einander? Bevor wir diese Fragen in ihrer ganzen Allgemeinheit beantworten, wollen wir jedoch einige spezielle Summen betrachten, auf die sich die übrigen zurückführen lassen.

§. III.

Wir lassen zuförderst x durch reelle Inkremente von dem Werthe $\alpha+pi$ zu dem Werthe $\gamma+pi$ übergehen und bilden die Summe:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1 . f(\alpha+pi)+\varepsilon_2 . f(\alpha+\varepsilon_1+pi)+\varepsilon_3 . f(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+pi)+\ldots \\ \ldots+\varepsilon_n . f(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}+pi=\gamma-\varepsilon_n+pi).\end{array}\right\} \quad (8\text{ a.})$$

Diese Summe bezeichnen wir durch das Symbol $\int_{\alpha+pi}^{\gamma+pi} fx.dx.$

Vergleichen wir diese Summe mit der in der Gleichung (2) vorkommenden, so sieht man, dass offenbar:

$$\int_{\alpha+pi}^{\gamma+pi} fx.dx=\int_{\alpha}^{\gamma} f(u+pi).du. \quad (8\text{ b.})$$

Daraus schliessen wir, dass die obige Summe, welche wir durch das Symbol $\int_{\alpha+pi}^{\gamma+pi} fx.dx$ bezeichnet haben, nur dann gegen einen einzigen bestimmten Werth konvergire, wenn die Funktion $f(u+pi)$ für alle Werthe von u, welche zwischen α und γ liegen, kontinuirlich bleibt.

Wir lassen zweitens die Variable x durch unendlich kleine imaginäre Inkremente $\delta_1 i, \delta_2 i, \ldots \delta_n i$ von dem Werthe $q+\beta i$ zu dem Werthe $q+\delta i$ übergehen, und bilden die Summe:

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1 i . f(q+\beta i)+\delta_2 i . f(q+\beta i+\delta_1 i)+\delta_3 i . f(q+\beta i+\delta_1 i+\delta_2 i)+\ldots \\ \ldots+\delta_n i . f(q+\beta i+\delta_1 i+\delta_2 i+\ldots+\delta_{n-1} i=q+\delta i-\delta_n i),\end{array}\right\} \quad (9\text{ a.})$$

welche wir nach der Analogie durch das Symbol $\int_{q+\beta i}^{q+\delta i} fx.dx$ bezeichnen. Durch Vergleichung dieser Summe mit der in der Gleichung (2) vorkommenden sehen wir wieder, dass

$$\int_{q+\beta i}^{q+\delta i} fx.dx = i\int_{\beta}^{\delta} f(q+vi).dv. \qquad (9\text{ b.})$$

Daraus schliessen wir wieder, dass die Summe, welche wir durch das Symbol $\int_{q+\beta i}^{q+\delta i} fx.dx$ bezeichnet haben, nur dann gegen einen bestimmten endlichen Werth konvergire, wenn die Funktion $f(q+vi)$ für alle zwischen β und δ liegenden Werthe von v kontinuirlich bleibt.

Wenden wir uns nun zu Summen von einer grösseren Allgemeinheit. Zu diesem Zwecke lassen wir die Variable x zuerst durch reelle unendlich kleine Inkremente von dem Werthe $\alpha+\beta i$ zu dem Werthe $\gamma+\beta i$, und dann durch imaginäre unendlich kleine Inkremente von dem Werthe $\gamma+\beta i$ zu dem Werthe $\gamma+\delta i$ übergehen, und bilden folgende Summe:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1.f(\alpha+\beta i)+\varepsilon_2.f(\alpha+\varepsilon_1+\beta i)+\varepsilon_3.f(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\beta i)+\dots+\varepsilon_n.f(\gamma-\varepsilon_n+\beta i)\\ &+\delta_1 i.f(\gamma+\beta i)+\delta_2 i.f(\gamma+\beta i+\delta_1 i)+\delta_3 i.f(\gamma+\beta i+\delta_1 i+\delta_2 i)+\dots\\ &\qquad\qquad+\delta_n i.f(\gamma+\delta i-\delta_n i), \end{aligned} \qquad (10\text{ a.})$$

welche wir vor der Hand durch das Symbol $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ bezeichnen wollen. Vergleichen wir diese Summe mit den obigen (8 a.) und (9 a.), so sehen wir, dass:

$$\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i) = \int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} fx.dx + \int_{\gamma+\beta i}^{\gamma+\delta i} fx.dx, \qquad (10\text{ b.})$$

woraus mit Hülfe der Gleichungen (8 b.) und (9 b.) folgt, dass:

$$\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(u+\beta i).du + i.\int_{\beta}^{\delta} f(\gamma+vi).dv. \qquad (10\text{ c.})$$

Daraus schliessen wir, dass die Summe, welche wir durch das Symbol $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ bezeichnet haben, gegen einen bestimmten endlichen Werth konvergire, sobald $f(u+\beta i)$ für jeden zwischen

und γ liegenden Werth von u, und $f(\gamma+vi)$ für jeden zwischen β und δ liegenden Werth von v kontinuirlich bleibt.

Schlagen wir nun den umgekehrten Weg ein und lassen x erst durch imaginäre unendlich kleine Inkremente von dem Werthe $\alpha+\beta i$ zu dem Werthe $\alpha+\delta i$, dann aber durch reelle unendlich kleine Inkremente von dem Werthe $\alpha+\delta i$ zu dem Werthe $\gamma+\delta i$ übergehen und bilden folgende Summe:

(11 a.)

$$\delta_1 i f(\alpha+\beta i)+\delta_2 i.f(\alpha+\beta i+\delta_1 i)+\delta_3 i.f(\alpha+\beta i+\delta_1 i+\delta_2 i)+\ldots+\delta_n i.f(\alpha+\delta i-\delta_n i)$$
$$+\varepsilon_1.f(\alpha+\delta i)+\varepsilon_2.f(\alpha+\varepsilon_1+\delta i)+\varepsilon_3.f(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\delta i)+\ldots+\varepsilon_n.f(\gamma-\varepsilon_n+\delta i),$$

welche wir wieder durch ein Symbol $\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ bezeichnen wollen, so sehen wir ebenso wie oben, dass:

$$\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)=\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} fx.dx+\int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} fx.dx, \quad (11\,\text{b.})$$

oder dass:

$$\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)=\int_{\alpha}^{\gamma} f(u+\delta i).du+i\int_{\beta}^{\delta} f(\alpha+vi).dv. \quad (11\,\text{c.})$$

Also konvergirt die Summe, welche wir durch das Symbol $\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ bezeichnet haben, nur dann gegen einen bestimmten endlichen Werth, wenn $f(u+\delta i)$ für alle zwischen α und γ liegenden Werthe von u, und $f(\alpha+vi)$ für alle zwischen β und δ liegenden Werthe von v kontinuirlich bleibt.

In dem folgenden Paragraphen wollen wir nun untersuchen, in welchen Fällen die beiden Summen $\varphi(\alpha+\beta i,\gamma+\delta i)$ und $\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ einander gleich sind, und wenn dies nicht der Fall ist, um welche Differenz sie sich von einander unterscheiden.

§. IV.

In dem vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, dass die beiden Summen $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ und $\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ gegen bestimmte endliche Werthe konvergiren, wenn die Funktionen $f(u+\beta i)$ und $f(u+\delta i)$ für alle zwischen α und γ liegenden Werthe von u, und die Funktionen $f(\alpha+vi)$ und $f(\gamma+vi)$ für alle zwischen β und δ liegenden Werthe von v kontinuirlich bleiben. Wir wollen nun annehmen, dass nicht bloss diese Bedingungen erfüllt sind, son-

dern die Funktion $f(u+vi)$ überhaupt zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ kontinuirlich sei (vergl. die Definition im Anfange des §. II.). Wir behaupten, dass in diesem Falle $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i) = \psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$.

Denn setzen wir $\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)-\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)=\Delta$, so folgt aus den Gleichungen (10 c.) und (11 c.), dass

$$\Delta=\int_\alpha^\gamma \{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}\,du - i\int_\beta^\delta \{f(\gamma+vi)-f(\alpha+vi)\}\,dv.$$

Da nun nach unsern Annahmen nicht bloss $f(\gamma+vi)-f(\alpha+vi)$ für jeden zwischen β und δ liegenden Werth von v, sondern auch die Funktion $f(u+vi)$ für alle Werthe von u zwischen α und γ verbunden mit allen Werthen von v zwischen β und δ kontinuirlich bleibt, so leiten wir aus der Gleichung (7) die folgenden ab:

$$f(\gamma+vi)-f(\alpha+vi)=\varepsilon_1.f'(\alpha+vi)+\varepsilon_2.f'(\alpha+\varepsilon_1+vi)$$
$$+\varepsilon_3.f'(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+vi)+\ldots\ldots+\varepsilon_n.f'(\gamma-\varepsilon_n+vi)$$

und

$$i\int_\beta^\delta \{f(\gamma+vi)-f(\alpha+vi)\}\,dv$$
$$=i.\delta_1\{\varepsilon_1.f'(\alpha+\beta i)+\varepsilon_2.f'(\alpha+\varepsilon_1+\beta i)+\ldots\ldots+\varepsilon_n.f'(\gamma-\varepsilon_n+\beta i)\}$$
$$+i.\delta_2\{\varepsilon_1.f'(\alpha+\beta i+\delta_1 i)+\varepsilon_2.f'(\alpha+\varepsilon_1+\beta i+\delta_1 i)+\ldots+\varepsilon_n.f'(\gamma-\varepsilon_n+\beta i+\delta_1 i)\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+i.\delta_n\{\varepsilon_1.f'(\alpha+\delta i-\delta_n i)+\varepsilon_2.f'(\alpha+\varepsilon_1+\delta i-\delta_n i)+\ldots\ldots+\varepsilon_n.f'(\gamma-\varepsilon_n+\delta i-\delta_n i)\}$$

Da wir aber ganz auf dieselbe Weise, wie wir die Formel (7) bewiesen haben, zeigen können, dass

$$f(p+qi)-f(p+ri)=\int_{p+ri}^{p+qi}.f'v.\,dv,$$

wenn nur $f(p+vi)$ für alle zwischen r und q liegenden Werthe von v kontinuirlich bleibt, so folgt nach unsern oben gemachten Annahmen, dass:

$$i\int_\beta^\delta \{f(\gamma+vi)-f(\alpha+vi)\}\,dv=\varepsilon_1\{f(\alpha+\delta i)-f(\alpha+\beta i)\}$$
$$+\varepsilon_2.\{f(\alpha+\varepsilon_1+\delta i)-f(\alpha+\varepsilon_1+\beta i)\}$$
$$+\varepsilon_3.\{f(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\delta i)-f(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\beta i)\}$$
$$+\ldots\ldots+\varepsilon_n.\{f(\gamma-\varepsilon_n+\delta i)-f(\gamma-\varepsilon_n+\beta i)\}$$
$$=\int_\alpha^\gamma \{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}.\,du.$$

Wenn also $f(u+vi)$ zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ kontinuirlich ist, so ist $\varDelta=0$ und daher $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)=\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$, was zu beweisen war.

§. V.

Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so haben wir folgendes Ergebniss. Wenn die Funktion fx zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ kontinuirlich ist, so konvergiren nicht nur die Summen $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ und $\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ gegen bestimmte endliche Werthe, sondern diese beiden Werthe sind auch einander gleich.

Wenn aber nur die Funktionen $f(u+\beta i)$ und $f(u+\delta i)$ für alle zwischen α und γ liegenden Werthe von u, und die Funktionen $f(\alpha+vi)$ und $f(\gamma+vi)$ für alle zwischen β und δ liegenden Werthe von v kontinuirlich sind, dagegen die Funktion fx selbst für einen Werth $x=u_1+v_1 i$, der zwischen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ liegt, diskontinuirlich wird, so konvergiren zwar noch die Summen $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ und $\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ gegen bestimmte endliche Werthe; jedoch können wir nicht behaupten, dass diese beiden Werthe einander gleich sind. Sie unterscheiden sich vielmehr im Allgemeinen durch eine Differenz $\varDelta$, welche folgendermassen ausgedrückt wird:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta&=\psi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)-\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)\\&=\int_\alpha^\gamma\{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}\,du-i\int_\beta^\delta\{f(\gamma+vi)-f(\alpha+vi)\}\,dv.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Diesen Ausdruck für $\varDelta$ wollen wir nun umformen, damit er von α, β, γ, δ unabhängig werde.

Die Funktion fx werde für $x=u_1+v_1 i$ diskontinuirlich, und nehmen wir zuerst an, dass $\alpha<u_1<\gamma$ und $\beta<v_1<\delta$; alsdann haben wir vermöge der Formel (7):

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\gamma\{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}\,du=&\int_\alpha^{u_1-p}\{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}\,du\\&+\int_{u_1-p}^{u_1+q}\{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}\,du\\&+\int_{u_1+q}^{\gamma}\{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}\,du,\end{aligned}$$

wo p und q beliebige positive Grössen bedeuten. Da aber die Funktion fx zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $u_1-p+\delta i$ und ebenso zwischen den Grenzen $u_1+q+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ kontinuirlich

ist, so folgt aus dem, was wir im vorigen Paragraphen bewiesen haben, dass:

$$\int_{\alpha}^{u_1-p}\{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}\,du=i\cdot\int_{\beta}^{\delta}\{f(u_1-p+vi)-f(\alpha+vi)\}\,dv,$$

und

$$\int_{u_1+q}^{\gamma}\{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}\,du=i.\int_{\beta}^{\delta}\{f(\gamma+vi)-f(u_1+q+vi)\}\,dv.$$

Substituiren wir diese Werthe in den Ausdruck (12), so kommt:

$$\Delta=\int_{u_1-p}^{u_1+q}\{f(u+\delta i)-f(u+\beta i)\}du-i\int_{\beta}^{\delta}\{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi)\}dv.$$

Ganz auf dieselbe Weise haben wir aber:

$$\int_{\beta}^{\delta}\{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi).dv$$
$$=\int_{\beta}^{v_1-r}\{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi)\}dv$$
$$+\int_{v_1-r}^{v_1+s}\{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi)\}dv$$
$$+\int_{v_1+s}^{\delta}\{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi)\}dv.$$

Da ferner die Funktion fx zwischen den Grenzen $u_1-p+\beta i$ und $u_1+q+(v_1-r)i$, und ebenso zwischen den Grenzen $u_1-p+(v_1+s)i$ und $u_1+q+\delta i$ kontinuirlich ist, so folgt wiederum aus dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen, dass:

$$i.\int_{\beta}^{v_1-r}\{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi)\}dv$$
$$=\int_{u_1-p}^{u_1+q}\{f(u+(v_1-r)i)-f(u+\beta i)\}du$$

und

$$i.\int_{v_1+s}^{\delta}\{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi)\}.dv$$
$$=\int_{u_1-p}^{u_1+q}\{f(u+\delta i)-f(u+(v_1+s)i)\}du$$

substituiren wir diesen Werth in den zuletzt gefundenen Werth von Δ, so haben wir endlich:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = \int_{u_1-p}^{u_1+q} \{f(u+(v_1+s)i)-f(u+(v_1-r)i)\}\,du \\ \quad -i\int_{v_1-r}^{v_1+s} \{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi)\}\,dv,\end{array}\right\} \quad (13)$$

wo p, q, r, s beliebige reelle positive Grössen sind. Und dadurch haben wir gezeigt, dass Δ von den Grössen α, β, γ, δ unabhängig ist, wenn nur $\alpha < u_1 < \gamma$ und $\beta < v_1 < \delta$.

Ganz auf dieselbe Weise wird bewiesen, dass:

1) wenn $\alpha > u_1 > \gamma$ und $\beta > v_1 > \delta$, alsdann:

$$\Delta_1 = \int_{u_1+q}^{u_1-p} \{f(u+(v_1-r)i)-f(u+(v_1+s)i)\}\,du$$
$$-i\int_{v_1+s}^{v_1-r} \{f(u_1-p+vi)-f(u_1+q+vi)\}\,dv$$

oder, wenn man die Grenzen der Integration umkehrt: $\Delta_1 = \Delta$;

2) wenn aber $\alpha < u_1 < \gamma$ und $\beta > v_1 > \delta$, so ist:

$$\Delta_2 = \int_{u_1-p}^{u_1+q} \{f(u+(v_1-r)i)-f(u+(v_1+s)i)\}\,du$$
$$-i\int_{v_1+s}^{v_1-r} \{f(u_1+q+vi)-f(u_1-p+vi)\}\,dv,$$

oder $\Delta_2 = -\Delta$;

3) ist endlich $\alpha > u_1 > \gamma$ und $\beta < v_1 < \delta$, so ist

$$\Delta_3 = \int_{u_1+q}^{u_1-p} \{f(u+(v_1+s)i)-f(u+(v_1-r)i)\}\,du$$
$$-i\int_{v_1-r}^{v_1+s} \{f(u_1-p+vi)-f(u_1+q+vi)\}\,dv,$$

oder $\Delta_3 = -\Delta$.

§. VI.

Durch das Vorhergehende sind wir in den Stand gesetzt, die in §. II. definirten Summen auf eine leichte Weise zu untersuchen.

Wir lassen also zuerst die Variable x durch reelle Inkremente von dem Werthe $\alpha+\beta i$ zu dem Werthe $a_1+\beta i$, dann durch imaginäre Inkremente von dem Werthe $a_1+\beta i$ zu dem Werthe $a_1+b_1 i$, dann wieder durch reelle Inkremente von dem Werthe $a_1+b_1 i$ zu dem Werthe $a_2+b_1 i$, dann durch imaginäre Inkremente von dem Werthe $a_2+b_1 i$ zu dem Werthe $a_2+b_2 i$ u. s. f., endlich durch reelle Inkremente von dem Werthe $a_n+b_n i$ zu dem Werthe $\gamma+b_n i$ und durch imaginäre Inkremente von dem Werthe $\gamma+b_n i$ zu dem Werthe $\gamma+\delta i$ übergehen. Bilden wir nun für all diese Werthe von x die zugehörigen Werthe von fx, multipliziren wir ferner jeden der letzteren mit dem nächstfolgenden reellen oder imaginären unendlich kleinen Inkremente, und addiren all diese Produkte, so ist offenbar ihre Summe:

$$\left.\begin{aligned} S=\varphi(\alpha+\beta i,\ a_1+b_1 i)+\varphi(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i)+\dots\\ \dots+\varphi(a_{n-1}+b_{n-1}i,\ a_n+b_n i)+\varphi(a_n+b_n i,\ \gamma+\delta i). \end{aligned}\right\}\ (14)$$

Diese Formel ist offenbar der allgemeine Ausdruck für die im §. II. definirten Summen, und wir wollen nun sehen, wenn die Summe S gegen einen bestimmten endlichen Werth konvergire und welches dieser Werth sei.

Zuvörderst ist ersichtlich, dass die Summe S, die wir von jetzt ab durch das Symbol

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fx.dx$$

bezeichnen wollen, zugleich mit den Ausdrücken $\varphi(\alpha+\beta i,\ a_1+b_1 i)$, $\varphi(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i),\dots,\ \varphi(a_n+b_n i,\ \gamma+\delta i)$ gegen einen bestimmten endlichen Werth konvergirt. Durch das, was wir im Anfange des vorigen Paragraphen von der Funktion φ gesagt haben, erfahren wir also, dass unsere allgemeine Summe $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fx.dx$ nur dann einen bestimmten endlichen Werth annimmt, wenn die Funktionen $f(u+\beta i)$, $f(u+b_1 i)$, $f(u+b_2 i),\dots,\ f(u+b_n i)$ für alle Werthe von u, welche respektive zwischen α und a_1, a_1 und a_2, a_2 und $a_3,\dots,\ a_n$ und γ liegen, und ebenso die Funktionen $f(a_1+vi)$, $f(a_2+vi),\dots,\ f(a_n+vi)$, $f(\gamma+vi)$ für alle Werthe von v, welche respektive zwischen β und b_1, b_1 und $b_2,\dots,\ b_{n-1}$ und b_n, b_n und δ liegen, kontinuirlich bleiben. Daher werden wir unter dem Symbole $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fx.dx$ nur diejenigen Summen begreifen, welche die eben erwähnten Bedingungen erfüllen. Denn allen andern Summen können wir keinen bestimmten Sinn unterlegen, da sie im Allgemei-

en nicht gegen einen endlichen bestimmten Werth konvergiren. Nachdem wir dieses festgestellt haben, wollen wir den Werth untersuchen, gegen den die Summen $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fx.dx$ konvergiren.

Die Summation all der Funktionen φ, welche in dem Ausdrucke (14) vorkommen, wird leicht folgendermassen ausgeführt. Es ist:

$$\varphi(\alpha+\beta i,\ a_1+b_1 i)+\varphi(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i)$$

$$=\int_{\alpha+\beta i}^{a_1+\beta i} fx.dx+\int_{a_1+\beta i}^{a_1+b_1 i} fx.dx+\int_{a_1+b_1 i}^{a_2+b_1 i} fx.dx+\int_{a_2+b_1 i}^{a_2+b_2 i} fx.dx$$

$$=\int_{\alpha+\beta i}^{a_1+\beta i} fx.dx+\psi(a_1+\beta i,\ a_2+b_1 i)+\int_{a_2+b_1 i}^{a_2+b_2 i} fx.dx.$$

Ist nun die Funktion fx zwischen den Grenzen $a_1+\beta i$ und $a_2+b_1 i$ kontinuirlich, so ist nach dem Obigen $\psi(a_1+\beta i,\ a_2+b_1 i)$ $=\varphi(a_1+\beta i,\ a_2+b_1 i)$; wird aber fx zwischen den Grenzen $a_1+\beta i$ und $a_2+b_1 i$ diskontinuirlich, so ist

$$\psi(a_1+\beta i,\ a_2+b_1 i)=\varphi(a_1+\beta i,\ a_2+b_1 i)\pm\Delta,$$

wo Δ der oben gefundene Ausdruck (13) ist. In dem ersten Falle haben wir also:

$$\varphi(\alpha+\beta i,\ a_1+b_1 i)+\varphi(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i)$$

$$=\int_{\alpha+\beta i}^{a_1+\beta i} fx.dx+\varphi(a_1+\beta i,\ a_2+b_1 i)+\int_{a_2+b_1 i}^{a_2+b_2 i} fx.dx,$$

oder, wie man leicht sieht:

$$\varphi(\alpha+\beta i,\ a_1+b_1 i)+\varphi(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i)=\varphi(\alpha+\beta i,\ a_2+b_2 i).$$

In dem anderen Falle dagegen ist:

$$\varphi(\alpha+\beta i,\ a_1+b_1 i)+\varphi(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i)=\int_{\alpha+\beta i}^{a_1+\beta i} fx.dx+\varphi(a_1+\beta i,\ a_2+b_1 i)$$

$$+\int_{a_2+b_1 i}^{a_2+b_2 i} fx.dx\pm\Delta=\varphi(\alpha+\beta i,\ a_2+b_2 i)\pm\Delta.$$

Dadurch gelangen wir also zu folgenden Schlüssen.

Wenn die Funktion fx für keinen Werth von x diskontinuirlich wird, so ist allgemein:

$$\varphi(a_m+b_m i,\ a_{m+1}+b_{m+1} i)+\varphi(a_{m+1}+b_{m+1} i,\ a_{m+2}+b_{m+2} i)$$
$$=\varphi(a_m+b_m i,\ a_{m+2}+b_{m+2} i),$$

und daher, wie man leicht sieht:

$$\varphi(\alpha+\beta i,\ a_1+b_1 i)+\varphi(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i)+\ldots+\varphi(a_n+b_n i,\ \gamma+\delta i)$$
$$=\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i).$$

Also sind in diesem Falle all die Summen, welche wir durch $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fx.dx$ bezeichnet haben, von den Zwischenwerthen $a_1+b_1 i$, $a_2+b_2 i,\ldots, a_n+b_n i$ unabhängig, und konvergiren alle gegen ein und denselben bestimmten endlichen Werth $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$.

Anders aber verhält sich die Sache, wenn die Funktion fx für irgend einen Werth $u_1+v_1 i$ diskontinuirlich wird. Denn da die Zwischenwerthe $a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i,\ldots, a_n+b_n i$ ganz unserem Belieben überlassen sind, so können wir verschiedene Summen (14) bilden, welche den Werth $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ um ein beliebiges positives oder negatives Vielfaches von $\varDelta$ übersteigen (s. die Anmerkung). In diesem Falle ist also:

$$\varphi(\alpha+\beta i,\ a_1+b_1 i)+\varphi(a_1+b_1 i,\ a_2+b_2 i)+\ldots+\varphi(a_n+b_n i,\ \gamma+\delta i)$$
$$=\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)\pm m\varDelta,$$

wo m eine positive ganze Zahl ist.

Anmerkung. Wird z. B. fx für $x=0$ diskontinuirlich, so ist nach dem Früheren:

$$\varphi(1+2i,\ -3-4i)+\varphi(-3-4i,\ 5+6i)$$
$$=\int_{1+2i}^{-3+2i} fx.dx+\psi(-3+2i,\ 5-4i)+\int_{5-4i}^{5+6i} fx.dx$$
$$=\int_{1+2i}^{-3+2i} fx.dx+\varphi(-3+2i,\ 5-4i)+\int_{5-4i}^{5+6i} fx.dx-\varDelta$$
$$=\varphi(1+2i,\ 5+6i)-\varDelta.$$

Auf ähnliche Weise ist aber:

$$\varphi(1+2i,\ -3-4i)+\varphi(-3-4i,\ 7+8i)+\varphi(7+8i,\ -9-10i)$$
$$+\varphi(-9-10i,\ 5+6i)=\varphi(1+2i,\ 7+8i)-\varDelta+\varphi(7+8i,\ 5+6i)-\varDelta$$
$$=\varphi(1+2i,\ 5+6i)-2\varDelta.$$

Durch dieses Beispiel ist ersichtlich, wie man die Summen (14) so bilden kann, dass zu $\varphi(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$ ein beliebiges positives oder negatives Vielfaches von $\varDelta$ hinzukomme.

§. VII.

Allgemeine Definition der Integrale und die Periodicität der Funktionen.

Es seien a und x Grössen von der allgemeinen Form $u+vi$. Wir lassen eine Variable z durch ganz beliebige unendlich kleine reelle und imaginäre Inkremente von dem Werthe a zu dem Werthe z übergehen, bilden die zugehörigen Werthe einer Funktion fz, multipliziren jeden dieser letzteren mit dem nächstfolgenden Inkremente von z und addiren die Produkte zu einander. Solcher Summen können unendlich viele gebildet werden, da jene unendlich kleinen Inkremente auf unendlich viele verschiedene Weisen ausgewählt werden können. Alle diese Summen haben aber die leicht zu beweisende Eigenschaft, dass, wenn man sie als Funktionen der Grenze x betrachtet und in Bezug auf dieselbe differenzirt, bei allen ein und dasselbe Differenzial, nämlich fx, herauskömmt. Wegen dieser gemeinsamen Eigenschaft werden diese unendlich vielen Summen durch das gemeinschaftliche Symbol $\int_a^x fz.dz$ bezeichnet.

Wenn nun die Werthe dieser Summen wirklich ausgerechnet werden sollen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn nämlich erstens fz für keinen Werth von z diskontinuirlich wird, so konvergiren alle diese Summen gegen ein und denselben bestimmten endlichen Werth, so dass also in diesem Falle $\int_a^x fz.dz$ nur einen einzigen Werth besitzt. Wenn aber die Funktion fz für einen Werth $z=u_1+v_1i$ diskontinuirlich wird, so haben wir oben gesehen, dass viele von diesen Summen vollständig von der Hand zu weisen und gar nicht unter dem Symbole $\int_a^x fx.dx$ zu begreifen sind, weil sie gegen keinen endlichen bestimmten Werth konvergiren. Die übrigen noch immer unendlich vielen Summen konvergiren zwar gegen endliche bestimmte Werthe, allein dieselben sind von einander verschieden, und zwar um beliebige positive oder negative Vielfache einer Grösse Δ, welche nach der Formel (13) bestimmt wird.

Setzen wir nur $\int_a^x fz.dz=y$ und betrachten y als eine Funk-

tion von x, so hat y für jeden Werth von x nur einen einzigen bestimmten endlichen Werth, wenn die Funktion fz für keinen Werth von z diskontinuirlich wird. Wenn aber fz für irgend einen Werth von z diskontinuirlich wird, so hat y unendlich viele Werthe, die sich alle um ein positives oder negatives Vielfaches der nach Formel (13) bestimmten Grösse Δ von einander unterscheiden. Betrachten wir umgekehrt die Grenze x als eine Funktion von y, so erhält x in dem letzteren Falle für alle Werthe von y, die sich um ein Vielfaches von Δ von einander unterscheiden, ein und denselben Werth. x bleibt also ungeändert, wenn sich y um ein Vielfaches von Δ ändert, und daher heisst dann x eine **periodische Funktion** von y und Δ der **Index der Periodicität** oder die **Periode.**

Wird fz für mehrere Werthe u_1+v_1i, u_2+v_2i, ..., u_n+v_ni von z diskontinuirlich, so ist offenbar, dass x auch n Perioden $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ besitzt. Freilich können einige von ihnen entweder Null werden, oder einander gleich, oder Vielfache von einander sein.

Das Bisherige wollen wir nun durch einige Beispiele erläutern.

§. VIII.

Beispiele.

Beispiel 1. Es sei $fz=\frac{1}{z}$ und $\int_1^x \frac{dz}{z}=y$. Bekanntlich wird y durch das Symbol $\log x$, und x durch das Symbol e^y bezeichnet. In diesem Falle ist $u_1+v_1i=0$, oder $u_1=0$, $v_1=0$. Da bei der Bestimmung von Δ die Grössen p, q, r, s beliebige positive Grössen sind, so nehmen wir $p=q=r=s=1$. Alsdann finden wir aus Formel (13):

$$\Delta=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{u+i}-\frac{1}{u-i}\right\}du-i\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{1+vi}-\frac{1}{-1+vi}\right\}dv$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{-2i}{u^2+1}du-i\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+v^2}dv$$

$$=-2i\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2}-2i\int_{-1}^{1}\frac{dv}{1+v^2}=-4i\int_{-1}^{1}\frac{dz}{1+z^2}.$$

Das reelle Integral $\int_{-1}^{1}\frac{dz}{1+z^2}$ wird aber bekanntlich durch das

mbol $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet. Da nun das Zeichen von $\varDelta$ offenbar auch ch unserem Belieben verändert werden kann, so sehen wir, dass eine periodische Funktion ist mit der imaginären Periode $=4i.\frac{\pi}{2}=2\pi i$, so dass $e^{y+2m\pi i}=e^{y}$.

r **Anmerkung.** Viele Mathematiker haben darüber ihren Zwei- ausgesprochen, welcher Werth dem Integrale $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ beizule- sei. Aus unsern oben gegebenen Definitionen und Schlüssen ten wir nun folgendes Resultat ab. Bei der Bildung des Integrals $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ darf man durchaus nicht x durch reelle Inkremente dem Werthe -1 zu dem Werthe $+1$ übergehen lassen; n auf diesem Wege wird einer der Werthe von $\frac{1}{x}$ zu $\frac{1}{0}$, und e entsprechende Summe, welche das Integral bildet, konvergirt n nicht gegen einen endlichen bestimmten Werth. Man muss mehr x durch imaginäre Inkremente von dem Werthe -1 zu m Werthe $+1$ übergehen lassen; man erhält dann unendlich le verschiedene Summen, von denen jede gegen einen bestimm- endlichen Werth konvergirt, und von jeder andern nach den igen Entwickelungen um ein Vielfaches von $2\pi i$ sich unterschei- t. Wir dürfen also bloss eine dieser Summen berechnen, um n allgemeinen, unendlich vieldeutigen Werth von $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ zu halten. Wir lassen z. B. erst x durch imaginäre Inkremente von m Werthe -1 zu dem Werthe $-1+i$, dann durch reelle Inkremente von dem Werthe $-1+i$ zu dem Werthe $1+i$, und end- h wieder durch imaginäre Inkremente von dem Werthe $1+i$ zu m Werthe 1 übergehen. Alsdann erhalten wir:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{-1+i}\frac{dx}{x}+\int_{-1+i}^{1+i}\frac{dx}{x}+\int_{1+i}^{1}\frac{dx}{x}.$$

ach §. III. ist aber:

$$\int_{-1}^{-1+i}\frac{dx}{x}=i.\int_{0}^{1}\frac{du}{-1+ui},\quad \int_{-1+i}^{1+i}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{1}\frac{du}{u+i}$$

d

$$\int_{1+i}^{1}\frac{dx}{x}=i.\int_{1}^{0}\frac{du}{1+ui}.$$

Ferner ist:

$$\frac{i}{-1+ui}=\frac{1}{u+i}, \quad \frac{i}{1+ui}=\frac{1}{u-i};$$

also ist:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\int_{0}^{1}\frac{du}{u+i}+\int_{-1}^{1}\frac{du}{u+i}+\int_{1}^{0}\frac{du}{u-i}$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{du}{u+i}+\int_{-1}^{1}\frac{du}{u+i}-\int_{0}^{1}\frac{du}{u-i}$$

$$=\int_{0}^{1}\left\{\frac{1}{u+i}-\frac{1}{u-i}\right\}du+\int_{-1}^{1}\frac{du}{u+i}$$

$$=-\int_{0}^{1}\frac{2i}{u^2+1}du+\int_{-1}^{1}\frac{du}{u+i}=-\frac{\pi i}{2}+\int_{-1}^{1}\frac{du}{u+i}.$$

Nun ist:

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{u+i}=\int_{-1}^{0}\frac{du}{u+i}+\int_{0}^{1}\frac{du}{u+i}=\int_{0}^{1}\frac{du}{u+i}-\int_{0}^{-1}\frac{du}{u+i}$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{du}{u+i}-\int_{0}^{1}\frac{du}{u-i}=-\frac{\pi}{2}i,$$

wie oben. Also ist einer der Werthe des Integrals

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=-\frac{\pi i}{2}-\frac{\pi i}{2}=-\pi i.$$

Berücksichtigen wir nun noch die Periode $2\pi i$, so ist der allgemeine Werth von $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=(2m-1)\pi i$.

Beispiel 2. Es sei $fz=\frac{1}{z^{2n}}$, so ist auch hier $u_1+v_1 i=0$ oder $u_1=0$ und $v_1=0$. Setzen wir wieder $p=q=r=s=1$, so erhalten wir:

$$\Delta=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{(u+i)^{2n}}-\frac{1}{(u-i)^{2n}}\right\}.du-i\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{(vi+1)^{2n}}-\frac{1}{(vi-1)^{2n}}\right\}dv.$$

Setzen wir nun

$$\frac{1}{(u+i)^{2n}}-\frac{1}{(u-i)^{2n}}=\varphi(u) \text{ und } \frac{1}{(vi+1)^{2n}}-\frac{1}{(vi-1)^{2n}}=\psi(v),$$

so sehen wir, dass $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ und $\psi(-v) = -\psi(v)$; also sind $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ sogenannte ungerade Funktionen von u und v. Da nun sehr leicht bewiesen wird, dass $\int_{-1}^{1} \varphi(u).du = 0$ ist, wenn $\varphi(u)$ eine ungerade Funktion von u ist, so folgt, dass $\varDelta = 0$ ist. Also hat $\int_a^z \frac{dz}{z^{2n}}$ die Periode 0, d. h. gar keine Periode.

Anmerkung. Auch hier ist zu merken, dass bei der Bildung des Integrals $\int_{-1}^{1} \frac{dz}{z^{2n}}$ durch imaginäre Inkremente die Discontinuität von $\frac{1}{z^{2n}}$ vermieden werden muss.

Beispiel 3. Es sei $fz = \frac{1}{z^{4n-1}}$, dann ist wieder $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, und daher:

$$= \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(u+i)^{4n-1}} - \frac{1}{(u-i)^{4n-1}} \right\} du$$

$$- i\int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(vi+1)^{4n-1}} - \frac{1}{(vi-1)^{4n-1}} \right\} dv,$$

es ist aber:

$$\frac{i}{(vi+1)^{4n-1}} - \frac{i}{(vi-1)^{4n-1}} = \frac{i^{4n}}{(-v+i)^{4n-1}} - \frac{i^{4n}}{(-v-i)^{4n-1}}$$

$$= -\frac{1}{(v-i)^{4n-1}} + \frac{1}{(v+i)^{4n-1}}.$$

Also ist

$$I = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(u+i)^{4n-1}} - \frac{1}{(u-i)^{4n-1}} \right\} du$$

$$- \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(v+i)^{4n-1}} - \frac{1}{(v-i)^{4n-1}} \right\} dv = 0.$$

Beispiel 4. Es sei endlich $fz = \frac{1}{z^{4n+1}}$; alsdann finden wir wieder:

$$I = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(u+i)^{4n+1}} - \frac{1}{(u-i)^{4n+1}} \right\} du$$

$$- i\int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(vi+1)^{4n+1}} - \frac{1}{(vi-1)^{4n+1}} \right\} dv.$$

Es ist aber:

$$\frac{i}{(vi+1)^{4n+1}}-\frac{i}{(vi-1)^{4n+1}}=\frac{i^{4n+2}}{(-v+i)^{4n+1}}-\frac{i^{4n+2}}{(-v-i)^{4n+1}}$$
$$=\frac{1}{(v-i)^{4n+1}}-\frac{1}{(v+i)^{4n+1}}.$$

Also ist:

$$\varDelta=2\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{(u+i)^{4n+1}}-\frac{1}{(u-i)^{4n+1}}\right\}du.$$

Nehmen wir nun den Fall $n=0$ aus, den wir schon im ersten Beispiele behandelt haben, so findet man durch Ausführung der Integration:

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{(u+i)^{4n+1}}=-\frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{(1+i)^{4n}}+\frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{(1-i)^{4n}}$$

und

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{(u-i)^{4n+1}}=-\frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{(1-i)^{4n}}+\frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{(1+i)^{4n}},$$

und daher:

$$\varDelta=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{(1-i)^{4n}}-\frac{1}{(1+i)^{4n}}\right\}.$$

Es ist aber $(1\pm i)^2=\pm 2i$, also $(1\pm i)^4=-4$, und daher

$$\varDelta=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{(-4)^n}-\frac{1}{(-4)^n}\right\}=0.$$

Anmerkung. Aus den bisherigen Beispielen folgt, dass, wenn $\int_a^x\frac{dz}{z^n}=y$ gesetzt wird, wobei n eine ganze positive Zahl ist und man x als eine Funktion von y betrachtet, diese nur in dem einzigen Falle, wenn $n=1$, periodisch ist, und dann die Periode $2\pi i$ ist.

Beispiel 5. Es sei $fz=\frac{1}{(z-a-bi)^n}$, wo a und b positive Grössen sind. Alsdann ist $u_1=a$, $v_1=b$; setzen wir also wieder $p=q=r=s=1$, so finden wir:

$$\varDelta=\int_{a-1}^{a+1}\left\{\frac{1}{(u-a+i)^n}-\frac{1}{(u-a-i)^n}\right\}du$$
$$-i.\int_{b-1}^{b+1}\left\{\frac{1}{(1-bi+vi)^n}-\frac{1}{(-1-bi+vi)^n}\right\}dv.$$

Es wird aber leicht bewiesen, dass

$$\int_{a-1}^{a+1} \varphi(u-a).du = \int_{-1}^{1} \varphi(u).du$$

und

$$i.\int_{b-1}^{b+1} \psi(vi-bi).dv = i\int_{-1}^{1} \psi(vi).dv;$$

also ist

$$\varDelta = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(u+i)^n} - \frac{1}{(u-i)^n} \right\}.du - i.\int_{-1}^{1} \left\{ \frac{1}{(vi+1)^n} - \frac{1}{(vi-1)^n} \right\}.dv.$$

Nach den Erörterungen der vorhergehenden Beispiele schliessen wir also, dass $\varDelta = 0$, wenn n eine ganze Zahl und > 1, und dass $\varDelta = 2\pi i$, wenn $n = 1$.

Dasselbe gilt, wie man leicht beweist, wenn $fz = \frac{1}{(z-a+bi)^n}$ oder $fz = \frac{1}{(z+a-bi)^n}$ oder endlich wenn $fz = \frac{1}{(z+a+bi)^n}$.

Beispiel 6. Es sei fz ein rationaler echter Bruch von der Form $\frac{\varphi z}{\psi z}$ und es sei: $\psi z = (z-a_1)^{\alpha_1}.(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots.(z-a_n)^{\alpha_n}$. Alsdann wird fz für die n Werthe $z = a_1$, $z = a_2$, $z = a_3, \ldots., z = a_n$ diskontinuirlich. Daher giebt es hier n Perioden $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots., \varDelta_n$, welche sehr leicht folgendermassen bestimmt werden. Zuerst ist zu merken, dass, wie man leicht sieht, wenn $fz = f_1 z + f_2 z$ auch $\varDelta(fz) = \varDelta(f_1 z) + \varDelta(f_2 z)$. Ist nun z. B. $f_2 z$ kontinuirlich für den Werth $u_1 + v_1 i$, welcher $f_1 z$ diskontinuirlich macht, so ist nach dem Früheren $\varDelta(f_2 z) = 0$ und daher $\varDelta(fz) = \varDelta(f_1 z)$. Man kann nun bekanntlich fz auf die folgende Form bringen:

$$fz = \frac{\varphi z}{\psi z} = \frac{A_{\alpha_1}}{(z-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{\alpha_1 - 1}}{(z-a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots. + \frac{A_1}{z-a_1}$$

$$+ \frac{B_{\alpha_2}}{(z-a_2)^{\alpha_2}} + \frac{B_{\alpha_2 - 1}}{(z-a_2)^{\alpha_2 - 1}} + \ldots. + \frac{B_1}{z-a_2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \frac{N_{\alpha_n}}{(z-a_n)^{\alpha_n}} + \frac{N_{\alpha_n - 1}}{(z-a_n)^{\alpha_n - 1}} + \ldots. + \frac{N_1}{z-a_n}.$$

Nehmen wir nun das in den vorhergehenden Beispielen Bewie-

sene zu Hülfe, so sehen wir, dass $\Delta_1 = A_1 . 2\pi i$, $\Delta_2 = B_1 . 2\pi i, \ldots$ $\ldots, \Delta_n = N_1 . 2\pi i$. Wir wollen dies durch einige spezielle Fälle erläutern.

Erster Fall. Es sei $fz = \frac{z-2}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{z-1} + \frac{\frac{1}{4}}{z-3}$, so ist $\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{2}\pi i$.

Zweiter Fall. Es sei $fz = \frac{z-1}{(z-4)(z-5)} = \frac{-3}{z-4} + \frac{4}{z-5}$, so ist $\Delta_1 = 6\pi i$ und $\Delta_2 = 8\pi i$. Die umgekehrte Funktion x von $y = \int_a^x \frac{z-1}{(z-4)(z-5)} . dz$ hat also die beiden Indices der Periodicität $6\pi i$ und $8\pi i$ oder den einen index proprius $2\pi i$ (s. Jacobi „de functionibus quadrupliciter periodicis"). Und in der That ist bekanntlich $y = -3 . \log\frac{x-4}{a-4} + 4 . \log\frac{x-5}{a-5}$; es hat also nach der Theorie der Logarithmen y unendlich viele Werthe, die sich um Vielfache von $4 . 2\pi i - 3 . 2\pi i = 2\pi i$ von einander unterscheiden.

Dritter Fall. Es sei $fz = \frac{z-1}{(z-2)(z-5)} = \frac{-\frac{1}{3}}{z-2} + \frac{\frac{4}{3}}{z-5}$, so ist $\Delta_1 = \frac{2}{3}\pi i$ und $\Delta_2 = \frac{8}{3}\pi i$ oder der index proprius $\frac{2}{3}\pi i$.

Vierter Fall. Es sei endlich $fz = \frac{1}{z^2+1} = \frac{\frac{i}{2}}{z+i} - \frac{\frac{i}{2}}{z-i}$, so ist $\Delta_1 = \Delta_2 = \pm\frac{i}{2} . 2\pi i = \pm\pi$. Setzen wir nun $\int_0^x \frac{dz}{1+z^2} = y$, so wird bekanntlich x durch das Symbol $\operatorname{tang} y$ bezeichnet. Es ist also $\operatorname{tang} y$ eine periodische Funktion und besitzt die Periode π.

Zusätze und Bemerkungen.

A. Wenn man bei geometrischen Untersuchungen auf das Integral $\int_a^x fz . dz$ kommt und fz diskontinuirlich ist, so ist man

bei solchen Quadraturen auf reelle Inkremente des z angewiesen und muss daher, da sich das Integral keinem bestimmten endlichen Werthe annähert, die so gebildete Summe besonders untersuchen, wobei besonders die hierher bezüglichen Arbeiten von Cauchy zu beachten sind.

B. Wir haben gezeigt, dass das Integral $\int_a^x fz.dz$, obgleich fz zwischen den Grenzen diskontinuirlich wird, dennoch so gebildet werden kann, dass durch eine passende Auswahl von reellen und imaginären Inkrementen die Diskontinuität von fz vermieden wird. Dies gelingt jedoch nicht, wenn fz für eine der Grenzen selbst diskontinuirlich wird. Dann aber verfährt man folgendermassen. Man bestimmt die Integrale $\int_a^{x-\varepsilon} fz.dz$ und $\int_{a+\varepsilon}^x fz.dz$; alsdann lässt man ε in's Unendliche abnehmen und findet dann entweder $\int_a^x fz.dz = \text{Lim}.\int_a^{x-\varepsilon} fz.dz$ oder $\int_a^x fz.dz = \text{Lim}.\int_{a+\varepsilon}^x fz.dz$.

C. Der verewigte Jacobi hat in seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen ebenfalls angedeutet, wie man die Periodicität aus der Definition der Integrale ableiten könne. Er leitet die Periodicität von der Doppelsinnigkeit der Quadratwurzel ab, welche in der zu integrirenden Funktion vorkommt. Das Integral $\int_1^x \frac{dz}{z}$ kann nicht seine Periodicität aus derselben Quelle beziehen, da ja hier kein Wurzelzeichen vorkommt. Ich habe meine obigen Erörterungen auch auf sinus, cosinus und die elliptischen Funktionen angewendet und die durch die Theorie bekannten Perioden wirklich auf diese Weise gefunden. Diese Untersuchungen, so wie die passenden Umformungen und Erörterungen des Ausdruckes für die Periode Δ habe ich in einem besonderen Aufsatze niedergelegt, den ich dem mathematischen Publikum, wenn der vorliegende Aufsatz seinen Beifall gewinnt, übergeben will.

D. Aus den Formeln der §§. IV. und V. kann man sehr leicht die bekannten Cauchy'schen Korrektionen ableiten, welche bei Doppelintegralen hinzugefügt werden müssen, wenn man die Ordnung der Integration umkehren will, und die zu integrirende Funktion zwischen den Grenzen diskontinuirlich wird. Diese Korrektion erhält bei uns eine etwas allgemeinere Form, als bei Cauchy; doch spare ich mir das Ausführlichere hierüber für eine spätere kürzere Notiz auf.

XV.

Neue für die Construction der Tafeln trigonometrischer Logarithmen wichtige Entdeckung

von

Herrn *Paul Escher* *)

in Stuttgart.

Einleitung.

Es wird in Folgendem versucht, aufzustellen:

1) bis zu welchen Winkelwerthen und von welchen Winkelwerthen an die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Secunde zu Secunde, sodann von zehn zu zehn Secunden und endlich von Minute zu Minute in den Tafeln angegeben sein müssen, um bei Anwendung der in den Tafeln unter der Columne Diff. 1″ vorkommenden Differenztheile vor Fehlern gesichert zu sein, — wodurch zugleich dargethan wird, dass die Grenzen, zwischen welchen die Tafeln die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von zehn zu zehn Secunden und die von Minute zu Minute enthalten, nicht richtig gezogen sind;

2) wie man, wenn die Logarithmen der Sinus zweier um eine Secunde oder um zwei oder um drei u. s. f. Secunden verschiedener Winkel gegeben sind, sogleich den Logarithmen des Sinus für den nächstfolgenden, beziehungsweise um eine Secunde oder

---

*) Verfasser der Schrift: „Neue Behandlung desjenigen Theils der Geometrie des Raums, welcher die verschiedenen Lagen gerader Linien und Ebenen betrachtet. Stuttgart. 1853.“

um zwei oder um drei oder u. s. f. Secunden höhern Winkels mittelst der gemeinen Logarithmen finden kann, — ein Verfahren, durch welches zugleich die nöthig werdende Correction unserer Tafeln der trigonometrischen Logarithmen sehr erleichtert wird;

3) eine neue, ganz kurze Theorie von dem Verhalten der Differenzen der Logarithmen der trigonometrischen Functionen überhaupt.

Vorbemerkungen. 1) Die hier aufgestellten Betrachtungen werden sich, weil sie sich auf die Einrichtung der Tafeln beziehen, nur auf Winkelgrössen erstrecken, die kleiner als 90° sind.

2) Für einen solchen Winkel A ist $\sin A < 1$ und $\cos A < 1$, also $\log\sin A < 0$ und $\log\cos A < 0$. Somit sind die Logarithmen der Sinus und Cosinus negativ.

In den Tafeln kommen jedoch die Logarithmen aller trigonometrischen Functionen positiv — weil um die Zahl 10 vermehrt — vor. Man muss daher an jeden aus einer Tafel entnommenen Logarithmen einer trigonometrischen Function (-10) anhängen, d. h. von demselben die Zahl 10 subtrahiren, um den wahren Logarithmen der betreffenden Function zu erhalten.

3) Die in Folgendem citirten Seitenzahlen beziehen sich ein für allemal auf die 30ste Auflage von Vega's logarithmitisch-trigonometrischem Handbuche.

I) Von den Logarithmen der Sinus.

§. 1.

Sind A und B zwei ungleiche Winkel, z. B. $A > B$, so ist auch $\sin A > \sin B$, somit auch $\log\sin A > \log\sin B$. Stellen nun a und b die positiven, in den Tafeln vorkommenden, also $(a-10)$ und $(b-10)$ die negativen, wirklichen Logarithmen von $\sin A$ und $\sin B$ vor, so ist

$$\frac{a-10 > b-10}{a > b}.$$

Darin liegt der Grund, warum die in den Tafeln vorkommenden Logarithmen der Sinus mit den Winkeln selbst wachsen (sich ver-

grössern). Den positiven Ausdruck $a-b$ wollen wir „den Zuwachs von $\log\sin B$ bis zum $\log\sin A$“ nennen.

§. 2.

$$\sin(A+B).\sin(A-B)$$
$$=(\sin A.\cos B+\cos A.\sin B).(\sin A.\cos B-\cos A.\sin B)$$
$$=\sin^2 A.\cos^2 B-\cos^2 A.\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-\cos^2 A.\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-(\sin^2 A+\cos^2 A).\sin^2 B$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B.$$

Aus der hier entwickelten Formel

$$\sin(A+B).\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$$

ergibt sich

$$\sin(A+B)=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin(A-B)}.$$

Letztere Formel kann benutzt werden — wenn die log.sin zweier um einen Winkel B verschiedener Winkel A und $(A-B)$, sowie der log.sin des Unterschieds B gegeben sind — den log.sin des nächstfolgenden, beziehungsweise um B höhern Winkels $(A+B)$ zu finden.

Beispiel.

Sei

$$A=0^{\circ}\ 20'\ 20'',$$
$$B=0^{\circ}\ 0'\ 1'',$$

also

$$A-B=0^{\circ}\ 20'\ 19''$$

und

$$A+B=0^{\circ}\ 20'\ 21''.$$

In den Tafeln finden wir

$$\left.\begin{array}{r}\log\sin A=7{,}7719322\\ \log\sin(A-B)=7{,}7715760\end{array}\right\}\ \text{Seite 211.}$$
$$\log\sin B=4{,}6855749.\quad\text{(Seite 206.)}$$

Zur Berechnung von $\log\sin(A+B)$ mittelst der angegebenen Formel können wir uns folgenden Schemas bedienen:

4) $2\log\sin A = 15{,}5438644-20$; $\sin^2 A = 0{,}00003498359$.
1) $2\log\sin B = 9{,}3711498-20$; $\sin^2 B = 0{,}00000000002$.

7) $\log(\sin^2 A - \sin^2 B) = 15{,}5438642-20$; $\sin^2 A - \sin^2 B = 0{,}00003498357$.
3) $\log\sin(A-B) = 7{,}7715760-10$

8) $\log\sin(A+B) = 7{,}7722882-10$.

In der Tafel Seite 211. erblicken wir aber, dass

$$\log\sin(A+B) = 7{,}7722880-10$$

ist, dass somit unser durch die oben angestellte Berechnung erhaltenes Resultat von dem wahren Werth von $\log\sin(A+B)$ in der 7ten Dezimalstelle um 2 differirt.

Der Grund, dass der aus der Formel

$$\sin(A+B) = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin(A-B)}$$

entnommene Werth von $\log\sin(A+B)$ in den meisten Fällen in der 7ten Dezimale unrichtig wird, liegt aber theilweise darin, dass — obgleich der Werth von $\log\sin A$ auf 7 Dezimalen richtig genommen werden kann — der aus ihm gefolgerte von $2\log\sin A$ und in Folge dessen auch der Numerus $\sin^2 A$ des letztern in der 7ten Dezimale meistens unrichtig sein werden, weil beim Dupliren von $\log\sin A$ die nach der 7ten Dezimale folgende 8te auf die 7te sehr oft einen Einfluss ausüben kann, der z. B. bei Ausführung obiger Rechnung unbeachtet geblieben ist.

§. 3.

Dividiren wir aber die Seiten der Gleichung

$$\sin(A+B) = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin(A-B)}$$

durch $\sin A$, so erhalten wir:

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin(A-B)} - \frac{\sin^2 B}{\sin A . \sin(A-B)},$$

eine Gleichung, welche, wie wir in den §§. 12. bis 14. sehen werden, sich zur Berechnung von $\log\sin(A+B)$ aus den Werthen von $\log\sin A$, $\log\sin(A-B)$ und $\log\sin B$ besser eignet, insofern sie $\log\sin(A+B)$ auf 7 Dezimalen genau gibt.

Letztere Gleichung kann umgeformt werden in

$$\frac{\sin A}{\sin(A-B)}-\frac{\sin(A+B)}{\sin A}=\frac{\sin^2 B}{\sin A.\sin(A-B)}.$$

Da der Ausdruck $\frac{\sin^2 B}{\sin A.\sin(A-B)}$ positiv ist, so folgt, dass

$$\frac{\sin A}{\sin(A-B)}>\frac{\sin(A+B)}{\sin A}$$

und auch

$$\log\sin A-\log\sin(A-B)>\log\sin(A+B)-\log\sin A$$

ist, d. h. dass für drei aufeinanderfolgende, um gleichviel verschiedene Winkel der Zuwachs vom logsin des kleinsten bis zum logsin des mittleren grösser als der Zuwachs vom logsin des mittleren bis zum logsin des grössten ist. Dem ist zuzuschreiben, warum in den Tafeln, während die allmähligen Zuwachse der Winkel gleich sind, die ihrer logsin beziehungsweise abnehmen.

§. 4.

Betrachten wir die Gleichung

$$\frac{\sin A}{\sin(A-B)}-\frac{\sin(A+B)}{\sin A}=\frac{\sin^2 B}{\sin A.\sin(A-B)}$$

noch einmal näher, so finden wir, dass, wenn B constant bleibt, A hingegen wächst, $\sin A$ und $\sin(A-B)$ und somit auch das Produkt $\sin A.\sin(A-B)$ grösser; der Quotient $\frac{\sin^2 B}{\sin A.\sin(A-B)}$ und mit ihm die links des Gleichheitszeichens stehende Differenz hingegen kleiner werden. Setzen wir ferner in obiger Gleichung $B=1''$ (gleich einer Secunde) und geben A so nach und nach die Werthe

$$X-9'',\ X-8'',\ X-7'', \ldots X-1'',\ X+1'',\ X+2'',\ X+3'', \ldots X+9''$$

in welchen X vorläufig noch unbestimmt ist, so erhalten wir:

$$1^{\alpha})\ \frac{\sin(X-9'')}{\sin(X-10'')}-\frac{\sin(X-8'')}{\sin(X-9'')}=\frac{\sin^2 1''}{\sin(X-9'').\sin(X-10'')}>\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2$$

$$2^{\alpha})\ \frac{\sin(X-8'')}{\sin(X-9'')}-\frac{\sin(X-7'')}{\sin(X-8'')}=\frac{\sin^2 1''}{\sin(X-8'')\sin(X-9'')}>\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2$$

$$3\alpha)\quad \frac{\sin(X-7'')}{\sin(X-8'')}-\frac{\sin(X-6'')}{\sin(X-7'')}=\frac{\sin^2 1''}{\sin(X-7'')\sin(X-8'')}>\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2,$$

$$\vdots$$

$$9\alpha)\quad \frac{\sin(X-1'')}{\sin(X-2'')}-\frac{\sin X}{\sin(X-1'')}=\frac{\sin^2 1''}{\sin(X-1'').\sin(X-2'')}>\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2;$$

$$1\beta)\quad \frac{\sin(X+1'')}{\sin X}-\frac{\sin(X+2'')}{\sin(X+1'')}=\frac{\sin^2 1''}{\sin(X+1'').\sin X}<\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2,$$

$$2\beta)\quad \frac{\sin(X+2'')}{\sin(X+1'')}-\frac{\sin(X+3'')}{\sin(X+2'')}=\frac{\sin^2 1''}{\sin(X+2'').\sin(X+1'')}<\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2,$$

$$3\beta)\quad \frac{\sin(X+3'')}{\sin(X+2'')}-\frac{\sin(X+4'')}{\sin(X+3'')}=\frac{\sin^2 1''}{\sin(X+3'')\sin(X+2'')}<\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2.$$

$$\vdots$$

$$9\beta)\quad \frac{\sin(X+9'')}{\sin(X+8'')}-\frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')}=\frac{\sin^2 1''}{\sin(X+9'').\sin(X+8'')}<\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2.$$

§. 5.

Da nun die Quotienten

$$\frac{\sin(X-9'')}{\sin(X-10'')},\ \frac{\sin(X-8'')}{\sin(X-9'')},\ \frac{\sin(X-7'')}{\sin(X-8'')},\ \frac{\sin(X-6'')}{\sin(X-7'')},\ldots\frac{\sin X}{\sin(X-1'')}$$

in den αGleichungen, sowie die Quotienten

$$\frac{\sin(X+1'')}{\sin X},\ \frac{\sin(X+2'')}{\sin(X+1'')},\ \frac{\sin(X+3'')}{\sin(X+2'')},\ \frac{\sin(X+4'')}{\sin(X+3'')},\ldots\frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')}$$

in den βGleichungen, in der Ordnung von links nach rechts abnehmen, so ist klar, dass unter den ersteren Quotienten

$$\frac{\sin(X-9'')}{\sin(X-10'')}\ \text{und}\ \frac{\sin X}{\sin(X-1'')},$$

unter den letzteren

$$\frac{\sin(X+1'')}{\sin X}\ \text{und}\ \frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')}$$

am meisten differiren.

Ihre Differenzen

$$\frac{\sin(X-9'')}{\sin(X-10'')}-\frac{\sin X}{\sin(X-1'')}$$

und

$$\frac{\sin(X+1'')}{\sin X}-\frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')}$$

sind aber beziehungsweise den Summen derjenigen Differenzen gleich, welche in den αGleichungen einerseits und in den βGleichungen andererseits links der Gleichheitszeichen stehen. Darum ist

$$\frac{\sin(X-9'')}{\sin(X-10'')}-\frac{\sin X}{\sin(X-1'')}>9.\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2,$$

$$\frac{\sin(X+1'')}{\sin X}-\frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')}<9.\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2.$$

§. 6.

Es ergibt sich ferner in Folge der in §. 4. angestellten Betrachtung, dass wenn z. B. in den βGleichungen X wächst, die Differenzen linker Hand der Gleichheitszeichen und somit auch die Summe dieser Differenzen oder die dieser Summe gleiche Differenz

$$\frac{\sin(X+1'')}{\sin X}-\frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')}$$

abnehmen.

§. 7.

Wenn wir die Tafeln der gemeinen Logarithmen durchblättern, so finden wir, dass wenn zwei unächte Dezimalbrüche (von denen also jeder grösser als 1 ist) um 0,0000001 von einander verschieden sind, ihre zugehörigen Logarithmen einen Unterschied haben, der höchstens 0,000000435 beträgt. (Vergl. Vega pag. 6. und 186.) Bestimmen wir nun X so, dass

$$9\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2=0{,}0000001$$

wird, so folgt aus §. 5., dass

$$\frac{\sin(X-9'')}{\sin(X-10'')}-\frac{\sin X}{\sin(X-1'')}>0{,}0000001$$

und

$$\frac{\sin(X+1'')}{\sin X}-\frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')}<0{,}0000001$$

wird, aus §. 4., dass von den Quotienten in den βGleichungen

$$\frac{\sin(X+1'')}{\sin X}, \quad \frac{\sin(X+2'')}{\sin(X+1'')}, \quad \frac{\sin(X+3'')}{\sin(X+2'')}, \quad \frac{\sin(X+4'')}{\sin(X+3'')}, \ldots \frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')},$$

von denen jeder grösser als 1 ist, diejenigen zwei, welche den grössten Unterschied haben, nicht einmal um 0,0000001 und somit ihre auf 7 Dezimalen berechneten Logarithmen nicht einmal um 0,0000000435 differiren, dass daher die Logarithmen obiger zehn Quotienten auf 7 Dezimalen im Allgemeinen als gleich angesehen werden dürfen.

Bezeichnen wir den auf 7 Dezimalen gerechneten Logarithmen eines der obigen Quotienten mit a, so haben wir demnach:

$$1\gamma) \quad \log\sin(X+1'')-\log\sin X=a,$$

$$2\gamma) \quad \log\sin(X+2'')-\log\sin(X+1'')=a,$$

$$3\gamma) \quad \log\sin(X+3'')-\log\sin(X+2'')=a,$$

$$4\gamma) \quad \log\sin(X+4'')-\log\sin(X+3'')=a,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$10\gamma) \quad \log\sin(X+10'')-\log\sin(X+9'')=a.$$

Addiren wir die Gleichungen 1γ) und 2γ); zu der Gleichung, die herauskommt, die Gleichung 3γ); zu der dadurch jetzt hervorgerufenen die Gleichung 4γ) u. s. f. und schreiben den dadurch entstandenen 9 neuen Gleichungen die Gleichung 1β) vor, so ergibt sich nachfolgende Zusammenstellung:

$$1\delta) \quad \log\sin(X+1'')-\log\sin X=1.a,$$

$$2\delta) \quad \log\sin(X+2'')-\log\sin X=2.a,$$

$$3\delta) \quad \log\sin(X+3'')-\log\sin X=3.a,$$

$$4\delta) \quad \log\sin(X+4'')-\log\sin X=4.a,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$10\delta) \quad \log\sin(X+10'')-\log\sin X=10.a.$$

Aus der letzten δGleichung erhalten wir aber

$$a=\frac{\log\sin(X+10'')-\log\sin X}{10}.$$

Wird dieser Ausdruck für a in die 9 andern δGleichungen substituirt, so erscheinen:

$$1\varepsilon) \quad \log\sin(X+1'')=\log\sin X+\frac{\log\sin(X+10'')-\log\sin X}{10},$$

$$2\varepsilon) \quad \log\sin(X+2'')=\log\sin X+2\left(\frac{\log\sin(X+10'')-\log\sin X}{10}\right),$$

$$3^\varepsilon)\quad \log\sin(X+3'') = \log\sin X + 3\,.\left(\frac{\log\sin(X+10'') - \log\sin X}{10}\right),$$

$$4^\varepsilon)\quad \log\sin(X+4'') = \log\sin X + 4\,.\left(\frac{\log\sin(X+10'') - \log\sin X}{10}\right),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$9^\varepsilon)\quad \log\sin(X+9'') = \log\sin X + 9\left(\frac{\log\sin(X+10'') - \log\sin X}{10}\right).$$

§. 8.

Es folgt aber aus §. 6. deutlich, dass die aus der Ungleichung

$$\frac{\sin(X+1'')}{\sin X} - \frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')} < 0{,}0000001$$

entsprungenen γ-, δ- und εGleichungen, wenn sie einmal für einen gewissen Winkel X in dem oben angeführten Sinne richtig sind, auch noch so gelten, wenn X wächst, eben weil in diesem Falle die erwähnte Ungleichung nach §. 6. um so mehr noch stattfindet.

§. 9.

Um nun aber X aus der Gleichung

$$9.\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2 = 0{,}0000001$$

zu bestimmen, haben wir durch Logarithmirung der Seiten vorstehender Gleichung nach 10:

$$\log 9 + 2(\log\sin 1'' - \log\sin X) = \log 0{,}0000001$$

oder mit Hülfe der Tafeln:

$$0{,}9542425 + 2(4{,}6855749 - 10 - \log\sin X) = -7$$
$$2(4{,}6855749 - 10 - \log\sin X) = -7{,}9542425$$
$$4{,}6855749 - 10 - \log\sin X = -3{,}9771212$$
$$8{,}6626961 - 10 = \log\sin X,$$

und es findet sich, dass der Winkel X zwischen den Winkelwerthen $2^0\,38'\,10''$ und $2^0\,38'\,20''$ liegt.

§. 10.

In den 7stelligen Tafeln brauchen daher nach §. 8. jedenfalls vom Winkelwerth $2^0\,40'$ an die Logarithmen der Sinus nur noch von zehn zu zehn Secunden angegeben zu sein.

Die zwischenliegenden log sin von Secunde zu Secunde können nach den εGleichungen berechnet werden, wobei noch zu bemerken ist, dass — neben dem in den Tafeln angegebenen Werthe

des log sin eines jeden, den Winkelwerth 2° 40′ überragenden Winkels X — für den in den Gleichungen vorkommenden Ausdruck

$$\frac{\log\sin(X+10'')-\log\sin X}{10}$$

der zugehörige Werth sich vorfinden kann, und zwar mit 10000000 vervielfacht, damit seine, zu viel Platz versperrenden Dezimalen wegfallen.

§. 11.

Auf ganz ähnliche Betrachtungen gestützt, wie die der §§. 4. bis 10. finden wir, indem wir X nach der Gleichung

$$59\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2=0{,}0000001$$

bestimmen,

einerseits, dass in den 7stelligen Tafeln vom Winkelwerth 5° 46′ an die Logarithmen der Sinus nur noch von Minute zu Minute angegeben zu sein brauchen,

andererseits die Regel, nach welcher die log sin für die zwischenliegenden Winkel von Secunde zu Secunde gefunden werden.

§. 12.

Ebenso kann gezeigt werden, dass

vom Winkelwerth 0° 52′ 50″ an unter je 3 aufeinanderfolgenden Winkel von 1″ zu 1″,
„ „ 1° 14′ 40″ „ „ „ 4 „ Winkel von 1″ zu 1″,
„ „ 1° 31′ 20″ „ „ „ 5 „ Winkel von 1″ zu 1″,
„ „ 1° 45′ 30″ „ „ „ 6 „ Winkel von 1″ zu 1″,
„ „ 1° 58′ 0″ „ „ „ 7 „ Winkel von 1″ zu 1″,
„ „ 2° 9′ 30″ „ „ „ 8 „ Winkel von 1″ zu 1″,
„ „ 2° 19′ 30″ „ „ „ 9 „ Winkel von 1″ zu 1″,
„ „ 2° 29′ 10″ „ „ „ 10 „ Winkel von 1″ zu 1″

beziehungsweise die Differenzen der logsin zweier aufeinan folgender derselben auf 7 Dezimalen als constant angesehen w den dürfen *).

Letztere Resultate sind noch angeführt worden, weil sie grossem Nutzen sind für die Berechnung der logsin von Secu zu Secunde. In den Tafeln von Vega finden wir nämlich S. 2 bis 228. die logsin von Secunde zu Secunde bis zu 1° 32′ an geben, während dieselben, wie bereits gezeigt wurde, etwa 2° 40′ berechnet sein sollten. Wir beschränken uns aber, an deuten, wie von diesen fehlenden logsin die zwischen 1° 32′ 1′ 45′ 30″ am schnellsten hergestellt werden können, — und üb lassen dem Leser, dieses Verfahren wenig modificirt, sowie d sen Gründe auf die übrigen überzutragen.

Es haben aber unter 5 aufeinanderfolgenden der Winkel z schen 1° 32′ und 1° 45′ 30″, wie wir oben gesehen haben, logsin zweier aufeinanderfolgender derselben eine constante Di renz. Wir brauchen daher hier blos die logsin der Winkel 4″ zu 4″ zu berechnen. Die zwischenliegenden können lei eingeschaltet werden. Es ist aber klar, dass, wenn die log zweier um 4″ verschiedener Winkel gegeben sind, der des näch folgenden beziehungsweise um 4″ höhern Winkels sogleich mitt der Formel des §. 3.:

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin A}=\frac{\sin A}{\sin(A-B)}-\frac{\sin^2 B}{\sin A\,.\sin(A-B)}$$

berechnet werden kann.

B e i s p i e l.

Wir entnehmen aus der Logarithmentafel Seite 228.:

$$\log\sin 1^\circ\ 32' = 8{,}4274621-10,$$
$$\log\sin 1^\circ\ 31'\ 56'' = 8{,}4271474-10;$$

Seite 206:

$$\log\sin 0^\circ\ 0'\ 4'' = 5{,}2876349-10.$$

Um nun $\log\sin 1^\circ\, 32'\, 4''$ zu berechnen setzen wir:

---

*) Gleiches findet statt

vom Winkelwerth	22° 3′	an für	601,
,,	32° 4′	,, ,,	1201,
,,	40° 34′	,, ,,	1801

aufeinanderfolgende, um je eine Secunde verschiedene Winkel etc.

$$B = 0^0\,0'\,4'', \quad A = 1^0\,32',$$

folglich

$$A - B = 1^0\,31'\,56'' \text{ und } A + B = 1^0\,32'\,4'',$$

und entwerfen folgendes Schema:

$$\log\sin(A+B) = 8{,}4277766 - 10$$

$$\log\frac{\sin(A+B)}{\sin A} = 0{,}00031449 \text{ (S. 186.)} \quad 9)\ \frac{\sin(A+B)}{\sin A} = 1{,}0007244$$

$$\log\sin A = 8{,}4274621$$

$$\log\sin(A-B) = 8{,}4271474$$

$$\log\frac{\sin A}{\sin(A-B)} = 0{,}0003147 \quad 8)\ \frac{\sin A}{\sin(A-B)} = 1{,}0007249$$

$$\log\sin A.\sin(A-B) = 6{,}8546095 - 10$$

$$2\log\sin B = 10{,}5752698 - 20$$

$$\log\frac{\sin^2 B}{\sin A.\sin(A-B)} = 3{,}7206603 - 10 \quad 7)\ \frac{\sin^2 B}{\sin A.\sin(A-B)} = 0{,}0000005\ldots$$

§. 13.

Da wir aus den §§. 3. und 4. wissen, dass die Quotienten

$$\frac{\sin 1^0\,32'}{\sin 1^0\,31'\,56''},\quad \frac{\sin 1^0\,32'\,4''}{\sin 1^0\,32'},\quad \frac{\sin 1^0\,32'\,8''}{\sin 1^0\,32'\,4''} \text{ etc.}$$

und ebenso die Quotienten

$$\frac{\sin^2 0^0\,0'\,4''}{\sin 1^0.32'.\sin 1^0\,31'\,56''},\quad \frac{\sin^2 0^0\,0'\,4''}{\sin 1^0\,32'\,4''.\sin 1^0\,32''}.$$

$$\frac{\sin^2 0^0\,0'\,4''}{\sin 1^0\,32'\,8''.\sin 1^0\,32'\,4''} \text{ etc.}$$

in der Ordnung von links nach rechts abnehmen, aus obiger Berechnung ferner ersehen, dass also jeder der erstern Quotienten zwischen den Werthen 1,000000 und 1,000725 und jeder der letztern zwischen den Werthen 0,0000000 und 0,0000006 steckt, ausserdem noch bemerken (vergl. Vega pag. 186.), dass — wenn ein Numerus, der zwischen 1,000000 und 1,000725 steckt, sich blos in der 7ten und 8ten Dezimale ändert, — das, um was dadurch sein Logarithmus sich ändert, aus der Aenderung des Numerus mittelst der Columne P. P. S. 186. oben sich entnehmen lässt, ohne dass man den Logarithmus selbst zu kennen braucht; so führt dies zu viel einfacherer Berechnung der log sin von 4″ zu 4″.

Um diess an dem Beispiel der Berechnung von $\log\sin 1^0\,32'\,4''$ zu zeigen, haben wir:

1) $\log\sin A = 8{,}4274621-10$

2) $\log\sin(A-B) = 8{,}4271474-10$

3) $\log\sin A.\sin(A-B) = 6{,}8546095-10$

4) $2\log\sin B = 10{,}5752698-20$

5) $\log\dfrac{\sin^2 B}{\sin A.\sin(A-B)} = 3{,}7206603-10$

6) $\log\dfrac{\sin^2 B}{\sin A.\sin(A-B)} = 0{,}00000052$ = der Aender. von $\dfrac{\sin A}{\sin(A-B)}$

$0{,}0000002|2$ = der entsprechenden, unmittelbar aus der Columne P. P. auf Seite 186. entnehmbaren Aender. von $\log\dfrac{\sin A}{\sin(A-B)}$

$0{,}0003147|. = \log\dfrac{\sin A}{\sin(A-B)}$ selbst

$0{,}0003145 = \log\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A}$

$8{,}4274621 = \log\sin A$

$8{,}4277766 = \log\sin(A+B)$, wie im vorigen Paragraphen.

§. 14.

Da die Aenderung von $\dfrac{\sin A}{\sin(A-B)}$ auf 8 Dezimalen genau wird, die von $\log\dfrac{\sin A}{\sin(A-B)}$ aber mittelst der Tafeln von Vega pag. 186. auf 8 Dezimalen genau sich angeben lässt, so ist aus obigem Schema leicht ersichtlich, dass $\log\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A}$ u. $\log\sin(A+B)$ auf 8 Dezimalen berechnet werden können, so bald $\log\sin A$ und $\log\sin(A-B)$ auf 8 Dezimalen angegeben sind. Wir werden zwar nicht vollkommene Garantie dafür leisten können, dass $\log\sin(A+B)$ auf 8, wohl aber um so eher, dass $\log\sin(A+B)$ auf 7 Dezimalen genau ist.

Wenn daher auf irgend eine Weise

$$\log\sin 1^\circ 32' \text{ und } \log\sin 1^\circ 31' 56''$$

auf 8 Decimalen genau berechnet werden, so können wir die log sin der folgenden Winkel von 4″ zu 4″ bis zu 1° 45′ 30″ auf 8 Dezimalen überhaupt, auf 7 Dezimalen aber genau berechnen.

II. Von den Logarithmen der Cosinus.

§. 15.

Der Ausdruck $\cos A$ und mit ihm $\log\cos A$ nehmen ab, wenn A wächst.

Somit ist der Zuwachs vom log cos eines Winkels bis zum log cos eines grösseren Winkels negativ.

§. 16.

Ganz ähnlich den Formeln der §§. 2., 3., 4. für die sinus finden wir für die cosinus:

$$\cos(A+B).\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B,$$

$$\cos(A+B)=\frac{\cos^2 A-\sin^2 B}{\cos(A-B)},$$

$$\frac{\cos(A+B)}{\cos A}=\frac{\cos A}{\cos(A-B)}-\frac{\sin^2 B}{\cos A.\cos(A-B)},$$

$$\frac{\cos A}{\cos(A-B)}-\frac{\cos(A+B)}{\cos A}=\frac{\sin^2 B}{\cos A.\cos(A-B)},$$

$$\frac{\cos A}{\cos(A-B)}>\frac{\cos(A+B)}{\cos A},$$

$$\log\cos A-\log\cos(A-B)>\log\cos(A+B)-\log\cos A.$$

Aus diesen Formeln können alle weiteren Eigenschaften der log cos ganz so abgeleitet werden, wie aus den §§. 2., 3., 4. die der log sin.

Es können aber jene Eigenschaften ebensowohl aus denen der Logarithmen für die sinus durch Benützung der Gleichung

$$\cos A=\sin(90^\circ-A)$$

gefunden und mit Hülfe der letztern Formel zugleich die log cos aller spitzen Winkel aus den Tabellen bei den log sin entnommen werden.

Aus den eben angeführten Gründen halten wir es unnöthig, den Leser mit den Untersuchungen über die log cos weiter zu belästigen und gehen daher über zu

---

III. Von den Logarithmen der Tangenten und Cotangenten.

§. 17.

tg A, sowie log tg A wachsen mit A selbst.

Der Zuwachs von log tg eines Winkels bis log tg eines grössern Winkels ist daher positiv.

§. 18.

Wir bemerken ferner, wenn wir rückwärts schliessen, dass

$$\log \operatorname{tg} A - \log \operatorname{tg}(A-B) \gtreqless \log \operatorname{tg}(A+B) - \log \operatorname{tg} A$$

oder

$$\log \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg}(A-B)} \gtreqless \log \frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg} A}$$

sein wird, sobald

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg}(A-B)} \gtreqless \frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg} A}$$

oder

$$\operatorname{tg}^2 A \gtreqless \operatorname{tg}(A+B)\operatorname{tg}(A-B)$$

oder

$$\operatorname{tg}^2 A \gtreqless \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B} \cdot \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B}$$

oder

$$\operatorname{tg}^2 A \gtreqless \frac{\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 B}{1 - \operatorname{tg}^2 A . \operatorname{tg}^2 B}$$

oder

$$\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^4 A . \operatorname{tg}^2 B \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 B$$

oder

$$\operatorname{tg}^4 A . \operatorname{tg}^2 B \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} \operatorname{tg}^2 B$$

oder

$$\operatorname{tg}^4 A \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 1$$

oder

$$\operatorname{tg} A \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 1$$

oder

$$A \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 45^0$$

sein wird, d. h. dass für drei aufeinanderfolgende, um gleichviel verschiedene Winkel der Zuwachs von logtg des kleinsten bis logtg des mittleren grösser, gleich oder kleiner ist als der Zuwachs von logtg des mittleren bis logtg des grössten, je nachdem der mittlere Winkel selbst kleiner, gleich oder grösser als 45^0 ist.

§. 19.

Wir haben

$$\log\operatorname{tg} A = \log\frac{\sin A}{\cos A} = \log\sin A - \log\cos A,$$

$$\log\operatorname{tg}(A+B) = \log\sin(A+B) - \log\cos(A+B),$$

$$\log\operatorname{tg}(A-B) = \log\sin(A-B) - \log\cos(A-B),$$

$$\log\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg} A} = \log\frac{\sin(A+B)}{\sin A} - \log\frac{\cos(A+B)}{\cos A} \text{ *)},$$

$$\log\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg}(A-B)} = \log\frac{\sin A}{\sin(A-B)} - \log\frac{\cos A}{\cos(A-B)},$$

*) Hieraus ergiebt sich das Gesetz:

$$\log\operatorname{tg}(A+B) - \log\operatorname{tg} A > \log\sin(A+B) - \log\sin A.$$

$$\log\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg}(A-B)}-\log\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg} A}=\left\{\log\frac{\sin A}{\sin(A-B)}-\log\frac{\sin(A+B)}{\sin A}\right\}$$
$$-\left\{\log\frac{\cos A}{\cos(A-B)}-\log\frac{\cos(A+B)}{\cos A}\right\}.$$

Nun ist nach §. 16.:

$$\frac{\cos A}{\cos(A-B)}>\frac{\cos(A+B)}{\cos A},$$

folglich auch

$$\log\frac{\cos A}{\cos(A-B)}>\log\frac{\cos(A+B)}{\cos A}$$

und

$$\log\frac{\cos A}{\cos(A-B)}-\log\frac{\cos(A+B)}{\cos A}>0,$$

also

$$\log\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg}(A-B)}-\log\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg} A}<\log\frac{\sin A}{\sin(A-B)}-\log\frac{\sin(A+B)}{\sin A}.$$

§. 20.

Die 10 Logarithmen

$$\log\frac{\sin(X+1'')}{\sin X},\quad \log\frac{\sin(X+2'')}{\sin(X+1'')},\quad \log\frac{\sin(X+3'')}{\sin(X+2'')},\ldots\log\frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')},$$

welche positiv sind, nehmen, wie wir aus §. 5. ersehen können, in der Ordnung von links nach rechts ab, ebenso die positiven Logarithmen

$$\log\frac{\operatorname{tg}(X+1'')}{\operatorname{tg} X},\quad \log\frac{\operatorname{tg}(X+2'')}{\operatorname{tg}(X+1'')},\quad \log\frac{\operatorname{tg}(X+3'')}{\operatorname{tg}(X+2'')},\ldots\log\frac{\operatorname{tg}(X+10'')}{\operatorname{tg}(X+9'')},$$

so lange bei diesen keiner der vorkommenden Winkel den Winkelwerth 45^0 überragt. (vergl. §. 18.)

Nur unter der letzten Voraussetzung folgt aus der Ungleichung

$$\log\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg}(A-B)}-\log\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg} A}<\log\frac{\sin A}{\sin(A-B)}-\log\frac{\sin(A+B)}{\sin A},$$

dass das Abnehmen der Logarithmen der Tangenten-Quotienten nicht so rasch vor sich geht, wie bei den Logarithmen der Sinus-Quotienten. Wenn daher bei den zehn Logarithmen der Sinus-Quotienten die zwei äussersten

$$\log\frac{\sin(X+1'')}{\sin X} \text{ und } \log\frac{\sin(X+10'')}{\sin(X+9'')},$$

deren Unterschied am grössten ist, nicht einmal um 0,00000005 differiren, — was von demjenigen Werthe von X an stattfindet, von welchem aus blos die log sin von 10″ zu 10″ aufgestellt zu sein brauchen, — so folgt daraus, dass bei den Logarithmen der Tangenten-Quotienten die zwei äussersten, am meisten von einander verschiedenen

$$\log\frac{\operatorname{tg}(X+1'')}{\operatorname{tg} X} \text{ und } \log\frac{\operatorname{tg}(X+10'')}{\operatorname{tg}(X+9'')}$$

um so mehr nicht einmal um 0,00000005 differiren können, dass folglich von 2° 38′ bis 45° auch die log tg nur noch von 10″ zu 10″ angegeben zu sein brauchen.

Nach §. 18. weiss man aber, dass

$$\log\operatorname{tg}45^0 - \log\operatorname{tg}(45^0 - A) = \log\operatorname{tg}(45^0 + A) - \log\operatorname{tg}45^0$$

ist. Da nun $\operatorname{tg}45^0 = 1$, also $\log\operatorname{tg}45^0 = 0$ ist, so folgt hieraus:

$$-\log\operatorname{tg}(45^0 - A) = +\log\operatorname{tg}(45^0 + A).$$

Gibt man A so nach und nach die Werthe Y, $Y-1''$, $Y-2''$,.... ... $Y-10''$, so erhält man:

$$1\varphi)\quad -\log\operatorname{tg}(45^0 - Y) = +\log\operatorname{tg}(45^0 + Y),$$
$$2\varphi)\quad -\log\operatorname{tg}(46^0 - Y) = +\log\operatorname{tg}(44^0 + Y),$$
$$3\varphi)\quad -\log\operatorname{tg}(47^0 - Y) = +\log\operatorname{tg}(43^0 + Y),$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$10\varphi)\quad -\log\operatorname{tg}(54^0 - Y) = +\log\operatorname{tg}(36^0 + Y),$$
$$11\varphi)\quad -\log\operatorname{tg}(55^0 - Y) = +\log\operatorname{tg}(35^0 + Y),$$

und wenn man jede der Gleichungen 2) bis 11) von ihrer vorhergehenden subtrahirt:

$$1\psi)\ \log\operatorname{tg}(46^0 - Y) - \log\operatorname{tg}(45^0 - Y) = \log\operatorname{tg}(45^0 + Y) - \log\operatorname{tg}(44^0 + Y),$$
$$2\psi)\ \log\operatorname{tg}(47^0 - Y) - \log\operatorname{tg}(46^0 - Y) = \log\operatorname{tg}(44^0 + Y) - \log\operatorname{tg}(43^0 + Y),$$
$$3\psi)\ \log\operatorname{tg}(48^0 - Y) - \log\operatorname{tg}(47^0 - Y) = \log\operatorname{tg}(43^0 + Y) - \log\operatorname{tg}(42^0 + Y),$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$10\psi)\ \log\operatorname{tg}(55^0 - Y) - \log\operatorname{tg}(54^0 - Y) = \log\operatorname{tg}(36^0 + Y) - \log\operatorname{tg}(35^0 + Y)$$

Es ist klar, dass — wenn die Differenzen linker Hand d Gleichheitszeichens einander gleich gesetzt werden, sobald diej nigen zwei unter ihnen, welche am meisten von einander verschi den sind, nicht einmal um 0,00000005 differiren — auch die Diff renzen rechter Hand in demselben Sinne einander gleich sind.

Bei den Differenzen linker Hand der Gleichheitszeichen tr aber dieser Fall ein, so lange die dort vorkommenden Wink grössen $45^0 - Y$, $46^0 - Y$, etc. zwischen $2^0\ 38'$ und 45^0 steck was stattfinden wird, so bald die rechter Hand der Gleichhei zeichen vorkommenden Winkelgrössen $45^0 + Y$, $44^0 + Y$, e zwischen den Winkelwerthen $87^0\ 22'$ und 45^0 sich befinden.

Folglich brauchen auch zwischen den Winkelwerthen 45^0 u $87^0\ 22'$ die log tg nur von $10''$ zu $10''$ angegeben zu sein.

§. 21.

Eine der vorigen ganz ähnliche Untersuchung lehrt, dass 7stelligen Tafeln zwischen den Winkelwerthen $6^0\ 46'$ und 83^0 l sogar nur die log tg der Winkel von Minute zu Minute zu enth ten brauchen.

§. 22.

Die Eigenschaften der log cot lassen sich herleiten aus de der log tg entweder mittelst der Formel

$$\cot A = \operatorname{tg}(90^0 - A)$$

oder mittelst der Formel

$$\log\cot A + \log\operatorname{tg} A = 0\ ^*),$$

welche beide Formeln zugleich dazu dienen können, den log eines Winkels in den Tafeln unter der Rubrik log tg zu erheben *

*) Hergeleitet aus der Formel $\cot A \operatorname{tg} A = 1$.

**) Ganz unabhängig von den Gesetzen der log tg ergibt sich au wenn rückwärts geschlossen wird, dass

$$\log\cot A - \log\cot(A - B) \gtreqless \log\cot(A + B) - \log\cot A$$

oder

$$\log\frac{\cot A}{\cot(A - B)} \gtreqless \log\frac{\cot(A + B)}{\cot A}$$

Schlussbemerkungen.

1) Wenn wir in der Ungleichung des §. 5.:

$$\frac{\sin(X-9'')}{\sin(X-10'')}-\frac{\sin X}{\sin(X-1'')}>9\left(\frac{\sin 1''}{\sin X}\right)^2$$

$$X-10''=1^0\,32'\,0'', \quad \text{also} \quad X=1^0\,32'\,10''$$

setzen, so finden wir

$$\frac{\sin 1^0\,32'\,1''}{\sin 1^0\,32'\,0''}-\frac{\sin 1^0\,32'\,10''}{\sin 1^0\,32'\,9''}>0{,}00000029$$

und

(vergl. Vega S. 186.)

---

sein wird, sobald

$$\frac{\cot A}{\cot(A-B)} \gtreqless \frac{\cot(A+B)}{\cot A}$$

oder

$$\cot^2 A \gtreqless \cot(A+B)\cot(A-B)$$

oder

$$\cot^2 A \gtreqless \frac{\cot A.\cot B-1}{\cot B+\cot A}\cdot\frac{\cot A.\cot B+1}{\cot B-\cot A}$$

oder

$$\cot^2 A \gtreqless \frac{\cot^2 A.\cot^2 B-1}{\cot^2 B-\cot^2 A}$$

oder

$$\cot^2 A.\cot^2 B-\cot^4 A \gtreqless \cot^2 A.\cot^2 B-1$$

oder

$$\cot^4 A \lesseqgtr 1$$

oder

$$\cot A \lesseqgtr 1$$

oder

$$A \gtreqless 45^\circ$$

sein wird.

$$\log\frac{\sin 1^{0}\,32'\,1''}{\sin 1^{0}\,32'\,0''}-\log\frac{\sin 1^{0}\,32'\,10''}{\sin 1^{0}\,32'\,9''}>0{,}00000012.$$

Hierin liegt der Grund, warum man die log sin von zehn zu zehn Secunden nicht schon vom Winkelwerth $1^{0}\,32'\,0''$ an beginnen lassen soll, wie Vega gethan.

Viel weniger Ungenauigkeiten verursacht in Vega's Tafeln der zu frühzeitige Beginn der log sin von Minute zu Minute (vom Winkelwerth 6^{0} an). Aeusserst überflüssig jedoch war es von Herrn Köhler, die log sin von zehn zu zehn Secunden bis zum Winkelwerth 9^{0} anzugeben.

2) Aehnliche Beobachtungen lehren uns, dass in den 5stelligen Tafeln die log sin von Secunde zu Secunde bis zu $0^{0}\,16'\,0''$, die von zehn zu zehn Secunden bis zu $0^{0}\,41'\,0''$ angegeben sein sollen.

XVI.

Aphoristische Bemerkungen über die dreiseitige Pyramide.

Von

dem Herausgeber.

I.

Wenn man die Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide durch a, b, c, d und die von denselben eingeschlossenen Winkel durch (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd) bezeichnet, so hat man bekanntlich, wie aus der Lehre von den Projectionen auf der Stelle erhellet, die vier folgenden Gleichungen:

$$1)\quad\begin{cases} a=b\cos(ab)+c\cos(ac)+d\cos(ad),\\ b=c\cos(bc)+d\cos(bd)+a\cos(ab),\\ c=d\cos(cd)+a\cos(ac)+b\cos(bc),\\ d=a\cos(ad)+b\cos(bd)+c\cos(cd).\end{cases}$$

So bekannt auch diese Gleichungen längst sind, und so viele Untersuchungen man nach sehr verschiedenen Richtungen hin auch schon über die dreiseitige Pyramide angestellt hat: so scheint man doch aus den obigen Gleichungen noch nicht allen Nutzen gezogen zu haben, der sich aus denselben ziehen lässt. So wie sich auf die drei bekannten Gleichungen des ebenen Dreiecks:

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

$$b = c\cos A + a\cos C,$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

die ganze ebene Trigonometrie gründen lässt, so würde sich auf die Gleichungen 1) eine eigene Wissenschaft gründen lassen, welche aus sechs gegebenen der zehn Stücke

$$a,\ b,\ c,\ d;\ \ (ab),\ (ac),\ (ad),\ (bc),\ (bd),\ (cd)$$

der dreiseitigen Pyramide die vier übrigen Stücke derselben zu finden lehrt. Diese Wissenschaft hier zu entwickeln, ist jetzt gar nicht meine Absicht; ich will nur an einigen Beispielen den Nutzen der Gleichungen 1) zeigen und daran noch einige andere Bemerkungen über die dreiseitige Pyramide knüpfen.

II.

Es ist bekannt, dass die sechs Winkel (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd) nicht ganz unabhängig von einander sind, sondern dass zwischen denselben eine gewisse Gleichung Statt findet, eben so wie auch die drei Winkel des ebenen Dreiecks durch eine Gleichung unter einander verknüpft sind. Ich glaube aber, dass die Entwickelung dieser Gleichung oder Relation, wie man dieselbe z. B. in dem „Mémoire sur la relation, qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace, par L. N. M. Carnot. Paris 1806. Probl. XXII. (Geometrie der Stellung. Thl. II. S. 291.)“ findet, rücksichtlich der Einfachheit Manches zu wünschen übrig lässt, und dass man auch dieser Gleichung selbst noch eine einfachere, wenn auch weniger symmetrische Form geben kann, als a. a. O. geschehen ist. Um dies, ausgehend von den Gleichungen 1), zu zeigen, sind aber zuerst noch einige allgemeine Betrachtungen über die Elimination nöthig, mit denen wir uns jetzt zunächst beschäftigen wollen.

Wenn man zwischen den zwei Grössen x, y die drei Gleichungen

$$ax + by = \alpha,$$
$$a_1x + b_1y = \alpha_1,$$
$$a_2x + b_2y = \alpha_2$$

hat, diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$a_1b_2 - b_1a_2,\quad a_2b - b_2a,\quad ab_1 - ba_1$$

multiplicirt und dann zu einander addirt, so erhält man die Gleichung

$$\alpha(a_1b_2 - b_1a_2) + \alpha_1(a_2b - b_2a) + \alpha_2(ab_1 - ba_1) = 0.$$

Hat man nun zwischen den drei Grössen x, y, z die vier Gleichungen

$$ax + by + cz = \alpha,$$
$$a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = \alpha_3;$$

so erhält man aus denselben zuvörderst durch Elimination von z:

$$(ac_1 - ca_1)x + (bc_1 - cb_1)y = \alpha c_1 - c\alpha_1,$$
$$(a_1c_2 - c_1a_2)x + (b_1c_2 - c_1b_2)y = \alpha_1c_2 - c_1\alpha_2,$$
$$(a_2c_3 - c_2a_3)x + (b_2c_3 - c_2b_3)y = \alpha_2c_3 - c_2\alpha_3.$$

Wendet man nun auf diese drei Gleichungen das vorhergehende Verfahren an, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned}0 = \;& (\alpha c_1 - c\alpha_1)\{(a_1c_2 - c_1a_2)(b_2c_3 - c_2b_3) - (b_1c_2 - c_1b_2)(a_2c_3 - c_2a_3)\}\\ &+ (\alpha_1c_2 - c_1\alpha_2)\{(a_2c_3 - c_2a_3)(bc_1 - cb_1) - (b_2c_3 - c_2b_3)(ac_1 - ca_1)\}\\ &+ (\alpha_2c_3 - c_2\alpha_3)\{(ac_1 - ca_1)(b_1c_2 - c_1b_2) - (bc_1 - cb_1)(a_1c_2 - c_1a_2)\}.\end{aligned}$$

Mittelst leichter Rechnung bringt man aber diese Gleichung auf die folgende Form:

$$\begin{aligned}0 = \;& \alpha\{a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + a_2(b_3c_1 - c_3b_1) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)\}\\ &+ \alpha_1\{a_2(bc_3 - cb_3) + a_3(b_2c - c_2b) + a(b_3c_2 - c_3b_2)\}\\ &+ \alpha_2\{a_3(bc_1 - cb_1) + a(b_1c_3 - c_1b_3) + a_1(b_3c - c_3b)\}\\ &+ \alpha_3\{a(b_2c_1 - c_2b_1) + a_1(bc_2 - cb_2) + a_2(b_1c - c_1b)\},\end{aligned}$$

oder auch auf die Form:

$$0 = (bc_1 - cb_1)(\alpha_2 a_3 - a_2 \alpha_3)$$
$$+ (bc_2 - cb_2)(\alpha_3 a_1 - a_3 \alpha_1)$$
$$+ (bc_3 - cb_3)(\alpha_1 a_2 - a_1 \alpha_2)$$
$$+ (b_1 c_2 - c_1 b_2)(\alpha a_3 - a \alpha_3)$$
$$+ (b_1 c_3 - c_1 b_3)(\alpha_2 a - a_2 \alpha)$$
$$+ (b_2 c_3 - c_2 b_3)(\alpha a_1 - a \alpha_1).$$

Dass sich diese bemerkenswerthe Gleichung noch auf verschiedene Arten umgestalten lassen würde, versteht sich von selbst. Hier mag das Vorhergehende genügen, indem wir von der vorstehenden Gleichung nun sogleich die folgende Anwendung machen wollen.

III.

Die Gleichungen 1) können auf folgende Art geschrieben werden:

$$1 = \frac{b}{a}\cos(ab) + \frac{c}{a}\cos(ac) + \frac{d}{a}\cos(ad),$$
$$\cos(ab) = \frac{b}{a} - \frac{c}{a}\cos(bc) - \frac{d}{a}\cos(bd),$$
$$\cos(ac) = -\frac{b}{a}\cos(bc) + \frac{c}{a} - \frac{d}{a}\cos(cd),$$
$$\cos(ad) = -\frac{b}{a}\cos(bd) - \frac{c}{a}\cos(cd) + \frac{d}{a};$$

und setzen wir jetzt in der letzten Gleichung in II. für

$$a,\ b,\ c;$$
$$a_1,\ b_1,\ c_1;$$
$$a_2,\ b_2,\ c_2;$$
$$a_3,\ b_3,\ c_3;$$
$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

respective

$$\cos(ab),\quad \cos(ac),\quad \cos(ad);$$
$$1,\quad -\cos(bc),\quad -\cos(bd);$$
$$-\cos(bc),\quad 1,\quad -\cos(cd);$$
$$-\cos(bd),\quad -\cos(cd),\quad 1;$$
$$1,\quad \cos(ab),\quad \cos(ac),\quad \cos(ad);$$

so erhalten wir aus der in Rede stehenden Gleichung sogleich die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}0= & \{\cos(ac)\cos(bd)-\cos(ad)\cos(bc)\}^2 \\ & -\{\cos(ad)+\cos(ac)\cos(cd)\}\{\cos(ad)+\cos(bd)\cos(ab)\} \\ & -\{\cos(ac)+\cos(ad)\cos(cd)\}\{\cos(ac)+\cos(ab)\cos(bc)\} \\ & -\{\cos(bd)+\cos(bc)\cos(cd)\}\{\cos(bd)+\cos(ab)\cos(ad)\} \\ & -\{\cos(bc)+\cos(bd)\cos(cd)\}\{\cos(bc)+\cos(ac)\cos(ab)\} \\ & +\{1-\cos(cd)\cos(cd)\}\{1-\cos(ab)\cos(ab)\},\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}2)\quad & \sin(ab)^2\sin(cd)^2+\{\cos(ac)\cos(bd)-\cos(ad)\cos(bc)\}^2 \\ & =\{\cos(ac)+\cos(ad)\cos(cd)\}\{\cos(ac)+\cos(bc)\cos(ab)\} \\ & +\{\cos(ad)+\cos(ac)\cos(cd)\}\{\cos(ad)+\cos(bd)\cos(ab)\} \\ & +\{\cos(bc)+\cos(bd)\cos(cd)\}\{\cos(bc)+\cos(ac)\cos(ab)\} \\ & +\{\cos(bd)+\cos(bc)\cos(cd)\}\{\cos(bd)+\cos(ad)\cos(ab)\}.\end{aligned}$$

Wenn auch diese Gleichung der sonst bekannten Gleichung zwischen den sechs Winkeln (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd) rücksichtlich der Symmetrie der Form nachsteht, so scheint mir doch der obigen Gleichung, die natürlich noch mannigfaltiger Umgestaltungen, bei denen ich mich hier aber nicht aufhalten will, fähig sein würde, der Vorzug grösserer Einfachheit zu gebühren.

IV.

Wenn man die vier Gleichungen 1) nach der Reihe mit a, b, c, d multiplicirt, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}a^2 &= ab\cos(ab)+ac\cos(ac)+ad\cos(ad), \\ b^2 &= bc\cos(bc)+bd\cos(bd)+ab\cos(ab), \\ c^2 &= cd\cos(cd)+ac\cos(ac)+bc\cos(bc), \\ d^2 &= ad\cos(ad)+bd\cos(bd)+cd\cos(cd).\end{aligned}$$

Zieht man nun von der Summe der drei ersten Gleichungen die vierte Gleichung ab, so erhält man:

$$a^2+b^2+c^2-d^2=2ab\cos(ab)+2ac\cos(ac)+2bc\cos(bc)$$

oder

$$3)\quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos(ab) - 2ac\cos(ac) - 2bc\cos(bc).$$

Für $(ab) = (ac) = (bc) = 90^0$ ist

$$4)\quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Einen andern Beweis dieser merkwürdigen Sätze s. m. Archiv. Thl. XXI. S. 352. Die obige Ableitung derselben rührt von Crelle (Sammlung mathematischer Aufsätze. Band I. Berl. 1821. S. 108.) her.

V.

Wir wollen jetzt einen Ausdruck für den körperlichen Inhalt der Pyramide durch die sechs Stücke a, b, c; (ab), (ac), (bc) suchen.

In Taf. VI. Fig. I. sei $ABCD$ die gegebene dreiseitige Pyramide, deren körperlichen Inhalt wir durch P bezeichnen wollen. Ferner sei

$$\Delta ABC = a, \quad \Delta ABD = b, \quad \Delta ACD = c$$

und h bezeichne die Höhe der Pyramide in Bezug auf $\Delta ABC = a$ als Grundfläche. Dies vorausgesetzt ist

$$P = \tfrac{1}{3}ah.$$

Setzen wir nun noch $AB = x$, $AC = y$ und $\angle BAC = \alpha$, so ist offenbar

$$h = \frac{2b}{x}\sin(ab) = \frac{2c}{y}\sin(ac);$$

also

$$2b\sin(ab) = hx, \quad 2c\sin(ac) = hy;$$

woraus sich durch Multiplication

$$4bc\sin(ab)\sin(ac) = h^2xy$$

ergiebt. Nun ist aber

$$a = \tfrac{1}{2}xy\sin\alpha, \quad xy = \frac{2a}{\sin\alpha};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$2bc\sin\alpha\sin(ab)\sin(ac) = ah^2,$$

woraus sich sogleich

$$h=\frac{\sqrt{2abc\sin\alpha\sin(ab)\sin(ac)}}{a},$$

folglich nach dem Obigen

$$5)\quad P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2abc\sin\alpha\sin(ab)\sin(ac)}$$

ergiebt.

Nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie erhäl[t] aber, wenn man sich ein der Ecke A entsprechendes sphäri[sches] Dreieck beschrieben denkt, wie die Figur zeigt, sogleich:

$$\cos\alpha=\frac{\cos(bc)+\cos(ab)\cos(ac)}{\sin(ab)\sin(ac)},$$

also

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{\sin(ab)^2\sin(ac)^2-\{\cos(bc)+\cos(ab)\cos(ac)\}^2}}{\sin(ab)\sin(ac)}$$

folglich nach (5):

$$6)\quad P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2abc}.\sqrt[4]{\sin(ab)^2\sin(ac)^2-\{\cos(bc)+\cos(ab)\cos(\ldots}$$

oder

$$7)$$

$$P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2abc}.\sqrt[4]{-\{\cos[(ab)+(ac)]+\cos(bc)\}\{\cos[(ab)-(ac)]+\cos\ldots}$$

oder nach einer bekannten Zerlegung, wenn man der Kürze w[egen]

$$8)\quad \begin{aligned} Q=-\cos\tfrac{1}{2}\{\ (ab)+(ac)+(bc)\}\\ \times\cos\tfrac{1}{2}\{-(ab)+(ac)+(bc)\}\\ \times\cos\tfrac{1}{2}\{\ (ab)-(ac)+(bc)\}\\ \times\cos\tfrac{1}{2}\{\ (ab)+(ac)-(bc)\}\end{aligned}$$

setzt:

$$P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2abc}.\sqrt[4]{4Q},$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$9)\quad P=\tfrac{2}{3}\sqrt{abc}.\sqrt[4]{Q}.$$

Für $(ab)=(ac)=90^0$ ist nach 6):

$$P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2abc}.\sqrt[4]{1-\cos(bc)^2}=\tfrac{1}{3}\sqrt{2abc}.\sqrt[4]{\sin(bc)^2},$$

also

$$10)\quad P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2abc\sin(bc)}.$$

Aus der Gleichung 3) folgt:

$$\cos(bc)=\frac{a^2+b^2+c^2-d^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)}{2bc},$$

also

$$\cos(bc)+\cos(ab)\cos(ac)$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-d^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)+2bc\cos(ab)\cos(ac)}{2bc};$$

folglich ist von

$$\sin(ab)^2\sin(ac)^2-\{\cos(bc)+\cos(ab)\cos(ac)\}^2$$

der Zähler:

$$4b^2c^2\sin(ab)^2\sin(ac)^2$$

$$-\{a^2+b^2+c^2-d^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)+2bc\cos(ab)\cos(ac)\}^2,$$

und $4b^2c^2$ ist der Nenner. Zerlegt man nun den Zähler auf bekannte Weise in zwei Factoren, so wird derselbe nach leichter Rechnung:

$$-\{a^2+b^2+c^2-d^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)+2bc\cos[(ab)-(ac)]\}$$

$$\times\{a^2+b^2+c^2-d^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)+2bc\cos[(ab)+(ac)]\};$$

also ist nach 6):

$$11)\quad P=$$

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{a}\,.\sqrt[4]{\begin{array}{l}-\{a^2+b^2+c^2-d^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)+2bc\cos[(ab)-(ac)]\}\\ \times\{a^2+b^2+c^2-d^2-2ab\cos(ab)-2ac\cos(ac)+2bc\cos[(ab)+(ac)]\}\end{array}}.$$

Für $(ab)=(ac)=90^0$ ist

$$12)\quad P=\tfrac{1}{3}\sqrt{a}\,.\sqrt[4]{-\{a^2+(b+c)^2-d^2\}\{a^2+(b-c)^2-d^2\}},$$

so dass sich also in diesem Falle der körperliche Inhalt der Pyramide bloss durch die vier Seitenflächen ausdrücken lässt.

Bezeichnen wir den Halbmesser der in die Pyramide beschriebenen Kugel durch r, so ist

$$P=\tfrac{1}{3}(a+b+c+d)r,$$

also

$$r=\frac{3P}{a+b+c+d},$$

folglich nach 9):

$$13)\quad r=\frac{2\sqrt{abc}}{a+b+c+d}\sqrt[4]{Q},$$

wo Q die aus 8) bekannte Bedeutung hat.

VI.

Nach 6) ist:

$$P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2acd}\,.\sqrt[4]{\sin(ac)^2\sin(ad)^2-\{\cos(cd)+\cos(ac)\cos(ad)\}^2},$$

$$P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2bcd}\,.\sqrt[4]{\sin(bc)^2\sin(bd)^2-\{\cos(cd)+\cos(bc)\cos(bd)\}^2};$$

also, wenn man dividirt:

$$1=\sqrt{\frac{a}{b}}\,.\sqrt[4]{\frac{\sin(ac)^2\sin(ad)^2-\{\cos(cd)+\cos(bc)\cos(ad)\}^2}{\sin(bc)^2\sin(bd)^2-\{\cos(cd)+\cos(bc)\cos(bd)\}^2}},$$

oder

$$14)\quad \frac{b}{a}=\sqrt{\frac{\sin(ac)^2\sin(ad)^2-\{\cos(cd)+\cos(ac)\cos(ad)\}^2}{\sin(bc)^2\sin(bd)^2-\{\cos(cd)+\cos(bc)\cos(bd)\}^2}}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$M=\sin(ab)^2\sin(ac)^2-\{\cos(bc)+\cos(ab)\cos(ac)\}^2,$$
$$M'=\sin(ab)^2\sin(ad)^2-\{\cos(bd)+\cos(ab)\cos(ad)\}^2,$$
$$M''=\sin(ac)^2\sin(ad)^2-\{\cos(cd)+\cos(ac)\cos(ad)\}^2$$

und

$$N'=\sin(bc)^2\sin(bd)^2-\{\cos(cd)+\cos(bc)\cos(bd)\}^2,$$
$$N''=\sin(bc)^2\sin(cd)^2-\{\cos(bd)+\cos(bc)\cos(cd)\}^2;$$

so ist nach 14):

$$b=a\sqrt{\frac{M''}{N'}},\quad c=a\sqrt{\frac{M'}{N''}};$$

also

$$2abc=2a^3\sqrt{\frac{M'M''}{N'N''}}.$$

Folglich ist nach 6):

$$15)\quad P=\tfrac{1}{3}\sqrt{2abc}\,.\sqrt[4]{M}=\tfrac{1}{3}a\sqrt{2a}\,.\sqrt[4]{\frac{MM'M''}{N'N''}}.$$

Dass sich noch verschiedene andere Relationen dieser Art aus dem Obigen ableiten lassen würden, erhellet leicht.

XVII.

tudien zur mathematischen Theorie der elastischen Körper.

Von
Herrn Professor Dr. *J. Dienger*
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Navier im siebenten Bande der „Mémoires de l'Acadé-
ıie des Sciences", Poisson im achten Bande derselben
lemoiren, Cauchy in seinen „Exerciçes" und jüngst Lamé
ı seinen „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasti-
ité des corps solides" (früher schon im VII. Bande des
relle'schen Journals) haben die allgemeinen Gleichungen
es Gleichgewichts und der Bewegung elastischer Körper aufge-
tellt und auf einzelne Fälle angewendet. Trotzdem dürfte es
icht blosse Wiederholung sein, wenn im Nachfolgenden versucht
rird, die allgemeinen Gesetze dieser innern Bewegungen nachzu-
reisen. Dass dabei Bekanntes wiederholt werden musste, lag in
ler Natur der Sache; doch glaube ich, dass selbst dieses unter
nderer Form erschienen ist.

I.

Beschaffenheit der Körper.

Ein jeder Körper besteht aus Atomen, die ausserordentlich
lein sind, deren Form wir freilich nicht kennen, die aber jeden-
lls eine bestimmte ist. Für den Augenblick kann man sich die-
lben etwa unter der Form von verschwindend kleinen Kugeln
rstellen. Diese Atome sind umhüllt von einer Aetheratmosphäre,
obei die Masse einer solchen Umhüllung, gegenüber der Masse

des Körperatoms, sehr klein ist. Ein solches Körperatom mit der dasselbe umgebenden Aetherhülle bildet für sich eine eigene Welt, ein Molekularsystem; die einzelnen Molekularsysteme sind von einander getrennt durch Entfernungen, die sehr gross sind im Verhältnisse zu ihren eigenen Dimensionen. Bildlich gesprochen stellt also ein Körper eine Art Planetensystem vor, in dem jeder Planet mit seiner Atmosphäre umgeben ist. Die Aetherhülle besteht natürlich nicht aus einem einzigen Aetheratome; es sind vielmehr deren eine sehr grosse Anzahl um ein Körperatom gelagert.

Die Aetheratome nun, sowohl innerhalb derselben Hülle, als in verschiedenen Hüllen, stossen sich gegenseitig ab; Körperatome ziehen sich gegenseitig an, eben so ziehen sich Körper- und Aetheratome an. Bei der abstossend wirkenden Kraft der Aetheratome gegen einander ist es nothwendig, dass das von einer Hülle umgebene Körperatom sehr kräftig auf dieselbe wirke, wenn sie soll zusammengehalten werden.

Die Gesetze dieser gegenseitigen Einwirkungen sind, ihrem analytischen Ausdrucke nach, nicht bekannt. Was die Anziehung der Körperatome anbelangt, so weiss man, dass, wenn sie in sehr grosser Entfernung von einander sind, dieselbe ihren beiderseitigen Massen direkt und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist, wogegen in minder beträchtlicher Ferne noch die Kohäsions- und chemische Anziehung hinzutreten. In Beziehung auf den Aether ist in dieser Hinsicht Nichts bekannt. Wir werden aber sagen können, dass die Anziehung oder Abstossung zweier Atome — gleich viel ob Körper- oder Aetheratome — ausgedrückt werden könne durch

$$Mmf(r),$$

wo M, m die Massen der zwei Atome, r ihre Entfernung ist. Dabei ist $f(r)$ so beschaffen, dass für einigermassen grosse r (gross im Verhältniss zur Entfernung zweier Molekularsysteme) diese Funktion verschwindend kleine Werthe hat. In Bezug auf die Bezeichnung wollen wir, wenn nöthig, durch die lateinischen Buchstaben M, m Massen von Körperatomen, durch die griechischen M, μ Massen von Aetheratomen bezeichnen. (Wir lassen, wie ersichtlich, die Schwere aus dem Spiele.)

Wir heissen nun weiter einen Körper **homogen**, wenn seine Anordnung im Innern um einen bestimmten Punkt A herum genau dieselbe ist, wie um irgend einen andern Punkt B. Dabei ist es wohl möglich, dass nach gewissen Richtungen von dem Punkte A aus die innere Anordnung eine andere ist, als nach andern Richtungen; was aber vom Punkte A gilt, muss auch ganz

ach denselben Richtungen von B gelten. Sind alle Richtungen leichgiltig, ist also die Anordnung nach allen dieselbe, so heisse er Körper **isotrop**. Wir betrachten bloss homogene Körper, sotrope Körper sind natürlich in ganz besonderm Grade homogen.

II.

Gleichgewichts- und Bewegungszustände.

Ein Körper kann in seinen Elementen (Molekularsystemen) im leichgewicht sein, oder diese Elemente können sich gegenseitig ewegen. Besteht Gleichgewicht und ist der Körper ein allseitig egränzter, so kann dasselbe in Folge der Wirkung von Kräften, ie dem Körper selbst fremd sind, hervorgerufen worden sein, in elchem Falle wir sagen werden: es bestehe Gleichgewicht unr dem Einfluss von **äussern** Kräften; oder aber es kann dies Gleichgewicht von selbst, d. h. in Folge der gegenseitigen inwirkung der Elemente bestehen; in diesem Falle sagen wir, s befinde sich der Körper im **natürlichen Gleichgewichte.**

Für den Fall innerer Bewegtheit werden wir sagen, jedes tom habe **Verschiebungen** erlitten, und wollen inskünftige die rojektionen der Verschiebung des Atoms, dessen Gleichgewichtsige (ursprüngliche Lage) durch die rechtwinklichen Koordinaten $, y, z$ bestimmt war, auf die Koordinatenaxen mit ξ, v, ζ bezeichen. Die Grössen ξ, v, ζ werden immer als sehr klein vorausgetzt werden, und zugleich müssen, da die im Körper herrschenen Gleichgewichtszustände immer stabil sein werden, dieselben so ferne periodische Grössen sein, als die Verschiebungen wecheiweise beiderseitig von der Gleichgewichtslage aus Statt finden verden.

In Bezug nun auf die Bewegungszustände müssen wir mehrere 'älle unterscheiden:

1) Da man jedes Molekularsystem als ein ungetrenntes Ganes ansehen kann, also bloss nach der Bewegung des Schwerunkts eines solchen fragt. Bei den Erscheinungen, welche in len elastischen Körpern auftreten, mag diese Annahme gestattet sein.

2) Da man in jedem Molekularsystem das Körperatom als fest, . h. unbewegt betrachtet, und bloss die Bewegung der Aetherülle als Ganzes untersucht, d. h. bloss die Bewegung ihres chwerpunkts. Diese Betrachtung mag für die Lichterscheinungen enügen.

3) Da man endlich auf die relative Bewegung der Aetherhülle, entweder um ihren Schwerpunkt, wenn das Körperatom fest ist, oder um den Schwerpunkt des Molekularsystems, wenn jenes sich bewegt, achtet. Hieraus mögen die Wärmeerscheinungen u. s. w. erklärt werden.

Die Bestimmung der ersten zwei Bewegungen ist verhältnissmässig leicht; wir werden uns im Nachfolgenden auch nur mit ihnen beschäftigen.

III.

Berechnung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte, wenn man jedes Molekularsystem als ein ungetrenntes Ganze ansieht. Gleichgewicht.

Wählen wir von den so eben (§. II.) unterschiedenen Fällen den ersten, da man sich die ganze Masse eines Molekularsystems in seinem Schwerpunkte vereinigt denkt. Da die inneren Kräfte dieses Systems auf die Bewegung desselben keinen Einfluss ausüben können, so wird man von denselben absehen können. Da ferner die einzelnen Molekularsysteme so weit von einander entfernt sind, dass man für die Berechnung der Wirkung, welche jedes auf das andere ausübt, dasselbe als einen einzigen Punkt ansehen kann, so kommt also die uns jetzt beschäftigende Frage darauf hinaus, eine Anzahl von einander getrennter materieller Punkte in ihren gegenseitigen Wirkungen auf einander zu betrachten.

Seien nun x, y, z die rechtwinklichen Koordinaten eines zu betrachtenden materiellen Punktes, dessen Masse M ist; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ die eines andern Punktes von der Masse m; r ihre gegenseitige Entfernung; so ist die Kraft, mit der m auf M wirkt, gleich $Mmf(r)$, wo $f(r)$ mit wachsendem r rasch abnimmt. Die Projektionen dieser Kraft, deren Richtung von M gegen m hin geht, auf die Koordinatenaxen sind:

$$Mmf(r).\frac{\Delta x}{r}, \quad Mmf(r).\frac{\Delta y}{r}, \quad Mmf(r).\frac{\Delta z}{r}.$$

Bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel, welche Mm mit den Axen macht, so hat man auch für diese Seitenkräfte:

$$Mmf(r)\cos\alpha, \quad Mmf(r)\cos\beta, \quad Mmf(r)\cos\gamma.$$

Bezeichnet man durch

$$\Sigma Mmf(r)\cos\alpha, \quad \Sigma Mmf(r)\cos\beta, \quad \Sigma Mmf(r)\cos\gamma$$

die (algebraische) Summe aller der Seitenkräfte, die von allen M umgebenden und auf dasselbe einwirkenden Punkten herrühren, so hat man, wenn X, Y, Z die Seitenkräfte der Gesammteinwirkung auf M bedeuten:

$$X = M\Sigma m f(r)\cos\alpha,\quad Y = M\Sigma m f(r)\cos\beta,\quad Z = M\Sigma m f(r)\cos\gamma, \tag{1}$$

wo wir M ausserhalb des Summenzeichens setzen konnten, da es in allen einzelnen Theilen dasselbe ist. Die so eben aufgestellten Gleichungen, die wir auch schreiben können:

$$X = M\Sigma m\frac{f(r)}{r}\Delta x,\quad Y = M\Sigma m\frac{f(r)}{r}\Delta y,\quad Z = M\Sigma m\frac{f(r)}{r}\Delta z, \tag{1'}$$

gelten offenbar allgemein. Dabei ist, wenn m auf M anziehend wirkt, $f(r)$ positiv, im andern Falle negativ.

Angenommen, der so eben betrachtete Zustand sei der des natürlichen Gleichgewichts (§. II.), in welchem Falle wir künftig immer den Koordinaten u. s. w. den Zeiger 0 anhängen wollen, so ist offenbar:

$$\Sigma m\frac{f(r_0)}{r_0}\Delta x_0 = \Sigma m f(r_0)\cos\alpha_0 = 0,\quad \Sigma m\frac{f(r_0)}{r_0}\Delta y_0 = \Sigma m f(r_0)\cos\beta_0 = 0,$$
$$\Sigma m\frac{f(r_0)}{r_0}\Delta z_0 = \Sigma m f(r_0)\cos\gamma_0 = 0. \tag{2}$$

Ueberhaupt aber ist für irgend einen Gleichgewichtszustand, wenn der betreffende Punkt im Innern des Körpers liegt, und X, Y, Z die Seitenkräfte der auf die Masseneinheit im Punkte (x, y, z) wirkenden äusseren Kräfte sind (Schwere u. s. w.):

$$\Sigma m f(r)\cos\alpha + X = 0,\quad \Sigma m f(r)\cos\beta + Y = 0,\quad \Sigma m f(r)\cos\gamma + Z = 0. \tag{3}$$

Für den Fall, dass der betreffende Punkt an der Oberfläche des Körpers liegt, werden allerdings noch andere Bedingungen eintreten, die wir später untersuchen wollen.

Wir wollen nun aber annehmen, der Körper gehe von dem Zustande des natürlichen Gleichgewichts aus und komme unter dem Einfluss äusserer Kräfte in einen neuen Gleichgewichtszustand.

Seien x_0, y_0, z_0 die anfänglichen Koordinaten von M; $x_0 + \xi$, $y_0 + v$, $z_0 + \zeta$ die spätern; $x_0 + \Delta x_0$, $y_0 + \Delta y_0$, $z_0 + \Delta z_0$ die anfänglichen von m, also $x_0 + \Delta x_0 + \xi + \Delta\xi$, $y_0 + \Delta y_0 + v + \Delta v$, $z_0 + \Delta z_0 + \zeta + \Delta\zeta$ die spätern; r_0 die anfängliche, $r_0 + \varrho$ die spätere Entfernung beider Punkte, deren Massen M und m sind. In dem letzteren Zustande sind also die Seitenkräfte der auf M einwirkenden Kräfte:

$$M\Sigma m\frac{f(r_0+\varrho)}{r_0+\varrho}(\Delta x_0+\Delta\xi),\ M\Sigma m\frac{f(r_0+\varrho)}{r_0+\varrho}(\Delta y_0+\Delta v),$$
$$M\Sigma m\frac{f(r_0+\varrho)}{r_0+\varrho}(\Delta z_0+\Delta\zeta).$$

Ist wieder, wie vorhin, $\Delta x_0=r_0\cos\alpha_0$, $\Delta y_0=r_0\cos\beta_0$, $\Delta z_0=r_0\cos\gamma_0$; sind ebenfalls wieder X, Y, Z die auf die Einheit der Masse bezogenen äusseren Kräfte, so ist für jeden Punkt im Innern:

(4)

$$X+\Sigma m\frac{f(r_0+\varrho)}{r_0+\varrho}(\Delta x_0+\Delta\xi)=0,\quad Y+\Sigma m\frac{f(r_0+\varrho)}{r_0+\varrho}(\Delta y_0+\Delta v)=0,$$
$$Z+\Sigma m\frac{f(r_0+\varrho)}{r_0+\varrho}(\Delta z_0+\Delta\zeta)=0.$$

Die Grösse ϱ ist gegen r_0 immer sehr klein (§. II.), so dass wir die höhern Potenzen derselben werden vernachlässigen dürfen. Unter dieser Bedingung ist also:

$$\frac{f(r_0+\varrho)}{r_0+\varrho}=\frac{f(r_0)}{r_0}+\varrho\frac{\partial}{\partial r_0}\left[\frac{1}{r_0}f(r_0)\right].$$

Demnach erhält man aus (4):

$$\left.\begin{aligned}
&X+\Sigma mf(r_0)\cos\alpha_0+\Sigma m\varrho r_0\cos\alpha_0\frac{\partial}{\partial r_0}\left[\frac{1}{r_0}f(r_0)\right]+\Sigma m\frac{f(r_0)}{r_0}\Delta\xi\\
&\qquad+\Sigma m\varrho\frac{\partial}{\partial r_0}\left[\frac{1}{r_0}f(r_0)\right]\Delta\xi=0,\\
&Y+\Sigma mf(r_0)\cos\beta_0+\Sigma m\varrho r_0\cos\beta_0\frac{\partial}{\partial r_0}\left[\frac{1}{r_0}f(r_0)\right]+\Sigma m\frac{f(r_0)}{r_0}\Delta v\\
&\qquad+\Sigma m\varrho\frac{\partial}{\partial r_0}\left[\frac{1}{r_0}f(r_0)\right]\Delta v=0,\\
&Z+\Sigma mf(r_0)\cos\gamma_0+\Sigma m\varrho r_0\cos\gamma_0\frac{\partial}{\partial r_0}\left[\frac{1}{r_0}f(r_0)\right]+\Sigma m\frac{f(r_0)}{r_0}\Delta\zeta\\
&\qquad+\Sigma m\varrho\frac{\partial}{\partial r_0}\left[\frac{1}{r_0}f(r_0)\right]\Delta\zeta=0.
\end{aligned}\right\}(5)$$

In Folge der Gleichungen (2) werden aus diesen Gleichungen bereits einige Glieder ausfallen. Sodann ist jedenfalls:

$$(r_0+\varrho)^2=(\Delta x_0+\Delta\xi)^2+(\Delta y_0+\Delta v)^2+(\Delta z_0+\Delta\zeta)^2,\ r_0{}^2=\Delta x_0{}^2+\Delta y_0{}^2+\Delta z_0{}^2;$$

also

$$2r_0\varrho+\varrho^2=2r_0[\cos\alpha_0\Delta\xi+\cos\beta_0\Delta v+\cos\gamma_0\Delta\zeta]+\Delta\xi^2+\Delta v^2+\Delta\zeta^2.$$

Im Allgemeinen werden $\Delta\xi$, Δv, $\Delta\zeta$ der Art sein, dass man ihre zweiten Dimensionen gegen die ersten vernachlässigen kann, so dass dann bloss

$$\varrho = \Delta\xi \cos\alpha_0 + \Delta v \cos\beta_0 + \Delta\zeta \cos\gamma_0$$

ist. Die Grössen $\varrho\Delta\xi$, $\varrho\Delta v$, $\varrho\Delta\zeta$ sind unter dieser Voraussetzung ebenfalls zu vernachlässigen, und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{f(r)}{r} = \mathfrak{F}(r), \quad r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}f(r)\right] = F(r);$$

so erhält man aus (5):

$$\left.\begin{aligned}
&X + \Sigma m[\mathfrak{F}(r_0) + F(r_0)\cos^2\alpha_0]\Delta\xi + \Sigma m F(r_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0\Delta v \\
&\qquad + \Sigma m F(r_0)\cos\alpha_0\cos\gamma_0\Delta\zeta = 0, \\
&Y + \Sigma m F(r_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0\Delta\xi + \Sigma m[\mathfrak{F}(r_0) + F(r_0)\cos^2\beta_0]\Delta v \\
&\qquad + \Sigma m F(r_0)\cos\beta_0\cos\gamma_0\Delta\zeta = 0, \\
&Z + \Sigma m F(r_0)\cos\alpha_0\cos\gamma_0\Delta\xi + \Sigma m F(r_0)\cos\beta_0\cos\gamma_0\Delta v \\
&\qquad + \Sigma m[\mathfrak{F}(r_0) + F(r_0)\cos^2\gamma_0]\Delta\zeta = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (5')$$

Nun ist aber, wie leicht ersichtlich:

$$\begin{aligned}
\Delta\xi = &\frac{\partial\xi}{\partial x_0} r_0\cos\alpha_0 + \frac{\partial\xi}{\partial y_0} r_0\cos\beta_0 + \frac{\partial\xi}{\partial z_0} r_0\cos\gamma_0 + \frac{r_0^2}{1.2}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial x_0^2}\cos^2\alpha_0\right. \\
&+ 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x_0\partial y_0}\cos\alpha_0\cos\beta_0 + \frac{\partial^2\xi}{\partial y_0^2}\cos^2\beta_0 + 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x_0\partial z_0}\cos\alpha_0\cos\gamma_0 \\
&\left.+ 2\frac{\partial^2\xi}{\partial y_0\partial z_0}\cos\beta_0\cos\gamma_0 + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z_0^2}\cos^2\gamma_0\right] + \frac{r_0^3}{6}P + \frac{r_0^4}{24}Q,
\end{aligned}$$

wenn man mit P und Q die Aggretate aller Glieder der dritten und vierten Ordnung bezeichnet und mit r_0^4 schliesst, was man gewiss bei der Kleinheit von r_0 darf. Setzt man v, ζ für ξ, so erhält man die Ausdrücke von Δv, $\Delta\zeta$.

Da wir bloss von homogenen Körpern handeln, so wollen wir sogleich annehmen, es sei die innere Anordnung der Elemente so, dass jedem Punkte drei auf einander senkrechte Elastizitätsaxen entsprechen, in Bezug auf welche, bei natürlichem Gleichgewicht, die Körperelemente symmetrisch angeordnet sind. Wählen wir die Richtung dieser Axen, die immer dieselbe ist, für die Richtung der Koordinatenaxen, so entsprechen jedem Punkte, dem α_0, β_0, γ_0 zugehören, drei andere, denen bezüglich die Winkel $180^0-\alpha_0$, β_0, γ_0; α_0, $180^0-\beta_0$, γ_0; α_0, β_0, $180^0-\gamma_0$ zugehören. Daraus ergiebt sich nun unmittelbar, dass die in (5′) zu nehmenden Summen verschwinden werden, in so ferne einer der Cosinus in ungerader Potenz vorkommt. Die Glieder erster und dritter Ordnung fallen somit alle weg, und es bleibt nur ein Theil, der der zweiten und vierten Ordnung, stehen. Lässt man das später Wegfallende sogleich fort, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\Delta\xi = {} & \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} r_0^2 \cos^2\alpha_0 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} r_0^2 \cos^2\beta_0 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} r_0^2 \cos^2\gamma_0 \\
& + \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} r_0^2 \cos\alpha_0 \cos\beta_0 + \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z} r_0^2 \cos\alpha_0 \cos\gamma_0 + \frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial z} r_0^2 \cos\beta_0 \cos\gamma_0 \\
& + \tfrac{1}{24}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} r_0^4 \cos^4\alpha_0 + \tfrac{1}{24}\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4} r_0^4 \cos^4\beta_0 + \tfrac{1}{24}\frac{\partial^4\xi}{\partial z^4} r_0^4 \cos^4\gamma_0 \\
& + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^3\partial y} r_0^4 \cos^3\alpha_0 \cos\beta_0 + \tfrac{1}{4}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial y^2} r_0^4 \cos^2\alpha_0 \cos^2\beta_0 \\
& + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial y^3} r_0^4 \cos\alpha_0 \cos^3\beta_0 + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^3\partial z} r_0^4 \cos^3\alpha_0 \cos\gamma_0 \\
& + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial y\partial z} r_0^4 \cos^2\alpha_0 \cos\beta_0 \cos\gamma_0 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial y^2\partial z} r_0^4 \cos\alpha_0 \cos^2\beta_0 \cos\gamma_0 \\
& + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^4\xi}{\partial y^3\partial z} r_0^4 \cos^3\beta_0 \cos\gamma_0 + \tfrac{1}{4}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial z^2} r_0^4 \cos^2\alpha_0 \cos^2\gamma_0 \\
& + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial y\partial z^2} r_0^4 \cos\alpha_0 \cos\beta_0 \cos^2\gamma_0 + \tfrac{1}{4}\frac{\partial^4\xi}{\partial y^2\partial z^2} r_0^4 \cos^2\beta_0 \cos^2\gamma_0 \\
& + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial z^3} r_0^4 \cos\alpha_0 \cos^3\gamma_0 + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^4\xi}{\partial y\partial z^3} r_0^4 \cos\beta_0 \cos^3\gamma_0 .
\end{aligned}
$$

Setzt man also:

$$
\left.
\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^2\cos^2\alpha_0 = G_0, \quad \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^2\cos^2\beta_0 = H_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^2\cos^2\gamma_0 = J_0, \\
& \tfrac{1}{2}\Sigma mF(r_0)r_0^2\cos^4\alpha_0 = L_0, \quad \tfrac{1}{2}\Sigma mF(r_0)r_0^2\cos^4\beta_0 = M_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma mF(r_0)r_0^2\cos^4\gamma_0 = N_0, \\
& \tfrac{1}{2}\Sigma mF(r_0)r_0^2\cos^2\beta_0\cos^2\gamma_0 = P_0, \quad \tfrac{1}{2}\Sigma mF(r_0)r_0^2\cos^2\alpha_0\cos^2\gamma_0 = Q_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma mF(r_0)r_0^2\cos^2\alpha_0\cos^2\beta_0 = R_0, \\
& \tfrac{1}{24}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^4\cos^4\alpha_0 = \mathfrak{A}_0, \quad \tfrac{1}{24}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^4\cos^4\beta_0 = \mathfrak{B}_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{24}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^4\cos^4\gamma_0 = \mathfrak{C}_0, \\
& \tfrac{1}{4}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^4\cos^2\beta_0\cos^2\gamma_0 = \mathfrak{D}_0, \quad \tfrac{1}{4}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^4\cos^2\alpha_0\cos^2\gamma_0 = \mathfrak{E}_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{4}\Sigma m\mathfrak{F}(r_0)r_0^4\cos^2\alpha_0\cos^2\beta_0 = \mathfrak{F}_0, \\
& \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^6\alpha_0 = \mathfrak{G}_0, \quad \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^6\beta_0 = \mathfrak{H}_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^6\gamma_0 = \mathfrak{I}_0, \\
& \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^2\beta_0\cos^4\gamma_0 = \mathfrak{K}_0, \quad \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^2\alpha_0\cos^4\gamma_0 = \mathfrak{L}_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^2\alpha_0\cos^4\gamma_0 = \mathfrak{M}_0, \\
& \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^4\beta_0\cos^2\gamma_0 = \mathfrak{N}_0, \quad \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^4\alpha_0\cos^2\gamma_0 = \mathfrak{O}_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{24}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^4\alpha_0\cos^2\beta_0 = \mathfrak{P}_0, \\
& \qquad \tfrac{1}{4}\Sigma mF(r_0)r_0^4\cos^2\alpha_0\cos^2\beta_0\cos^2\gamma_0 = \mathfrak{Q}_0;
\end{aligned}
\right\} \quad (6)
$$

erhält man bei gehöriger Anordnung für das neue Gleichgewicht:

$$\left.\begin{array}{l}
+L)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+(H+R)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+(J+Q)\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2Q\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}\\
\quad+(\mathfrak{A}+\mathfrak{G})\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{M})\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4}+(\mathfrak{C}+\mathfrak{L})\frac{\partial^4\xi}{\partial z^4}\\
\quad+(\mathfrak{F}+6\mathfrak{P})\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial y^2}+(\mathfrak{E}+6\mathfrak{O})\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial z^2}+(\mathfrak{D}+\mathfrak{Q})\frac{\partial^4\xi}{\partial y^2\partial z^2}\\
\quad+4\mathfrak{P}\frac{\partial^4 v}{\partial x^3\partial y}+4\mathfrak{M}\frac{\partial^4 v}{\partial x\partial y^3}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4 v}{\partial x\partial y\partial z^2}+4\mathfrak{O}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^3\partial z}\\
\quad+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x\partial y^2\partial z}+4\mathfrak{L}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x\partial z^3}+X=0,\\
+R)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(H+M)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(J+P)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+2P\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z}\\
\quad+(\mathfrak{A}+\mathfrak{P})\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{G})\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}+(\mathfrak{C}+\mathfrak{K})\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}\\
\quad+(\mathfrak{F}+6\mathfrak{M})\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}+(\mathfrak{E}+\mathfrak{Q})\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial z^2}+(\mathfrak{D}+6\mathfrak{M})\frac{\partial^4 v}{\partial y^2\partial z^2}\\
\quad+4\mathfrak{P}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^3\partial y}+4\mathfrak{M}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial y^3}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x\partial y\partial z^2}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y\partial z}\\
\quad+4\mathfrak{N}\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^3\partial z}+4\mathfrak{K}\frac{\partial^4\zeta}{\partial y\partial z^3}+Y=0,\\
+Q)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+(H+P)\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+(J+N)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+2Q\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z}+2P\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\\
\quad+(\mathfrak{A}+\mathfrak{O})\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{N})\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}+(\mathfrak{C}+\mathfrak{J})\frac{\partial^4\zeta}{\partial z^4}\\
\quad+(\mathfrak{F}+\mathfrak{Q})\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+(\mathfrak{E}+6\mathfrak{L})\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial z^2}+(\mathfrak{D}+6\mathfrak{K})\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^2\partial z^2}\\
\quad+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial y^2\partial z}+4\mathfrak{O}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^3\partial z}+4\mathfrak{L}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial z^3}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y\partial z}\\
\quad+4\mathfrak{N}\frac{\partial^4 v}{\partial y^3\partial z}+4\mathfrak{K}\frac{\partial^4 v}{\partial y\partial z^3}+Z=0;
\end{array}\right\}\quad(7)$$

elchen Gleichungen, der Bequemlichkeit wegen, der Zeiger 0
, y, z und den Koeffizienten $G,\ldots.R$, $\mathfrak{A},\ldots.\mathfrak{Q}$ weggelassen
e.

Wäre der anfängliche Zustand nicht der des natürlichen Gleich-

gewichts, sondern der eines unter dem Einflusse äusserer Kräfte (§. II.) entstandenen Gleichgewichts, und es bestände für dieses Gleichgewicht immer noch die im Obigen angenommene Symmetrie der Anordnung, so würden die Gleichungen (7) für den neuen Gleichgewichtszustand gelten, wenn X, Y, Z die Seitenkräfte nur derjenigen Kräfte bezeichnen, welche neu hinzugekommen sind, und man r, x, y, z auf den ersten Zustand bezöge. Wäre der zweite Zustand entstanden in Folge von Einwirkungen äusserer Kräfte bloss auf die Oberfläche, so hätte man in (7) die Grössen X, Y, Z wegzulassen.

Begnügt man sich mit einer Näherung, die mit r^3 schliesst, so nehmen die Gleichungen (7) folgende weit einfachere Form an:

(7′)

$$(G+L)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+(H+R)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+(J+Q)\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2Q\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}+X=0,$$

$$(G+R)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(H+M)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(J+P)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+2P\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z}+Y=0,$$

$$(G+Q)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+(H+P)\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+(J+N)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+2Q\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z}+2P\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+Z=0;$$

immer natürlich unter den obigen Voraussetzungen.

IV.

Besondere Charakterisirung des natürlichen Gleichgewichtszustandes.

Seien M, m wieder die Massen zweier Moleküle, deren Entfernung r_0 im natürlichen Gleichgewichtszustande ist, so dass ihre gegenseitige Einwirkung durch $Mmf(r_0)$ angedeutet werde. Ist nun, wie angenommen, der ganze Körper im natürlichen Gleichgewichte, so wird eine (unendlich kleine) Ausdehnung, parallel der Axe der x möglich sein. Nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten muss sodann die Gesammtarbeit dieser Ausdehnung Null sein. Waren x_0, $x_0+\Delta x_0$ die (nach x gerechneten) Abscissen von M und m, so werden sie nunmehr $x_0+\varepsilon x_0$, $x_0+\Delta x_0+\varepsilon x_0+\varepsilon\Delta x_0$ sein, wenn ε konstant, aber unendlich klein ist. Ist $r_0+\varrho$ die neue Entfernung Mm, so ist:

$$r_0^2=\Delta x_0^2+\Delta y_0^2+\Delta z_0^2,\quad (r_0+\varrho)^2=(\Delta x_0+\varepsilon\Delta x_0)^2+\Delta y_0^2+\Delta z_0^2,$$

$$\varrho=\frac{\varepsilon\Delta x_0^2}{r_0},$$

da ϱ und ε sehr klein sind. Wir wollen nun im Allgemeinen die Frage stellen, welches die Arbeit zweier Atome ist, die ihren Ort ändern, anfänglich in der Entfernung r_0, endlich in der Entfernung r_1 sich befinden. Sei r eine Zwischenlage, so ist $Mmf(r)$ die wirksame Kraft, die nach der Richtung der verbindenden Geraden geht, mithin $Mmf(r)\partial r$ das Element der Arbeit, die Gesammtarbeit also $\int_{r_0}^{r_1} Mmf(r)\partial r$. Zunächst ist aber hier $r_1 - r_0 = \varrho$, und ϱ selbst unendlich klein; mithin ist, innerhalb der Gränzen der Integration, $f(r)$ als konstant $=f(r_0)$ anzusehen, und die Arbeit ist

$$Mmf(r_0)\varrho = Mmf(r_0) \cdot \frac{\varepsilon \Delta x_0^2}{r_0} = Mm\varepsilon f(r_0) r_0^2 \cos^2\alpha_0.$$

Dehnt man dies auf alle Atome aus, und nimmt von der Summe die Hälfte, da hiebei jedes Atom zweimal gezählt wird, so hat man die Gesammtarbeit. Da diese Null sein muss, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\Sigma Mmf(r_0) r_0 \cos^2\alpha_0 = 0, \quad \Sigma\Sigma Mmf(r_0) r_0 \cos^2\beta_0 = 0, \\ \qquad \Sigma\Sigma Mmf(r_0) r_0 \cos^2\gamma_0 = 0; \\ \text{woraus durch Addition} \\ \qquad \Sigma\Sigma Mmf(r_0) \cdot r_0 = 0, \end{array}\right\} \quad (8)$$

(wo die zwei folgenden Gleichungen in derselben Weise erhalten werden wie die erste.)

Ist aber der Körper **homogen** und nicht unter der Einwirkung irgend welcher äusserer Kräfte, so wird, wenn in (8) zuerst die Summation für ein Molekül vollzogen wird, d. h. wenn man die Grössen $\Sigma mf(r_0) r_0 \cos^2\alpha_0, \ldots$ bildet, jede dieser Summen in der Doppelsumme so oft erscheinen, als Atome vorhanden sind. Daraus folgt für **homogene Körper**:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma mf(r_0) r_0 \cos^2\alpha_0 = 0, \quad \Sigma mf(r_0) r_0 \cos^2\beta_0 = 0, \\ \Sigma mf(r_0) r_0 \cos^2\gamma_0 = 0, \quad \Sigma mf(r_0) r_0 = 0, \end{array}\right\} \quad (8')$$

wo das Summenzeichen dieselbe Bedeutung wie in §. III. hat.

Daraus ergiebt sich endlich, dass in den Gleichungen (7) und (7') nothwendig:

$$G_0 = 0, \quad H_0 = 0, \quad J_0 = 0 \qquad (9)$$

ist. (Das Wesen dieses Beweises rührt von Professor **Redtenbacher** her. Der Satz (8') selbst gehört **Poisson** zu.)

V.

Charakterisirung irgend welchen Gleichgewichtszustandes.

Wie im Vorstehenden wollen wir annehmen, die im Gleichgewicht befindlichen Moleküle erleiden Verschiebungen, deren Projektionen auf die Koordinatenaxen seien für M:

$$a+hx+fy+gz,\quad a'+h'x+f'y+g'z,\quad a''+h''x+f''y+g''z;$$

für m also:

$$a+h(x+\Delta x)+f(y+\Delta y)+g(z+\Delta z),\ a'+h'(x+\Delta x)+f'(y+\Delta y)+g'(z+\Delta z),$$
$$a''+h''(x+\Delta x)+f''(y+\Delta y)+g''(z+\Delta z),$$

wo $a, a', \dots g''$ unendlich klein sind. Ist r die anfängliche Entfernung von M und m, $r+\varrho$ die schliessliche, so ist, wie leicht zu finden:

$$\varrho=\frac{1}{r}\left[h\Delta x^2+f\Delta x\Delta y+g\Delta x\Delta z+h'\Delta x\Delta y+f'\Delta y^2+g'\Delta y\Delta z+h''\Delta x\Delta z\right.$$
$$\left.+f''\Delta y\Delta z+g''\Delta z^2\right].$$

Die durch die Verschiebung verursachte Arbeit ist abermals $Mmf(r)\varrho$, d. h., wenn man wieder $\Delta x=r\cos\alpha$ u. s. w. setzt:

$$Mmf(r)r\left[h\cos^2\alpha+f\cos\alpha\cos\beta+g\cos\alpha\cos\gamma+h'\cos\alpha\cos\gamma\right.$$
$$\left.+f'\cos^2\beta+g'\cos\beta\cos\gamma+h''\cos\alpha\cos\gamma+f''\cos\beta\cos\gamma+g''\cos^2\gamma\right].$$

Summirt man dies für den Punkt M, so ergiebt sich dafür, unter den in §. III. gemachten Annahmen der Symmetrie der Anordnung, auch im Falle des jetzigen Gleichgewichts:

$$2M[hG+f'H+g''J],$$

also auf den ganzen Körper ausgedehnt und halbirt:

$$h\Sigma MG+f'\Sigma MH+g''\Sigma MJ.$$

Liesse man die in §. III. angenommene Symmetrie nicht gelten, so hätte man statt dieser Grösse:

$$\frac{h}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos^2\alpha+\frac{f}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos\alpha\cos\beta+\dots+\frac{g''}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos^2\gamma. \tag{10}$$

Seien X, Y, Z die Seitenkräfte der in (xyz) (d. h. in M) auf die

Einheit der Masse wirkenden Kräfte, so ist die Arbeit der Resultirenden (auf M):

$$MX(a+hx+fy+gz)+MY(a'+h'x+f'y+g'z)$$
$$+MZ(a''+h''x+f''y+g''z).$$

Dehnt man dies auf den ganzen Körper aus, und begreift also auch die etwa auf die Oberfläche einwirkenden Kräfte mit ein, so ist die Arbeit:

$$a\Sigma MX+h\Sigma MXx+\ldots.+g''\Sigma MZz. \quad (11)$$

Man muss nun, nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten, die Summe von (10) und (11) Null setzen. Daraus folgen aber offenbar nachstehende Gleichungen:

$$\Sigma MX=0,\quad \Sigma MY=0,\quad \Sigma MZ=0,$$
$$\Sigma MXx+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos^2\alpha=0,\quad \Sigma MYy+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos^2\beta=0,$$
$$\Sigma MZz+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos^2\gamma=0,$$
$$Xy+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos\alpha\cos\beta=0,\quad \Sigma MYx+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos\alpha\cos\beta=0,$$
$$\Sigma MXz+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos\alpha\cos\gamma=0,$$
$$Yz+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos\beta\cos\gamma=0,\quad \Sigma MZx+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos\alpha\cos\gamma=0,$$
$$\Sigma MZy+\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma Mmrf(r)\cos\beta\cos\gamma=0.$$

Aus diesen Gleichungen zieht man leicht:

$$\Sigma MX=0,\quad \Sigma MY=0,\quad \Sigma MZ=0,$$
$$\Sigma MXy-\Sigma MYx=0,\quad \Sigma MXz-\Sigma MZx=0,\quad \Sigma MYz-\Sigma MZy=0,$$

welche sechs Gleichungen diejenigen sind, die die gewöhnliche Statik aufstellt. Sie zeigen, dass die äussern Kräfte für sich im Gleichgewichte sein müssen, gleichgiltig, ob die innern Kräfte beachtet werden oder nicht, so dass die gewöhnliche Statik in ihrem Rechte bleibt, wenn auch die innern Kräfte vorhanden sind.

Es ist leicht zu sehen, dass die Gleichungen (8') aus obigen Gleichungen, unter den Voraussetzungen des §. IV., wieder hervorgehen. Man hat übrigens für homogene Körper im Allgemeinen, wenn sie im Zustande des natürlichen Gleichgewichts sind:

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma mr_0f(r_0)\cos^2\alpha_0=0,\ \Sigma mr_0f(r_0)\cos^2\beta_0=0,\ \Sigma mr_0f(r_0)\cos^2\gamma_0=0,\\ \Sigma mr_0f(r_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0=0,\ \Sigma mr_0f(r_0)\cos\alpha_0\cos\gamma_0=0,\\ \Sigma mr_0f(r_0)\cos\beta_0\cos\gamma_0=0.\end{array}\right\} \quad (12)$$

VI.

Bestimmung des Ausdehnungs-Koefficienten.

Wir denken uns in einem Zustande (der z. B. Gleichgewic[ht] sein mag) ein unendlich kleines rechtwinkliches Parallelepipe[d,] dessen an einander stossende Kanten ∂x, ∂y, ∂z seien, so dass d[er] betreffende Eckpunkt durch den Punkt (x, y, z) gehe. Allerding[s] sprechen wir damit aus, der Körper sei als eine stetig zusammenhängende Masse (Kontinuum) anzusehen, da sonst nur Molekularsysteme angenommen wurden und nicht unendlich klein[e] Parallelepipede. Allein die Vorstellung einer Ausdehnung oder Verdichtung hängt mit der Vorstellung eines Kontinuums so enge zusammen, dass die eine ohne die andere keine rechte Klarheit hat. Uebrigens mag man sich den Körper wie immer aus seinen Elementarbestandtheilen zusammengesetzt denken, immerhin wird man die nachfolgenden Erörterungen auf ihn anwendbar finden, wenn man sich seinen Raum durch eine stetig vertheilte Masse erfüllt denkt, die an den Punkten, wo die Atome sich befinden, sich verhält wie der Körper selbst.

Es erleide nun (Taf. VI. Fig. 2.) der Punkt $M(x, y, z)$ die sehr kleine Verschiebung, deren Projektionen ξ, v, ζ sind. Man wird nun als Projektionen der Verschiebungen erhalten:

von M: ξ, v, ζ;

„ M': $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}\partial x,\quad v+\frac{\partial v}{\partial x}\partial x,\quad \zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\partial x;$

„ P: $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial y}\partial y,\quad v+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y,\quad \zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\partial y;$

„ N: $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial z}\partial z,\quad v+\frac{\partial v}{\partial z}\partial z,\quad \zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\partial z;$

„ P'': $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}\partial x+\frac{\partial\xi}{\partial y}\partial y,\quad v+\frac{\partial v}{\partial x}\partial x+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y,\quad \zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\partial x+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\partial y;$

„ N': $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}\partial x+\frac{\partial\xi}{\partial z}\partial z,\quad v+\frac{\partial v}{\partial x}\partial x+\frac{\partial v}{\partial z}\partial z,\quad \zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\partial x+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\partial z;$

„ P': $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial y}\partial y+\frac{\partial\xi}{\partial z}\partial z,\quad v+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y+\frac{\partial v}{\partial z}\partial z,\quad \zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\partial y+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\partial z;$

„ N'': $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}\partial x+\frac{\partial\xi}{\partial y}\partial y+\frac{\partial\xi}{\partial z}\partial z,\quad v+\frac{\partial v}{\partial x}\partial x+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y+\frac{\partial v}{\partial z}\partial z,$

$$\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\partial x+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\partial y+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\partial z.$$

Bereits in §. III. ist angegeben worden, dass $\Delta\xi$, Δv, $\Delta\zeta$ der rt sind, dass man ihre höhern Dimensionen vernachlässigen kann. Daraus folgt, dass man die höhern Dimensionen von $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}$, u. s. w., gegenüber den ersten, ebenfalls wird vernachlässigen dürfen. Daraus folgt weiter, dass die neue Linie

$$MM' = \sqrt{[\partial x + \frac{\partial\xi}{\partial x}\partial x]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\partial x\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\partial x\right)^2} = \partial x + \frac{\partial\xi}{\partial x}\partial x$$

ist. Eben so hat man für die neue Linie:

$$MM' = \partial x(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}),\quad MP = \partial y(1 + \frac{\partial v}{\partial y}),\quad MN = \partial z(1 + \frac{\partial\zeta}{\partial z}),$$

$$M'P'' = \partial y(1 + \frac{\partial v}{\partial y}),\quad PP'' = \partial x(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}),$$

$$NN' = \partial x(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}),\quad N'N'' = \partial y(1 + \frac{\partial v}{\partial y}),\quad P'N'' = \partial x(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}),$$

$$NP' = \partial y(1 + \frac{\partial v}{\partial y}),\quad PP' = \partial z(1 + \frac{\partial\zeta}{\partial z}),$$

$$M'N' = \partial z(1 + \frac{\partial\zeta}{\partial z}),\quad P''N'' = \partial z(1 + \frac{\partial\zeta}{\partial z}).$$

Demnach ist im neuen Zustande:

$$MM' = PP'' = NN' = P'N'',\quad MP = M'P'' = NP' = N'N'',$$
$$MN = PP' = M'N' = P''N'',$$

d. h. der Elementarkörper ist im neuen Zustande noch immer ein Parallelepiped.

Die neue Seite MM' macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus sind:

$$\frac{\partial x}{MM'}(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}),\quad \frac{\partial x}{MM'}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial x}{MM'}\frac{\partial\zeta}{\partial x};$$

eben so für die neue Linie MP:

$$\frac{\partial y}{MP}\frac{\partial\xi}{\partial y},\quad \frac{\partial y}{MP}(1 + \frac{\partial v}{\partial y}),\quad \frac{\partial y}{MP}\frac{\partial\zeta}{\partial y}.$$

Demnach ist der Cosinus des Winkels beider Linien:

$$\frac{\partial x \partial y}{MM'.MP}\left[\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right]=\frac{\partial x \partial y}{MM'.MP}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}}{\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}=\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

wenn man obige Vernachlässigungen zulässt. Aber $\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$ ist verschwindend klein, dieser Cosinus ist also Null, d. h. die Linien stehen auf einander senkrecht. Man schliesst hieraus, dass das neue Parallelepiped noch rechtwinklich ist. Sein Inhalt ist:

$$\left(\partial x+\frac{\partial \xi}{\partial x}\partial x\right)\left(\partial y+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y\right)\left(\partial z+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\partial z\right)=\partial x \partial y \partial z\left[1+\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right].$$

Daraus folgt endlich, dass man für den Ausdehnungs-Koeffizienten Θ hat:

$$\Theta=\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}. \qquad (13)$$

Fällt Θ positiv aus, so hat man Ausdehnung; fällt es negativ aus, Verdichtung.

VII.

Bestimmung der auf ein Element Statt findenden Pressungen.

Denken wir uns eine durch ein Molekül M gehende, auf der Axe der x senkrecht stehende Ebene, in der wir uns ein sehr kleines, M enthaltendes Flächenelement σ denken wollen. Seien x, y, z die Koordinaten von M; seien weiter $m, m', m'', \ldots$ eine Reihe von Molekülen, die sämmtlich auf derjenigen Seite der Ebene liegen, die nach den positiven x gewendet ist (also ausserhalb der Ebene); $m_1, m_2, \ldots$ seien Moleküle, die auf der entgegengesetzten Seite der fraglichen Ebene liegen. Auf das Element σ errichten wir einen senkrechten Zylinder, dessen Höhe h grösser sei, als der Halbmesser der Wirkungssphäre des Moleküls M (d. h. als diejenige Entfernung, bis auf welche hin die Wirkung noch merklich ist). Diese Höhe sei gegen die negativen x hin gerichtet; das Volumen des Zylinders ist σh.

Die Gesammtwirkung nun aller Moleküle $m, m', \ldots$ auf alle in dem Zylinder enthaltenen Moleküle macht die auf σ wirkende

Pressung aus. Dieselbe wird übrigens nur dann **Pressung** genannt werden, wenn sie nach der Seite der negativen x hin gerichtet ist, **Zug** im entgegengesetzten Falle. Wäre sie nach der Richtung von σ selbst gerichtet, so würde sie bloss ein Gleiten des Elements verursachen wollen.

Diese Gesammtwirkung nun, bezogen auf die Einheit der Fläche, sei P; ihre Seitenkräfte nach den drei Axen: A, B, C, so dass $P\sigma$, $A\sigma$, $B\sigma$, $C\sigma$ die betreffenden Grössen für σ sind. Wir müssen uns dabei freilich denken, die Moleküle, welche die Ebene einschliesst, seien durch starre, unveränderliche Gerade verbunden mit denen, die auf ihren beiden Seiten liegen. Man übersieht hieraus schon wieder, dass man ein anschaulicheres Bild erhielte, wenn man den Körperraum als stetig erfüllt ansehen würde.

In so ferne σ sehr klein ist, wird man wohl annehmen können, um M herum hätten alle Moleküle gleiche Masse und seien gleichmässig vertheilt. Bei der von uns vorausgesetzten Homogeneität wird diese Annahme, in so weit sie im Nachstehenden benützt ist, nichts Unpassendes enthalten. Bei Körpern von drei senkrechten Elastizitätsaxen (§. III.) wird man die Axen der Koordinaten parallel denselben wählen und somit der eben ausgesprochenen Bedingung genügen.

Stelle nun (Taf. VI. Fig. 3.) I die durch M gehende Ebene dar; II, III seien mit ihr parallel und stehen gleich weit von ihr ab. Sei m ein Molekül in II, $Mm=r$, α der Winkel, den Mm mit der Axe der x macht, $r\cos\alpha=\delta$, so ist δ die Entfernung der Ebenen I und II, mithin konstant für alle in II liegenden Moleküle. Ist nun weiter m' ein Molekül, das zwischen I und II liegt, so wird man in dem zwischen I und III liegenden Stücke des oben genannten Zylinders ein Molekül M' auffinden können, so gelegen, dass $M'm'\cos\alpha'=\delta$, wenn α' der Winkel ist, den $M'm'$ mit der Abszissenaxe macht. (Es giebt deren viele, sämmtlich gelegen in einer durch M' gehenden, mit I parallelen Ebene.) Sei nun n die Anzahl der Moleküle, die in dem zwischen I und III liegenden Zylindertheile enthalten sind, so wird man für jedes derselben eine zwischen I und II liegende Ebene erhalten können, die parallel I ist und von ihm in der Entfernung δ liegt. Die Gesammtwirkung aller in dieser Ebene liegenden Moleküle auf das betrachtete ist offenbar gleich der Gesammtwirkung aller in II liegenden auf M.

Diesen Satz wollen wir nun zur Berechnung der Grössen $A\sigma$ u. s. w. anwenden. Zu diesem Behufe denken wir uns, wenn ϱ den Halbmesser der Wirkungssphäre bedeutet, von I aus nach

rechts und links hin parallele Ebenen, die in unendlich kleiner Entfernung ε von einander liegen. Die Anzahl derselben sei, links und rechts, je gleich s; die links liegenden sollen mit III_1, III_2,... ..., III_s; die rechts mit II_1, II_2,...., II_s bezeichnet werden; zugleich ist $s\varepsilon = \varrho$. Die Ebenen III theilen den Zylinder in unendlich viele Stücke und man kann offenbar annehmen, dass die innerhalb jedes dieser Stückchen liegenden Moleküle in der betreffenden Begränzungsebene liegen. Bezeichnen wir mit r_0 die Entfernung irgend eines in der Ebene I liegenden Moleküls von M, mit α_0 den Winkel, den r_0 mit der Axe der x macht; mit r_1 die Entfernung irgend eines in der Ebene II_1 liegenden Moleküls von M, und mit α_1 den Winkel, den r_1 mit der Axe der x macht u. s. w., so wird man, da die Anordnung der Moleküle rechts von I mit der links von I übereinstimmt, leicht übersehen, dass

$$MS.mf(r_0)\cos\alpha_0 + MS.mf(r_1)\cos\alpha_1 + ... + MS.mf(r_s)\cos\alpha_s$$

die Wirkung sämmtlicher Moleküle rechts von I auf M, zerlegt nach der Axe der x, angiebt, wenn das Zeichen S sich jeweils auf die in einer Ebene befindlichen Moleküle bezieht. Seien nun n_0, n_1, n_2,...., n_s die Anzahl der innerhalb des Zylinders zwischen I und bezüglich I, III_1, III_2,...., III_s liegenden Moleküle, so liegen davon in den Ebenen I, III_1, III_2, ..., III_s jeweils n_0, $n_1 - n_0$, $n_2 - n_1$,...., $n_s - n_{s-1}$. Jedes der n_0 Moleküle in I erleidet dieselbe Wirkung, wie M; die Gesammtwirkung aller rechts von I liegenden Moleküle auf alle in I liegenden Moleküle des Zylinders ist mithin (zerlegt nach der Axe der x):

$$n_0 M[S.mf(r_0)\cos\alpha_0 + S.mf(r_1)\cos\alpha_1 + S.mf(r_2)\cos\alpha_2 + ... + S.mf(r_s)\cos\alpha_s].$$

Betrachten wir nun die in III_1 liegenden Moleküle, so werden sie von den in II_s liegenden keinerlei Wirkung erleiden, wohl aber von den in I, II_1, II_2,...., II_{s-1}. Nach dem eben Auseinandergesetzten wird die Gesammtwirkung auf eines derselben dieselbe sein, als wenn es in M läge und auf dasselbe die in II_1, II_2,..., II_s liegenden Moleküle bloss ihre Wirkung ausübten. Somit ist die Gesammtwirkung auf alle (zerlegt nach der Axe der x):

$$M(n_1 - n_0)[S.mf(r_1)\cos\alpha_1 + S.mf(r_2)\cos\alpha_2 + ... + Smf(r_s)\cos\alpha_s].$$

Ganz eben so ist diese Grösse für die in II_2 liegenden:

$$M(n_2 - n_1)\,[S.mf(r_2)\cos\alpha_2 + S.mf(r_3)\cos\alpha_3 + ... + S.mf(r_s)\cos\alpha_s]$$

u. s. w.

Die Addition aller dieser Grössen giebt offenbar die Grösse $A\sigma$, die man sucht, und man hat:

$$A\sigma = M[n_0 S.mf(r_0)\cos\alpha_0 + n_1 S.mf(r_1)\cos\alpha_1 + n_2 S.mf(r_2)\cos\alpha_2 + \dots \\ \dots + n_s S.mf(r_s)\cos\alpha_s].$$

Diese Grösse kann man offenbar auch durch:

$$M\Sigma\Sigma nmf(r)\cos\alpha$$

bezeichnen, wo die Summenzeichen sich auf n und r (wie m) beziehen und man dadurch andeutet, dass alle r für alle rechts von I liegenden Moleküle zu nehmen sind, wobei jeweils α der Winkel von r mit der Axe der x bedeutet und m die Masse des betreffenden Moleküls ist; dabei ist unter n jeweils die Anzahl Moleküle verstanden, die sich zwischen I und der durch das betreffende Molekül mit I parallel gelegten Ebene befinden, wenn man diese Ebene links von I in gleicher Entfernung wie vorhin legt und nur die Moleküle innerhalb des Zylinders beachtet. Sind β, γ die Winkel von r mit den Axen der y, z, so hat man offenbar:

$$\left.\begin{array}{c} A\sigma = M\Sigma\Sigma mnf(r)\cos\alpha, \quad B\sigma = M\Sigma\Sigma mnf(r)\cos\beta, \\ C\sigma = M\Sigma\Sigma mnf(r)\cos\gamma. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Was nun n anbelangt, so kann diese Grösse auch anders ausgedrückt werden. Sei nämlich $\mathfrak{M}$ die Summe der Massen aller Moleküle in dem Zylinder, δ seine Dichte, so ist $\delta = \frac{\mathfrak{M}}{\sigma h}$ (so dass also δ die in der Einheit des Volumens enthaltene Masse bedeutet); da h die Höhe des Zylinders, so ist die Summe der Massen aller Moleküle in einem Stücke, dessen Höhe l_1 gleich $\frac{\mathfrak{M}l}{h} = \frac{\sigma h \delta l}{h} = \sigma l \delta$. Da dieselbe aber $= nM$ ist (wenn n den der Ebene in der Entfernung l entsprechenden Werth bedeutet), so ist also $nM = \sigma l \delta$, $n = \frac{\sigma l \delta}{M} = \frac{\sigma\delta}{M} \cdot r\cos\alpha$, wobei σ, δ, M konstant sind. Daraus folgt endlich:

$$A = \delta\Sigma mrf(r)\cos^2\alpha, \quad B = \delta\Sigma mrf(r)\cos\alpha\cos\beta, \quad C = \delta\Sigma mrf(r)\cos\alpha\cos\gamma.$$

Wie bemerkt, bezieht sich das Zeichen Σ nur auf die rechts von I liegenden Moleküle (in ihrer Wirkung auf M); will man, wie früher, dieses Zeichen auf alle rings um M liegenden Moleküle ausdehnen, so hat man ganz offenbar:

$$\left.\begin{array}{c} A = \frac{\delta}{2}\Sigma mrf(r)\cos^2\alpha, \quad B = \frac{\delta}{2}\Sigma mrf(r)\cos\alpha\cos\beta, \\ C = \frac{\delta}{2}\Sigma mrf(r)\cos\alpha\cos\gamma; \end{array}\right\} \quad (15)$$

oder, wenn man lieber will:

$$A=\frac{\delta}{2}\,\Sigma mf(r)\frac{\Delta x^2}{r},\quad B=\frac{\delta}{2}\,\Sigma mf(r)\frac{\Delta x\Delta y}{r},\quad C=\frac{\delta}{2}\,\Sigma mf(r)\frac{\Delta x\Delta z}{r}.\quad (15'$$

Wie bereits bemerkt, sind dabei die Elastizitätsaxen als Koordinatenaxen gewählt.

Denkt man sich eben so durch M gehende, auf den Axe der y und z senkrecht stehende Ebenen, und bezeichnet m A', B', C'; A'', B'', C'' die Seitenkräfte der auf ein Elemen wirksamen Pressungen, bezogen auf die Einheit der Fläche, s hat man eben so:

$$\left.\begin{array}{c} A'=\frac{\delta}{2}\,\Sigma mrf(r)\cos\alpha\cos\beta,\quad B'=\frac{\delta}{2}\,\Sigma mrf(r)\cos^2\beta, \\ C'=\Sigma mrf(r)\cos\beta\cos\gamma; \\ A''=\frac{\delta}{2}\,\Sigma mrf(r)\cos\alpha\cos\gamma,\quad B''=\frac{\delta}{2}\,\Sigma mrf(r)\cos\beta\cos\gamma, \\ C''=\Sigma mrf(r)\cos^2\gamma. \end{array}\right\}\quad (1$$

Man hat somit immer:

$$A'=B,\quad A''=C,\quad B''=C'.\quad (1$$

Die Kräfte A, B', C'' sind normal auf ihre Ebenen gerichtet, di andern tangential.

Ist der Körper im natürlichen Gleichgewichtszustande, so is (§. IV.) jede der so gefundenen Pressungen Null, wie zu erwar ten war.

VIII.

Fortsetzung der Bestimmung der Pressungen, wen der Körper vom natürlichen Gleichgewichte aus durc Verschiebung seiner Moleküle in einen andern Zustan versetzt wird.

Sei, unter dieser Voraussetzung, δ_0 die im natürlichen Gleic gewichtszustande in M herrschende Dichte; ξ, v, ζ die Versch bungen von M nach den Axen, δ die schliesslich herrschen Dichte, so ist nach (15'):

$$A=\frac{\delta}{2}\Sigma mf(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta x+\Delta\xi)^2}{r_0+\varrho},\quad B=\frac{\delta}{2}\Sigma mf(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta x+\Delta\xi)(\Delta y+\Delta v)}{r_0+\varrho},\quad C=\frac{\delta}{2}\Sigma mf(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta x+\Delta\xi)(\Delta z+\Delta\zeta)}{r_0+\varrho},$$

$$A'=B,\quad B'=\frac{\delta}{2}\Sigma mf(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta y+\Delta v)^2}{r_0+\varrho},\quad C'=\frac{\delta}{2}\Sigma mf(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta y+\Delta v)(\Delta z+\Delta\zeta)}{r_0+\varrho},$$

$$A''=C,\quad B''=C',\quad C''=\frac{\delta}{2}\Sigma mf(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta z+\Delta\zeta)^2}{r_0+\varrho},$$

$$\varrho=\Delta\xi\cos\alpha_0+\Delta v\cos\beta_0+\Delta\zeta\cos\gamma_0.$$

Ferner

$$\frac{f(r_0+\varrho)}{r_0+\varrho}=\frac{f(r_0)}{r_0}+\varrho\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}f(r_0)\right)=\mathfrak{F}(r_0)+\frac{\varrho}{r_0}F(r_0)=\mathfrak{F}(r_0)+\frac{F(r_0)}{r_0}[\Delta\xi\cos\alpha_0+\Delta v\cos\beta_0+\Delta\zeta\cos\gamma_0];$$

$$f(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta x+\Delta\xi)^2}{r_0+\varrho}=\left[\mathfrak{F}(r_0)+\frac{F(r_0)}{r_0}\{\Delta\xi\cos\alpha_0+\Delta v\cos\beta_0+\Delta\zeta\cos\gamma_0\}\right](r_0^2\cos^2\alpha_0+2r_0\cos\alpha_0\Delta\xi)$$
$$=\mathfrak{F}(r_0)r_0^2\cos^2\alpha_0+r_0F(r_0)\cos^3\alpha_0.\Delta\xi+r_0F(r_0)\cos^2\alpha_0\cos\beta_0\Delta v+r_0F(r_0)\cos^2\alpha_0\cos\gamma_0\Delta\zeta+2r_0\mathfrak{F}(r_0)\cos\alpha_0\Delta\xi;$$

$$f(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta x+\Delta\xi)(\Delta y+\Delta v)}{r_0+\varrho}=\left[\mathfrak{F}(r_0)+\frac{F(r_0)}{r_0}\{\Delta\xi\cos\alpha_0+\Delta v\cos\beta_0+\Delta\zeta\cos\gamma_0\}\right][r_0^2\cos\alpha_0\cos\beta_0+r_0\cos\beta_0\Delta\xi+r_0\cos\alpha_0\Delta v]$$
$$=r_0^2\mathfrak{F}(r_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0+r_0F(r_0)\cos^2\alpha_0\cos\beta_0\Delta\xi+r_0F(r_0)\cos\alpha_0\cos^2\beta_0\Delta v$$
$$+r_0F(r_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0\cos\gamma_0\Delta\zeta+r_0\mathfrak{F}(r_0)\cos\beta_0\Delta\xi+r_0\mathfrak{F}(r_0)\cos\alpha_0\Delta v;$$

$$f(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\Delta x+\Delta\xi)(\Delta z+\Delta\zeta)}{r_0+\varrho}=r_0^2\mathfrak{F}(r_0)\cos\alpha_0\cos\gamma_0+r_0F(r_0)\cos^2\alpha_0\cos\gamma_0\Delta\xi+r_0F(r_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0\cos\gamma_0\Delta v$$

$$f(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\varDelta y+\varDelta v)^2}{r_0+\varrho}=r_0{}^2\mathfrak{F}(r_0)\cos^2\beta_0+r_0F(r_0)\cos\alpha_0\cos^2\beta_0\varDelta\xi$$
$$+r_0F(r_0)\cos^3\beta_0\varDelta v+r_0F(r_0)\cos^2\beta_0\cos\gamma_0\varDelta\zeta$$
$$+2r_0\mathfrak{F}(r_0)\cos\beta_0\varDelta v;$$

$$f(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\varDelta y+\varDelta v)(\varDelta z+\varDelta\zeta)}{r_0+\varrho}=r_0{}^2\mathfrak{F}(r_0)\cos\beta_0\cos\gamma_0$$
$$+r_0F(r_0)\cos\alpha_0\cos\beta_0\cos\gamma_0\varDelta\xi$$
$$+r_0F(r_0)\cos^2\beta_0\cos\gamma_0\varDelta v$$
$$+r_0F(r_0)\cos\beta_0\cos^2\gamma_0\varDelta\zeta+r_0\mathfrak{F}(r_0)\cos\beta_0\varDelta\zeta$$
$$+r_0\mathfrak{F}(r_0)\cos\gamma_0\varDelta v;$$

$$f(r_0+\varrho)\cdot\frac{(\varDelta z+\varDelta\zeta)^2}{r_0+\varrho}=r_0{}^2\mathfrak{F}(r_0)\cos^2\gamma_0+r_0F(r_0)\cos\alpha_0\cos^2\gamma_0\varDelta\xi$$
$$+r_0F(r_0)\cos\beta_0\cos^2\gamma_0\varDelta v+r_0F(r_0)\cos^3\gamma_0\varDelta\zeta$$
$$+2r_0\mathfrak{F}(r_0)\cos\gamma_0\varDelta\zeta;$$

$$\varDelta\xi=r_0\cos\alpha_0\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+r_0\cos\beta_0\frac{\partial\xi}{\partial y_0}+r_0\cos\gamma_0\frac{\partial\xi}{\partial z_0},$$
$$\varDelta v=r_0\cos\alpha_0\frac{\partial v}{\partial x_0}+r_0\cos\beta_0\frac{\partial v}{\partial y_0}+r_0\cos\gamma_0\frac{\partial v}{\partial z_0},$$
$$\varDelta\zeta=r_0\cos\alpha_0\frac{\partial\zeta}{\partial x_0}+r_0\cos\beta_0\frac{\partial\zeta}{\partial y_0}+r_0\cos\gamma_0\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}.$$

Setzt man diese Werthe ein, macht dieselben Voraussetzungen wie in §. III., und lässt sogleich G_0, H_0, J_0 weg (§. IV.), so erhält man:

$$A=\delta\left[L_0\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+R_0\frac{\partial v}{\partial y_0}+Q_0\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\right],\quad B=\delta R_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial y_0}+\frac{\partial v}{\partial x_0}\right],$$
$$C=\delta Q_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial z_0}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_0}\right],$$

$$A'=B,\quad B'=\delta\left[R_0\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+M_0\frac{\partial v}{\partial y_0}+P_0\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\right],\ C'=\delta P_0\left[\frac{\partial v}{\partial z_0}+\frac{\partial\zeta}{\partial y_0}\right],$$

$$A''=C,\quad B''=C',\qquad C''=\delta\left[Q_0\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+P_0\frac{\partial v}{\partial y_0}+N_0\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\right].$$

Zugleich ist (§. VI.):

$$\delta=\frac{\delta_0}{1+\Theta}=\delta_0\left(1-\frac{\partial\xi}{\partial x_0}-\frac{\partial v}{\partial y_0}-\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\right).$$

Setzt man dies in obige Werthe ein und vernachlässigt die höhern Dimensionen der Differentialquotienten (§. VI.), so erhält man endlich:

$$\left[L_0\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+R_0\frac{\partial v}{\partial y_0}+Q_0\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\right],\quad B=\delta_0 R_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial y_0}+\frac{\partial v}{\partial x_0}\right],$$

$$C=\delta_0 Q_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial z_0}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_0}\right],$$

$$A'=B,\quad B'=\delta_0\left[R_0\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+M_0\frac{\partial v}{\partial y_0}+P_0\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\right], \tag{18}$$

$$C'=\delta_0 P_0\left[\frac{\partial v}{\partial z_0}+\frac{\partial\zeta}{\partial y_0}\right],$$

$$C,\quad B''=C',\quad C''=\delta_0\left[Q_0\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+P_0\frac{\partial v}{\partial y_0}+N_0\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\right].$$

mmt man nicht an, der anfängliche Zustand sei der des natür- Gleichgewichts, dagegen ein solcher, in welchem die in vorausgesetzte symmetrische Anordnung Statt findet; bezeich- alsdann die Dichte im Punkte (x, y, z) im ersten Zustande, ielte man:

$$l=\delta[G+G\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+L\frac{\partial\xi}{\partial x}+R\frac{\partial v}{\partial y}+Q\frac{\partial\zeta}{\partial z}],$$

$$[(H+R)\frac{\partial\xi}{\partial y}+(G+R)\frac{\partial v}{\partial x}],\quad C=\delta[(J+Q)\frac{\partial\xi}{\partial z}+(G+Q)\frac{\partial\zeta}{\partial x}];$$

$$B,\quad B'=\delta[H+H\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+M\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial\xi}{\partial x}+P\frac{\partial\zeta}{\partial z}], \tag{19}$$

$$C'=\delta[(J+P)\frac{\partial v}{\partial z}+(H+P)\frac{\partial\zeta}{\partial y}];$$

$$C,\quad B''=C',\quad C''=\delta[J+J\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+N\frac{\partial\zeta}{\partial z}+P\frac{\partial v}{\partial y}+Q\frac{\partial\xi}{\partial x}].$$

te man die Dichte Δ im neuen Zustande bei, so hätte man:

$$A=\Delta[G+(2G+L)\frac{\partial\xi}{\partial x}+R\frac{\partial v}{\partial y}+Q\frac{\partial\zeta}{\partial z}],$$

$$[(H+R)\frac{\partial\xi}{\partial y}+(G+R)\frac{\partial v}{\partial x}],\quad C=\Delta[(J+Q)\frac{\partial\xi}{\partial z}+(G+Q)\frac{\partial\zeta}{\partial x}],$$

$$A'=B,\quad B'=\Delta[H+R\frac{\partial\xi}{\partial x}+(2H+M)\frac{\partial v}{\partial y}+P\frac{\partial\zeta}{\partial z}], \tag{19'}$$

$$C'=\Delta[(J+P)\frac{\partial v}{\partial z}+(H+P)\frac{\partial\zeta}{\partial y}],$$

$$C,\quad B''=C',\quad C''=\Delta[J+Q\frac{\partial\xi}{\partial x}+P\frac{\partial v}{\partial y}+(2J+N)\frac{\partial\zeta}{\partial z}].$$

IX.

Bestimmung der Pressungen auf irgend eine durc einen Punkt gelegte Ebene für einen isotropen Kö per. (§. I.)

In §. VIII. wurden die Pressungen bestimmt, welche Statt find in drei Ebenen, die durch den Punkt (x, y, z) gehen und auf d Koordinatenaxen senkrecht stehen. Wir wollen nun aber anne men, man lege irgend eine andere Ebene durch denselben Punk und uns die Frage stellen, ob man die auf dieselbe ausgeübt Pressungen ebenfalls noch bestimmen könne. Dabei setz wir den Körper als isotrop voraus und nehmen an, Falle das anfängliche Gleichgewicht nicht das natürliche war, d Bedingungen des Isotropismus seien für dasselbe noch erfül Unter dieser Annahme werden wir beweisen (§. XI.), dass

$$P=Q=R, \quad L=M=N=3P, \tag{2}$$

welche Beziehungen wir sofort nun einführen wollen.

Denken wir uns nun durch den Punkt x, y, z eine Ebe gelegt, so wird die eine Seite derselben nach den positiven, d andere nach den negativen x gerichtet sein. In diesem Punk (M) errichte man eine Normale auf dieselbe und zwar nach erst Seite hin; dieselbe mache mit den durch M mit den positiv Koordinatenaxen parallel gelegten Geraden Winkel, deren Cosin α, β, γ seien, wo diese Winkel immer der Art sind, dass $\alpha=$ wenn man die Ebene so dreht, dass sie auf der Axe der x sen recht steht, und dieselbe Seite den positiven x zuwendet wie vo hin u. s. w.

Durch den Anfangspunkt lege man nun ein neues rechtwin liches Koordinatensystem der x', y', z', so dass die Axe der parallel der so eben bestimmten Normale und gleich gerichtet n ihr sei. Sind ξ', v', ζ' die Verschiebungen von M parallel d neuen Axen, A', B', C' die Werthe von A, B, C für die neu Axen, so hat man nach §. VIII., da das neue System den dor gen Bedingungen noch entspricht:

$$A'=\delta\left[L\frac{\partial\xi'}{\partial x'}+R\frac{\partial v'}{\partial y'}+Q\frac{\partial\zeta'}{\partial z'}\right], \quad B'=\delta R\left[\frac{\partial\xi'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial x'}\right],$$

$$C'=\delta Q\left[\frac{\partial\xi'}{\partial z'}+\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}\right].$$

Aber man hat:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad x = \alpha x' + a y' + \mathfrak{a} z', \quad \xi' = \alpha \xi + \beta v + \gamma \zeta, \quad \xi = \alpha \xi' + a v' + \mathfrak{a} \zeta',$$
$$y' = a x + b y + c z, \quad y = \beta x' + b y' + \mathfrak{b} z', \quad v' = a \xi + b v + c \zeta, \quad v = \beta \xi' + b v' + \mathfrak{b} \zeta',$$
$$z' = \mathfrak{a} x + \mathfrak{b} y + \mathfrak{c} z, \quad z = \gamma x' + c y' + \mathfrak{c} z', \quad \zeta' = \mathfrak{a} \xi + \mathfrak{b} v + \mathfrak{c} \zeta, \quad \zeta = \gamma \xi' + c v' + \mathfrak{c} \zeta';$$

wo zwischen $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bekanntlich noch sechs Relationen bestehen. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x'} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x'} + \beta \frac{\partial v}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial x'} = \alpha \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \right] + \beta \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \right] + \gamma \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} \right]$$
$$= \alpha^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha\beta \frac{\partial \xi}{\partial y} + \alpha\gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} + \alpha\beta \frac{\partial v}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \beta\gamma \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha\gamma \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta\gamma \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial y'} = \alpha a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha b \frac{\partial \xi}{\partial y} + \alpha c \frac{\partial \xi}{\partial z} + a\beta \frac{\partial v}{\partial x} + b\beta \frac{\partial v}{\partial y} + c\beta \frac{\partial v}{\partial z} + a\gamma \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b\gamma \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\gamma \frac{\partial \zeta}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial z'} = \alpha \mathfrak{a} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha \mathfrak{b} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \alpha \mathfrak{c} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \beta \mathfrak{a} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \mathfrak{b} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \mathfrak{c} \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma \mathfrak{a} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \gamma \mathfrak{b} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \gamma \mathfrak{c} \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \alpha a \frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta a \frac{\partial \xi}{\partial y} + \gamma a \frac{\partial \xi}{\partial z} + \alpha b \frac{\partial v}{\partial x} + \beta b \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma b \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha c \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta c \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \gamma c \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} + ab \frac{\partial v}{\partial x} + b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + bc \frac{\partial v}{\partial z} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x'} = \mathfrak{a}\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathfrak{a}\beta \frac{\partial \xi}{\partial y} + \mathfrak{a}\gamma \frac{\partial \xi}{\partial z} + \alpha \mathfrak{b} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \mathfrak{b} \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \mathfrak{b} \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha \mathfrak{c} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta \mathfrak{c} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \gamma \mathfrak{c} \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial z'} = \mathfrak{a}^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathfrak{a}\mathfrak{b} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \mathfrak{a}\mathfrak{b} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathfrak{b}^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} \frac{\partial v}{\partial z} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \mathfrak{c}^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Daraus ergiebt sich nun, wenn man (20) und die Relationen zwischen $\alpha,\ldots,\mathfrak{c}$ beachtet:

$$L\frac{\partial\xi'}{\partial x'} + R\frac{\partial v'}{\partial y'} + Q\frac{\partial\zeta'}{\partial z'} = P\Big[2\alpha^2\frac{\partial\xi}{\partial x} + 2\alpha\beta\frac{\partial\xi}{\partial y} + 2\alpha\gamma\frac{\partial\xi}{\partial z} + 2\alpha\beta\frac{\partial v}{\partial x} + 2\beta^2\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+ 2\beta\gamma\frac{\partial v}{\partial z} + 2\alpha\gamma\frac{\partial\zeta}{\partial x} + 2\beta\gamma\frac{\partial\zeta}{\partial y} + 2\gamma^2\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big] = \frac{A'}{\delta},$$

$$R\Big[\frac{\partial\xi'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}\Big] = P\Big[2a\alpha\frac{\partial\xi}{\partial x} + (\alpha b + a\beta)\frac{\partial\xi}{\partial y} + (\alpha c + a\gamma)\frac{\partial\xi}{\partial z}$$

$$+ (a\beta + \alpha b)\frac{\partial v}{\partial x} + 2b\beta\frac{\partial v}{\partial y} + (\beta c + b\gamma)\frac{\partial v}{\partial z} + (a\gamma + \alpha c)\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

$$+ (b\gamma + c\beta)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + 2c\gamma\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big] = \frac{B'}{\delta},$$

$$Q\Big(\frac{\partial\xi'}{\partial z'} + \frac{\partial\zeta'}{\partial x'}\Big] = P\Big[2\alpha\mathfrak{a}\frac{\partial\xi}{\partial x} + (\alpha\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\beta)\frac{\partial\xi}{\partial y} + (\mathfrak{a}\gamma + \alpha\mathfrak{c})\frac{\partial\xi}{\partial z} + (\alpha\mathfrak{b} + \beta\mathfrak{a})\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$+ 2\mathfrak{b}\beta\frac{\partial v}{\partial y} + (\mathfrak{b}\gamma + \beta\mathfrak{c})\frac{\partial v}{\partial z} + (\mathfrak{a}\gamma + \alpha\mathfrak{c})\frac{\partial\zeta}{\partial x} + (\beta\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\gamma)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + 2\gamma\mathfrak{c}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big] = \frac{C'}{\delta}.$$

Daraus ergiebt sich leicht:

$$\alpha A' + aB' + \mathfrak{a}C' = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

Nun ist aber $\alpha A' + aB' + \mathfrak{a}C'$ offenbar die Seitenkraft der Pressung auf die neue Ebene, zerlegt nach der Axe der x; heissen also A_1, B_1, C_1 die Seitenkräfte dieser Pressung, nach den Axen der x, y, z, so hat man endlich:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ B_1 &= \alpha A' + \beta B' + \gamma C', \\ C_1 &= \alpha A'' + \beta B'' + \gamma C''. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Vermittelst dieser Formeln und denen des §. VIII. kann man nun die Pressung auf jede Ebene darstellen. Man wird diese Formeln benutzen müssen, um bei Kräften, die auf die Oberfläche wirken (§. III.), die besondern Bedingungen des Gleichgewichts darzustellen.

Wir haben allerdings sehr spezielle Annahmen für die Beschaffenheit des Körpers gemacht. Es wäre übrigens nicht gerade schwer, allgemeiner zu verfahren, wenn man in §. VII. die Bedingung der symmetrischen Anordnung nicht aufnehmen würde; die Formeln würden dadurch aber eine Weitläufigkeit erhalten, die

wir vermeiden wollten. In Bezug auf die eben berührte Anwendung der Formeln (21) wird man in folgender Weise verfahren: Hat man nach §. III. die Grössen ξ, v, ζ als Funktionen von x, y, z gefunden, so wird man nach §. VIII. und (21) die Pressungen berechnen, die in jedem Elemente der Oberfläche, in dem noch äussere Kräfte wirken, herrschen müssen, und sie diesen äussern Kräften (bezogen auf die Einheit der Fläche) gleich setzen, wodurch die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der willkührlichen Grössen erhalten werden.

X.

Geometrische Konstruktion der Pressungen auf die durch einen Punkt gelegten ebenen Elemente für einen isotropen Körper.

Die Formeln (21) bestimmen die drei Seitenkräfte der (auf die Einheit der Fläche bezogenen) Pressungen auf ein Element, dessen Normale mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus α, β, γ sind. Wir wollen uns nun zunächst die Frage stellen, ob die so bestimmte Kraft senkrecht stehen könne auf dem Element, also mit der Richtung der Normale zusammenfalle. Denken wir uns, es sei dies der Fall, so müssten, wenn F die resultirende Kraft wäre, ihre Seitenkräfte αF, βF, γF sein. Man hätte also in (21):

$$\left.\begin{aligned} \alpha A + \beta B + \gamma C &= \alpha F, \\ \alpha B + \beta B' + \gamma C' &= \beta F, \\ \alpha C + \beta C' + \gamma C'' &= \gamma F, \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

wenn man die Beziehungen (17) beachtet. Ist es nun möglich, aus (a) die Grösse F zu bestimmen, so wird es also auch eine Kraft geben, deren Richtung auf ihrem Elemente senkrecht steht. Durch Elimination von $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ aus (a) folgt aber bekanntlich die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} (A-F)(B'-F)(C''-F) - C'^2(A-F) - C^2(B'-F) \\ -B^2(C''-F) + 2BCC' = 0, \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

(vergleiche z. B.: „Vorlesungen über die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie von Cauchy, deutsch von Schnuse, S. 191. ff.“), welche Gleichung immer

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Für ein anderes Element, das in [illegible] bestimmt wurde, ist mithin

$$A_1 = \alpha F_1, \quad B_1 = \beta F_2, \quad C_1 = \gamma F_3,$$

demnach:

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = \alpha^2 F_1^2 + \beta^2 F_2^2 + \gamma^2 F_3^2.$$

Sei nun $F_1^2 > F_2^2 > F_3^2$, so ist immer $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2$ zwischen F_1^2 und F_3^2 enthalten. Daraus folgt nun, dass, wenn man um den jetzigen Anfangspunkt als Mittelpunkt ein Ellipsoid beschreibt, dessen Halbaxen F_1, F_2, F_3 sind, jede Pressung auf irgend eine durch den Anfangspunkt gehende Ebene durch einen Radius vector dieses Ellipsoids dargestellt werden kann. Wir wollen nun untersuchen, welches die einem bestimmten, eine Pressung vorstellenden Radius vector entsprechende Ebene ist.

Sei also

$$\frac{x^2}{F_1^2} + \frac{y^2}{F_2^2} + \frac{z^2}{F_3^2} = 1 \qquad (c$$

die Gleichung des Ellipsoids; (x', y', z') ein bestimmter Pu∣ seiner Oberfläche, r' der nach demselben gezogene Radius vector, so stellt r' nach Grösse und Richtung die Pressung vor, welche (bezogen auf die Einheit der Fläche) im Mittelpunkt auf eine noch zu bestimmende Ebene ausgeübt wird. Sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Normale auf diese Ebene mit den Axen macht, so ist, da x', y', z' die Seitenkräfte der Pressung r' vorstellen,

$$x' = \alpha F_1, \quad y' = \beta F_2, \quad z' = \gamma F_3; \quad \alpha = \frac{x'}{F_1}, \quad \beta = \frac{y'}{F_2}, \quad \gamma = \frac{z'}{F_3}.$$

emnach ist die Gleichung der fraglichen Ebene:

$$\frac{x'}{F_1}x+\frac{y'}{F_2}y+\frac{z'}{F_3}z=0,$$

sie ist mithin völlig bekannt. Diese Ebene läuft aber, wie an sich leicht überzeugt, parallel mit der Tangentialebene an die läche, deren Gleichung ist

$$\frac{x^2}{F_1}+\frac{y^2}{F_2}+\frac{z^2}{F_3}=\pm k^2, \qquad \text{(d)}$$

in denjenigen Punkt dieser Fläche gezogen ist, in welchem r verlängerte Radius r' dieselbe trifft.

Die Fläche (d) stellt, wenn F_1, F_2, F_3 von demselben Zeichen nd, ein Ellipsoid vor; sind aber diese Grössen nicht alle von emselben Zeichen, so stellt sie zwei Hyperboloide (mit einem oder wei Fächern) vor, welche durch den Asymptotenkegel

$$\frac{x^2}{F_1}+\frac{y^2}{F_2}+\frac{z^2}{F_3}=0 \qquad \text{(e)}$$

schieden sind.

Wir bemerken noch, dass wenn eine oder die andere Wurzl von (b) positiv ist, sie einen Zug, wenn sie negativ ist, eine ressung vorstellt *). Denn hätte man zufällig ursprünglich die n eingeführten Axen gewählt, so würde man die drei Werthe n F für die auf den drei Elementen des §. VIII. ausgeübten ressungen erhalten haben, woraus, mit dem dort Gesagten zuammengehalten, die Richtigkeit der Behauptung folgt. Wir woln nun die einzelnen Fälle besonders betrachten:

1) Die drei Wurzeln von (b) sind positiv.

In diesem Falle stellen F_1, F_2, F_3 bloss Züge vor (Andrücken es Zylinders in §. VII. gegen seine Grundfläche). Man konstruire an die zwei Ellipsoide

$$\frac{x^2}{F_1{}^2}+\frac{y^2}{F_2{}^2}+\frac{z^2}{F_3{}^2}=1,\quad \frac{x^2}{F_1}+\frac{y^2}{F_2}+\frac{z^2}{F_3}=1,$$

nd lege, falls man wissen will, auf welche durch den Mittelpunkt

*) Wir nennen beide, der Kürze halber, immer Pressung. Für Zug" könnte man positive Pressung setzen und für „Pressung" dann gative Pressung.

gelegte Ebene ein bestimmter (gegebener) Zug ausgeübt wird, in das erste einen Radius vector, gleich dem gegebenen Zuge (der zwischen F_1 und F_3 liegt, wenn $F_1 > F_2 > F_3$ und in demselben Maasse wie F_1 gegeben ist), bemerke den Punkt, in dem er das zweite Ellipsoid trifft, ziehe in demselben eine Tangentialebene an letzteres, so ist dieselbe parallel mit der gesuchten Ebene. Der Radius vector stellt zugleich die Richtung des Zugs vor. Wie man umgekehrt verfahren kann, ist klar.

Eigentliche Pressungen kommen in diesem Falle (um x, y, z herum) nicht vor. Denn gesetzt, es kämen solche vor, so müsste, wenn man stetig fortschritte bis zu einer der Halbaxen des ersten Ellipsoids, diese Pressung in einen Zug übergegangen sein; beim Uebergang hätte man weder Pressung noch Zug, d. h. es müsste Ebenen geben, in denen die resultirende Kraft bloss eine tangentiale wäre. Die Richtung derselben läge also in der Ebene und es müssten folglich Tangentialebenen des zweiten Ellipsoids so liegen können, dass der zu ihnen gehörige Fahrstrahl in ihnen läge, was nicht möglich ist.

2) Die drei Wurzeln von (b) sind negativ.

Man konstruire die zwei Ellipsoide

$$\frac{x^2}{F_1^2}+\frac{y^2}{F_2^2}+\frac{z^2}{F_3^2}=1,\quad \frac{x^2}{F_1}+\frac{y^2}{F_2}+\frac{z^2}{F_3}=-1$$

und verfahre ganz wie so eben. In diesem Falle hat man bloss Pressungen.

3) Die drei Wurzeln von (b) haben nicht dasselbe Zeichen.

Man konstruire die vier Flächen:

$$\frac{x^2}{F_1^2}+\frac{y^2}{F_2^2}+\frac{z^2}{F_3^2}=1,\quad \frac{x^2}{F_1}+\frac{y^2}{F_2}+\frac{z^2}{F_3}=1,\quad \frac{x^2}{F_1}+\frac{y^2}{F_2}+\frac{z^2}{F_3}=-1,$$

$$\frac{x^2}{F_1}+\frac{y^2}{F_2}+\frac{z^2}{F_3}=0;$$

so wird die erste ein Ellipsoid, die zwei andern Hyperboloide, die letzte den Asymptotenkegel derselben vorstellen.

Zeichnet man nun wieder in dem Ellipsoid einen Radius vector, so stellt er nach Grösse und Richtung einen Zug (oder eine Pressung) vor. Die zu ihm gehörige Ebene (auf welche er ausgeübt wird) ergiebt sich durch die Tangentialebene an diejenige

ler drei andern Flächen, welche von ihm getroffen wird. Trifft lieser Radius den Kegel, so fällt die Tangentialebene in den 'ahrstrahl; alsdann ist also die auf das ebene Element wirkende Kraft bloss eine Tangentialkraft, so dass der Kegel diejenigen Ebenenrichtungen, in denen Pressungen Statt finden, von denen cheidet, in denen Zug Statt findet. Auf der einen Seite bloss 'ressung, andererseits bloss Zug.

Sind nun zwei der Wurzeln von (b) positiv, so wird das einächerige Hyperboloid von denjenigen Fahrstrahlen getroffen weren, die Zügen entsprechen; ist nur eine positiv, von denen, velche Pressungen darstellen. Konstruirt man also nach der angegebenen Weise, so stellt der Fahrstrahl, wenn er das einfächeige Hyperboloid trifft, eine Kraft von derjenigen Art vor, von der wei durch (b) gegeben sind; trifft er das zweifächerige, eine der Art, von der nur eine durch (b) gegeben ist.

Ist eine der Wurzeln von (b), z. B. F_1, Null, so gehen die eben betrachteten Flächen in Ellipsen, Hyperbeln und deren Asymptoten über, und man wird leicht die Konstruktion nun finden können. Sind zwei Null, so liegen alle Kräfte in derselben Geraden.

XI.

Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Gleichungen (7).

Wir haben in §. III. eine bestimmte Annahme hinsichtlich der Anordnung der Körpermoleküle gemacht. Diese Anordnungsweise wollen wir beibehalten, also die Koordinatenaxen parallel den Elastizitätsaxen gelegt denken. In gewissen Fällen kann nun die Anordnung der Art sein, dass rings um eine oder mehrere der Elastizitätsaxen herum dieselbe ganz gleich sei, also nicht mehr bloss symmetrisch wie in §. III.

Setzen wir also zuerst voraus, der Körper sei der Art, dass er um die Axe der z herum nach allen Seiten ganz gleich geordnet sei; alsdann kommt es in den Summen (6) nicht darauf an, was α und β seien, indem, bei konstantem γ, alle betreffenden Moleküle in einem Kegel liegen, dessen Axe die der z ist. Somit ist gewiss:

$$G=H,\ L=M,\ P=Q,\ \mathfrak{A}=\mathfrak{B},\ \mathfrak{D}=\mathfrak{E},\ \mathfrak{G}=\mathfrak{H},\ \mathfrak{K}=\mathfrak{L},\ \mathfrak{N}=\mathfrak{O},\ \mathfrak{M}=\mathfrak{P}.$$

Ob damit aber alle Beziehungen erschöpft sind, lässt sich nicht entscheiden. Wir werden desswegen folgenden Weg einschlagen. Man ändere die Lage der Axen der x und y beliebig, lasse aber die der z ungeändert; alsdann dürfen die in (6) vorkommenden Grössen ihre Werthe nicht ändern. Setzt man

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{\Delta y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{\Delta z}{r};$$

so sind dieselben:

$$G = \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{F}(r).\Delta x^2, \quad H = \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{F}(r).\Delta y^2, \quad J = \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{F}(r)\Delta z^2, \text{ u. s. w.}$$

Ist nun ψ der (beliebige) Winkel, den die neue Axe der x' mit der der x macht, so ist

$$\Delta x' = \Delta x\cos\psi + \Delta y\sin\psi, \quad \Delta y' = \Delta y\cos\psi - \Delta x\sin\psi;$$

also

$$\Delta x'^2 = \Delta x^2\cos^2\psi + 2\Delta x\Delta y\cos\psi\sin\psi + \Delta y^2\sin^2\psi \text{ u. s. w.}$$

Nun ist aber: $\Sigma m\mathfrak{F}(r).\Delta x'^2 = \Sigma m\mathfrak{F}(r)\Delta x^2$, u. s. f. bleiben alle Summen der Formeln (6) dieselben, wenn man $\Delta x'$, $\Delta y'$ für Δx, Δy setzt. Thut man dies, so erhält man, indem man sogleich die Summen, welche ungerade Potenzen von Δx, Δy enthalten, weglässt:

$$G = G\cos^2\psi + H\sin^2\psi,$$
$$H = H\cos^2\psi + G\sin^2\psi,$$
$$L = L\cos^4\psi + 6R\cos^2\psi\sin^2\psi + M\sin^4\psi,$$
$$M = M\cos^4\psi + 6R\cos^2\psi\sin^2\psi + L\sin^4\psi,$$
$$P = P\cos^2\psi + Q\sin^2\psi,$$
$$Q = Q\cos^2\psi + P\sin^2\psi,$$
$$R = R\cos^4\psi + L\cos^2\psi\sin^2\psi - 4R\sin^2\psi\cos^2\psi + M\sin^2\psi\cos^2\psi + R\sin^4\psi,$$
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\cos^4\psi + \mathfrak{F}\cos^2\psi\sin^2\psi + \mathfrak{B}\sin^4\psi,$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\cos^4\psi + \mathfrak{F}\cos^2\psi\sin^2\psi + \mathfrak{A}\sin^4\psi,$$
$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\cos^2\psi + \mathfrak{E}\sin^2\psi,$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\cos^2\psi + \mathfrak{D}\sin^2\psi,$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\cos^4\psi + 6\mathfrak{A}\cos^2\psi\sin^2\psi - 4\mathfrak{F}\sin^2\psi\cos^2\psi + 6\mathfrak{B}\cos^2\psi\sin^2\psi + \mathfrak{F}\sin^4\psi,$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\cos^6\psi + 15\mathfrak{P}\cos^4\psi\sin^2\psi + 15\mathfrak{M}\cos^2\psi\sin^4\psi + \mathfrak{H}\sin^6\psi,$$

$$=\mathfrak{h}\cos^6\psi+15\mathfrak{M}\cos^4\psi\sin^2\psi+15\mathfrak{P}\cos^2\psi\sin^4\psi+\mathfrak{G}\sin^6\psi,$$

$$=\mathfrak{K}\cos^2\psi+\mathfrak{L}\sin^2\psi,$$

$$=\mathfrak{L}\cos^2\psi+\mathfrak{K}\sin^2\psi,$$

$$=\mathfrak{M}\cos^6\psi+6\mathfrak{P}\cos^4\psi\sin^2\psi+\mathfrak{G}\sin^4\psi\cos^2\psi-8\mathfrak{M}\cos^4\psi\sin^2\psi$$
$$-8\mathfrak{P}\cos^2\psi\sin^4\psi+\mathfrak{h}\cos^4\psi\sin^2\psi+6\mathfrak{M}\cos^2\psi\sin^4\psi+\mathfrak{P}\sin^6\psi,$$

$$=\mathfrak{N}\cos^4\psi+\mathfrak{Q}\cos^2\psi\sin^2\psi+\mathfrak{O}\sin^4\psi,$$

$$=\mathfrak{O}\cos^4\psi+\mathfrak{Q}\cos^2\psi\sin^2\psi+\mathfrak{N}\sin^4\psi,$$

$$=\mathfrak{P}\cos^6\psi+6\mathfrak{M}\cos^4\psi\sin^2\psi+\mathfrak{h}\sin^4\psi\cos^2\psi-8\mathfrak{P}\cos^4\psi\sin^2\psi$$
$$-8\mathfrak{M}\cos^2\psi\sin^4\psi+\mathfrak{G}\cos^4\psi\sin^2\psi+6\mathfrak{P}\cos^2\psi\sin^4\psi+\mathfrak{M}\sin^6\psi,$$

$$=\mathfrak{Q}\cos^4\psi+6\mathfrak{O}\cos^2\psi\sin^2\psi-4\mathfrak{Q}\cos^2\psi\sin^2\psi+6\mathfrak{N}\cos^2\psi\sin^2\psi$$
$$+\mathfrak{Q}\sin^4\psi.$$

se Beziehungen sind richtig, was auch ψ sei. Man setze also $=90^0$, so erhält man:

$$=H,\ L=M,\ P=Q,\ \mathfrak{A}=\mathfrak{B},\ \mathfrak{D}=\mathfrak{E},\ \mathfrak{G}=\mathfrak{h},\ \mathfrak{K}=\mathfrak{L},\ \mathfrak{M}=\mathfrak{P},\ \mathfrak{N}=\mathfrak{O};$$

lches die bereits gefundenen Beziehungen sind. Vermöge die- Beziehungen werden obige Gleichungen zu:

$$L=L(\cos^4\psi+\sin^4\psi)+6R\cos^2\psi\sin^2\psi,$$

$$R=R(\cos^4\psi-4\sin^2\psi\cos^2\psi+\sin^4\psi)+2L\sin^2\psi\cos^2\psi,$$

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\cos^4\psi+\sin^4\psi)+\mathfrak{F}\cos^2\psi\sin^2\psi,$$

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(\cos^4\psi-4\sin^2\psi\cos^2\psi+\sin^4\psi)+12\mathfrak{A}\sin^2\psi\cos^2\psi,$$

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(\cos^6\psi+\sin^6\psi)+15\mathfrak{M}\cos^2\psi\sin^2\psi,$$

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\cos^6\psi-2\cos^2\psi\sin^2\psi+\sin^6\psi)+\mathfrak{G}\sin^2\psi\cos^2\psi,$$

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(\cos^4\psi+\sin^4\psi)+\mathfrak{Q}\cos^2\psi\sin^2\psi,$$

$$\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}(\cos^4\psi-4\cos^2\psi\sin^2\psi+\sin^4\psi)+12\mathfrak{N}\cos^2\psi\sin^2\psi.$$

n setze hier $\psi=45^0$, so hat man:

$$L=3R,\quad \mathfrak{F}=2\mathfrak{A},\quad \mathfrak{G}=5\mathfrak{M},\quad \mathfrak{Q}=2\mathfrak{N};$$

lche Bedingungen die sämmtlichen Gleichungen identisch machen, s auch ψ sei. Man hat also in diesem Falle:

$$\left.\begin{array}{c} G=H,\ L=M=3R,\ P=Q,\ \mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\tfrac{1}{2}\mathfrak{F},\ \mathfrak{D}=\mathfrak{E}, \\ \mathfrak{G}=\mathfrak{h}=5\mathfrak{M},\ \mathfrak{K}=\mathfrak{L},\ \mathfrak{M}=\mathfrak{P},\ \mathfrak{N}=\mathfrak{O}=\tfrac{1}{2}\mathfrak{Q}. \end{array}\right\}\ (22)$$

Die entsprechenden Beziehungen für den Fall, wenn die Axen der x oder y an die Stelle der von z treten, sind hieraus leicht abzuleiten.

Ist der Körper isotrop, so folgt hieraus, dass

$$\left.\begin{array}{c} G=H=J,\ \ L=M=N,\ \ P=Q=R,\ \ \mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{D}=\mathfrak{E}=\mathfrak{F},\ \mathfrak{G}=\mathfrak{H}=\mathfrak{J},\ \mathfrak{K}=\mathfrak{L}=\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=\mathfrak{O}=\mathfrak{P},\ L=3P, \\ \mathfrak{D}=2\mathfrak{A},\ \ \mathfrak{G}=5\mathfrak{K},\ \ \mathfrak{Q}=2\mathfrak{K} \end{array}\right\} \quad (23)$$

ist, so dass nur noch G, P, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$ bleiben, zwischen welchen keine Relation besteht. Für den Fall eines isotropen Körpers sind nunmehr die (7):

$$\begin{aligned} &(G+P)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}\right) \\ &+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})\left(\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\xi}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial y^2}+2\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial z^2}+2\frac{\partial^4\xi}{\partial y^2\partial z^2}\right) \\ &+4\mathfrak{K}\left(\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^3\partial y}+\frac{\partial^4 v}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4 v}{\partial x\partial y\partial z^2}\right. \\ &\qquad\qquad\left.+\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^3\partial z}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial x\partial y^2\partial z}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial x\partial z^3}\right)+X=0 \end{aligned}$$

u. s. w., welche Gleichungen man unter etwas übersichtlichere Form bringen kann, wenn man beachtet, dass (§. VI.):

$$\Theta=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

ist, und

$$D^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad D^2.D^2u=\frac{\partial^2.D^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2.D^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2.D^2u}{\partial z^2}$$

setzt:

$$\left.\begin{array}{l} (G+P)D^2\xi+2P\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})\,D^2.D^2\xi+4\mathfrak{K}.D^2\cdot\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}+X=0, \\ (G+P)D^2v+2P\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})\,D^2.D^2v+4\mathfrak{K}.D^2\cdot\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}+Y=0, \\ (G+P)D^2\zeta+2P\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})\,D^2.D^2\zeta+4\mathfrak{K}.D^2\cdot\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}+Z=0. \end{array}\right\} \quad (24)$$

XII.

Berechnung der Arbeit, welche nothwendig ist, einen Körper aus dem natürlichen Gleichgewichtszustande in einen neuen (verschobenen) Zustand überzuführen.

Seien wie früher M, m die Massen zweier Moleküle, r_0 ihre dem natürlichen Gleichgewichtszustande entsprechende Entfernung, $r_0+\varrho$ die dem neuen Zustande entsprechende, so ist die durch die Verschiebung beider entwickelte Wirkungsgrösse (§. IV.):

$$Mm\int_{r_0}^{r_0+\varrho} f(r)\partial r = Mm\int_0^{\varrho} f(r_0+u)\partial u = Mm\int_0^{\varrho}[f(r_0)+uf'(r_0)]\partial u$$
$$= Mm\left[\varrho f(r_0)+\frac{\varrho^2}{2}f'(r_0)\right],$$

wenn man die höhern Potenzen von ϱ verwirft. Summirt man diese Grösse für alle um M liegenden Punkte, so ergiebt sich:

$$M\Sigma m\varrho f(r_0) + \frac{M}{2}\Sigma m\varrho^2 f'(r_0). \qquad \text{(a)}$$

Summirt man nunmehr die Grösse (a) für alle Punkte des Körpers (d. h. für alle M) und nimmt vom Ganzen die Hälfte, so erhält man die Gesammtwirkungsgrösse

$$\tfrac{1}{2}\Sigma M\Sigma m\varrho f(r_0) + \tfrac{1}{4}\Sigma M\Sigma m\varrho^2 f'(r), \qquad \text{(b)}$$

welche von den innern Kräften des Systems herrührt.

Man hat nun wieder

$$(r_0+\varrho)^2 = (\Delta x+\Delta\xi)^2+(\Delta y+\Delta v)^2+(\Delta z+\Delta\zeta)^2,$$

d. h.

$$2r_0\varrho+\varrho^2 = 2(\Delta x\Delta\xi+\Delta y\Delta v+\Delta z\Delta\zeta)+(\Delta\xi)^2+(\Delta v)^2+(\Delta\zeta)^2,$$

$$\varrho = \frac{\Delta x}{r_0}\Delta\xi+\frac{\Delta y}{r_0}\Delta v+\frac{\Delta z}{r_0}\Delta\zeta+\frac{(\Delta\xi)^2+(\Delta v)^2+(\Delta\zeta)^2}{2r_0}-\frac{\varrho^2}{2r_0},$$

und wenn man der Kürze wegen $\Delta\xi\cos\alpha+\Delta v\cos\beta+\Delta\zeta\cos\gamma=\varepsilon$ setzt:

$$\varrho = \varepsilon+\frac{(\Delta\xi)^2+(\Delta v)^2+(\Delta\zeta)^2}{2r_0}-\frac{\varrho^2}{2r_0},$$

mithin

$$\Sigma m\varrho f(r_0)+\Sigma\frac{m\varrho^2}{2}f'(r_0)=\Sigma m\varepsilon f(r_0)+\Sigma m.\frac{(\varDelta\xi)^2+(\varDelta v)^2+(\varDelta\zeta)^2}{2r_0}f(r_0)$$
$$+\Sigma\frac{m\varrho^2}{2}\left(f'(r_0)-\frac{f(r_0)}{r_0}\right),$$

und da $f'(r_0)-\frac{f(r_0)}{r_0}=r_0\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}f(r_0)\right)=F(r_0)$:

$$\Sigma m\varrho f(r_0)+\Sigma\frac{m\varrho^2}{2}f'(r_0)=\Sigma m\varepsilon f(r_0)+\Sigma m.\frac{(\varDelta\xi)^2+(\varDelta v)^2+(\varDelta\zeta)^2}{2r_0}f(r_0)$$
$$+\Sigma\frac{m\varrho^2}{2}F(r_0).$$

Wir setzen voraus, die in §. III. erklärte Symmetrie der Anordnung bestehe im ersten Zustande, so dass die Summen, welche ungerade Potenzen der Cosinus enthalten, in Wegfall kommen. Die Entwickelung der Grössen $\varDelta\xi, \varDelta v, \varDelta\zeta$ wird jetzt, da die ersten Dimensionen wegfallen werden, bis zur zweiten gehen müssen in Bezug auf die Differentialquotienten $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, u. s. w. Daraus folgt zunächst:

$$\varepsilon=r_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\xi}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\alpha$$
$$+r_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\beta$$
$$+r_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\gamma,$$

wo man die nächste Dimension nicht schreiben wird, indem sie immer ungerade Potenzen der Cosinus enthalten würde. Daraus folgt (§. IV.):

$$\Sigma m\varepsilon f(r_0)=0.$$

Ferner ist

$$(\varDelta\xi)^2+(\varDelta v)^2+(\varDelta\zeta)^2=r^2\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\cos^2\alpha+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\cos^2\beta+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2\cos^2\gamma\right.$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\cos^2\alpha+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\cos^2\beta+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\cos^2\gamma$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\cos^2\alpha+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\cos^2\beta+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\cos^2\gamma+\ldots\right],$$

wo die noch hinzuzufügenden Glieder wieder ungerade Potenzen enthalten.

so ist:

$$\Sigma m.\frac{(\Delta\xi)^2+(\Delta v)^2+(\Delta\zeta)^2}{2r_0}f(r_0)=0.$$

dlich ist nun:

$$=\varepsilon^2=(\Delta\xi)^2\cos^2\alpha+(\Delta v)^2\cos^2\beta+(\Delta\zeta)^2\cos^2\gamma+2\Delta\xi\Delta v\cos\alpha\cos\beta$$
$$+2\Delta\xi\Delta\zeta\cos\alpha\cos\gamma+2\Delta v\Delta\zeta\cos\beta\cos\gamma;$$

tzt man hier für $\Delta\xi$, Δv, $\Delta\zeta$ ihre Werthe (§. III.), so ergiebt ch endlich:

$$\frac{m}{2}\varrho^2F(r_0)=L_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+R_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+Q_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2+R_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$
$$+M_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+Q_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+N_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2$$
$$2R_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+2Q_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]+2P_0\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right].$$

mit ist die von der Verschiebung von M herrührende Wirungsgrösse:

$$\left\{L_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+R_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+Q_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2+R_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+M_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$+Q_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+N_0\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2$$
$$\left.2R_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+2Q_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]+2P_0\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]\right\}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit den Formeln (18), so überzeugt man sich leicht, dass die so eben erhaltene Grösse gleich

$$\frac{M}{\delta_0}\left[A\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+B'\frac{\partial v}{\partial y_0}+C''\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}+B\left(\frac{\partial v}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y_0}\right)+C\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial z_0}\right)\right.$$
$$\left.+C'\left(\frac{\partial v}{\partial z_0}+\frac{\partial\zeta}{\partial y_0}\right)\right]$$

st. Somit ist die Gesammtarbeit der inneren Kräfte:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\frac{M}{\delta_0}\Big[A\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+B'\frac{\partial v}{\partial y_0}+C''\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}+B\left(\frac{\partial v}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y_0}\right)\\+C\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial z_0}\right)+C'\left(\frac{\partial v}{\partial z_0}+\frac{\partial\zeta}{\partial y_0}\right)\Big].\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

Ist der neue Zustand abermals der eines Gleichgewichts, so ist diese Grösse gleich der Gesammtarbeit der äusseren Kräfte.

XIII.

Andere Form der Gleichungen des Gleichgewichts in §. III.

Begnügt man sich mit den Gleichungen (7′) in §. III., was wohl in den meisten Fällen Statt finden wird, so kann man, unter Bezugnahme auf die Formeln (18), diesen Gleichungen eine etwas veränderte Form geben, die zuweilen nicht ohne Nutzen ist.

Seien x, y, z die Koordinaten des Punktes M im neuen Zustande; x_0, y_0, z_0 im frühern, so ist

$$x=x_0+\xi,\quad y=y_0+v,\quad z=z_0+\zeta,$$

und man kann die höhern Dimensionen von $\frac{\partial\xi}{\partial x_0}$ u. s. w. vernachlässigen. Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_0}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_0},$$

da ξ, v, ζ offenbar Funktionen von x, y, z sein werden und x, y, z von x_0, y_0, z_0 abhängen. Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}=1+\frac{\partial\xi}{\partial x_0},\quad \frac{\partial y}{\partial x_0}=\frac{\partial v}{\partial x_0},\quad \frac{\partial z}{\partial x_0}=\frac{\partial\zeta}{\partial x_0};$$

mithin:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_0}=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y_0}=\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y_0}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial y_0},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial z_0}=\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial z_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z_0}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}.$$

Zieht man hieraus die Werthe von

$$\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial z}$$

und vernachlässigt, wie angegeben, so findet man:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x_0},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y_0},\quad \frac{\partial\xi}{\partial z}=\frac{\partial\xi}{\partial z_0}.$$

ben so

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y_0}$$

. s. w., d. h. man darf in den frühern Formeln die Differentiatio-
en nach den anfänglichen Koordinaten des Punktes M durch die
ach den spätern ersetzen.

Ist nun der anfängliche Zustand der des natürlichen Gleich-
ewichts und man beachtet die Formeln der §§. III., IV., VII., so
rgeben sich statt der Gleichungen (7'):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \delta X = 0, \\ &\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z} + \delta Y = 0, \\ &\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C'}{\partial y} + \frac{\partial C''}{\partial z} + \delta Z = 0, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

wo x, y, z die Koordinaten des betreffenden Punktes im neuen
Zustande, δ die Dichte des Körpers in demselben Punkte eben-
falls im neuen Gleichgewichtszustande bedeutet.

XIV.

Aufstellung der Gleichungen der Bewegung, immer unter der Voraussetzung des §. III.

Nach dem, was in §. III. gesagt wurde, werden unter den dort
gemachten Voraussetzungen, wenn man von irgend einem Gleich-
gewichtszustande ausgeht, in welchem die dort angeführten Be-
dingungen der Symmetrie der Anordnung Statt finden, und wenn
X, Y, Z wieder die auf die Einheit der Masse bezogenen, erst
neu (zur Erzeugung der Bewegung) hinzugetretenen äussern Kräfte
sind, die Gleichungen der Bewegung des Punktes M sein:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= (G+L)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+(H+R)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+(J+Q)\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2Q\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{G})\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{M})\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4}+(\mathfrak{C}+\mathfrak{L})\frac{\partial^4\xi}{\partial z^4}\\
&\quad+(\mathfrak{F}+6\mathfrak{Q})\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial y^2}+(\mathfrak{E}+6\mathfrak{G})\frac{\partial^4\xi}{\partial x^2\partial z^2}+(\mathfrak{D}+\mathfrak{Q})\frac{\partial^4\xi}{\partial y^2\partial z^2}+4\mathfrak{P}\frac{\partial^4 v}{\partial x^3\partial y}+4\mathfrak{M}\frac{\partial^4 v}{\partial x\partial y^3}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4 v}{\partial x\partial y\partial z^2}\\
&\quad+4\mathfrak{O}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^3\partial z}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x\partial y^2\partial z}+4\mathfrak{L}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x\partial z^3}+X,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (H+M)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(G+R)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(J+P)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+2P\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{H})\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{P})\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+(\mathfrak{C}+\mathfrak{K})\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}\\
&\quad+(\mathfrak{F}+6\mathfrak{M})\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}+(\mathfrak{D}+6\mathfrak{N})\frac{\partial^4 v}{\partial y^2\partial z^2}+(\mathfrak{E}+\mathfrak{Q})\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial z^2}+4\mathfrak{M}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial y^3}+4\mathfrak{P}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^3\partial y}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial y\partial z^2}\\
&\quad+4\mathfrak{N}\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^3\partial z}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y\partial z}+4\mathfrak{K}\frac{\partial^4\zeta}{\partial y\partial z^3}+Y,\\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= (J+N)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+(H+P)\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+(G+Q)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2P\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+2Q\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z}+(\mathfrak{C}+\mathfrak{J})\frac{\partial^4\zeta}{\partial z^4}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{N})\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{O})\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}\\
&\quad+(\mathfrak{D}+6\mathfrak{K})\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^2\partial z^2}+(\mathfrak{E}+6\mathfrak{L})\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial z^2}+(\mathfrak{F}+\mathfrak{Q})\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+4\mathfrak{K}\frac{\partial^4 v}{\partial y\partial z^3}+4\mathfrak{N}\frac{\partial^4 v}{\partial y^3\partial z}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y\partial z}\\
&\quad+4\mathfrak{L}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial z^3}+2\mathfrak{Q}\frac{\partial^4\xi}{\partial x\partial y^2\partial z}+4\mathfrak{O}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^3\partial z}+Z.
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Begnügt man sich mit demselben Grade der Näherung, wie in (7′); so hat man:

(27')

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=(G+L)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+(H+R)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+(J+Q)\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial y}+2Q\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial z}+X,$$

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}=(H+M)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}+(G+R)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+(J+P)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}+2R\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+2P\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y\partial z}+Y,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=(J+N)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}+(H+P)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}+(G+Q)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+2P\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y\partial z}+2Q\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial z}+Z.$$

Ehe wir zur allgemeinen Integration dieser Gleichungen schreiten, wollen wir zwei besondere interessante Fälle betrachten. (Wir bemerken übrigens, dass, wenn der anfängliche Gleichgewichtszustand der natürliche war, man den Koeffizienten $\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{Q}$, so wie x, y, z den Zeiger 0 anzuhängen und (9) zu beachten hat. Im allgemeinern Falle können x, y, z die Koordinaten im anfänglichen Zustande von M oder in einem spätern sein, gemäss §. XIII.; besser ist es aber immer, das Erstere zu wählen.)

XV.

Schwingungen einer geradlinigen gespannten Saite.

Wir denken uns (Taf. VI. Fig. 4.) eine durchaus gleich dicke und überall gleich gespannte Saite vom Gewichte p, deren Länge l und deren Querschnitt ϖ sei, im natürlichen Zustande eine Gerade bildend. Dieselbe sei in A befestigt und in B durch ein Gewicht P gespannt. Unter der Wirkung von P trete nun ein neuer Gleichgewichtszustand ein.

Es ist leicht einzusehen, dass man nahezu die Saite als eine gerade Linie von Molekülen ansehen kann (wenigstens gelten die nachfolgenden Resultate nur unter dieser Voraussetzung), so dass in §. III. (6), wenn man sich mit (7') genügt: $\alpha_0=0$, $\beta_0=\gamma_0=90^\circ$, wobei AB als Abscissenaxe, A als Anfangspunkt gewählt ist. Daraus folgt $H_0=J_0=N_0=M_0=P_0=Q_0=R_0=0$. Vernachlässigt man die fremden Kräfte, so geben also die (7'), wenn man zugleich beachtet, dass G_0 (§. IV.):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial {x_0}^2}=0, \quad \xi=ax_0+b,$$

während υ, ζ gar nicht vorhanden sind. Da für $x_0=0$ auch $\xi_0=0$, indem A unveränderlich befestigt ist, so ist $b=0$, also $\xi=ax_0$. Die Pressungen sind (§. VIII.), da $\frac{\partial \xi}{\partial x_0}=a$:

$$A=\delta_0 a L_0,\quad B=0,\quad C=0,\quad B'=0,\quad C'=0,\quad C''=0.$$

Es herrscht also in der ganzen Saite die Pressung (Spannung) $a\delta_0 L_0$, gerichtet nach AB hin. Daraus folgt, dass in B, wo die Spannung $\frac{P}{\varpi}$ herrscht, man habe $a\delta_0 L_0=\frac{P}{\varpi}$, so dass mithin

$$L_0=\frac{P}{\varpi a\delta_0}.$$

Nun ist aber $\varpi\delta_0 lg=p$, wo g die Beschleunigung der Schwerkraft, also $\delta_0=\frac{p}{\varpi lg}$, mithin

$$L_0=\frac{Plg}{ap}.$$

Was die Grösse a anbelangt, so ist nach §. VI.: $\Theta=\frac{\partial\xi}{\partial x_0}=a$, also ist a die lineare Verlängerung der Längeneinheit; ist mithin α die ganze Verlängerung der Saite, so ist $\alpha=al$, $a=\frac{\alpha}{l}$, also endlich

$$L_0=\frac{Pl^2g}{\alpha p}. \tag{a}$$

Man nehme nun an, es treten in dem neuen Gleichgewichtszustande kleine Verschiebungen ein, wodurch Bewegungen der Moleküle der Saite veranlasst werden, so hat man, wenn man wieder alle fremden Kräfte vernachlässigt und bloss (27′) beibehält:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=(G+L)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=G\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=G\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2};$$

$$G=\tfrac{1}{2}\Sigma mrf(r),\quad L=\tfrac{1}{2}\Sigma mr^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}f(r)\right).$$

Nun ist $r=r_0+ar_0$, also

$$\Sigma mrf(r)=\Sigma mr_0 f(r_0)+a\Sigma mr_0\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0 f(r_0))=a\Sigma mr_0\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0 f(r_0))$$

(nach §. IV.). Somit

$$G=\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0 f(r_0))=\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0^2 f'(r_0)+\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0 f(r_0)=\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0^2 f'(r_0).$$

$$L=\tfrac{1}{2}\Sigma mr^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}f(r)\right)=\tfrac{1}{2}\Sigma mr^3\left(\frac{rf'(r)-f(r)}{r^2}\right)=\tfrac{1}{2}\Sigma mr^2f'(r)-\tfrac{1}{2}\Sigma mrf(r)$$

$$=\tfrac{1}{2}\Sigma mr_0^2f'(r_0)+\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0^2f'(r_0))-\tfrac{1}{2}\Sigma mr_0f(r_0)$$

$$-\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0f(r_0))=\tfrac{1}{2}\Sigma mr_0^2f'(r_0)+\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0(2r_0f'(r_0)+r_0^2f''(r_0))$$

$$-\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0^2f'(r_0)-\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0f(r_0)=\frac{G}{a}+2G+\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0^3f''(r_0)-G$$

$$=\frac{G}{a}+G+\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0^3f''(r_0).$$

Nun ist aber

$$L_0=\tfrac{1}{2}\Sigma mr_0^3\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}f(r_0)\right)=\tfrac{1}{2}\Sigma mr_0^2f'(r_0)-\tfrac{1}{2}\Sigma mr_0f(r_0)$$

$$=\tfrac{1}{2}\Sigma mr_0^2f'(r_0)=\frac{Pl^2g}{\alpha p},$$

demnach

$$G=\tfrac{1}{2}a\Sigma mr_0^2f'(r_0)=aL_0=\frac{\alpha}{l}L_0=\frac{Plg}{p},$$

und wenn man $a\Sigma mr_0^3f''(r_0)$ vernachlässigt:

$$L=G\left(\frac{a+1}{a}\right)=\frac{Plg}{p}\cdot\frac{\alpha+l}{\alpha},\quad L+G=\frac{Plg}{p}\left(2+\frac{l}{\alpha}\right);$$

da $\frac{l}{\alpha}$ sehr gross ist, so ist nahezu $L+G=\frac{Pl^2g}{\alpha p}$; also sind endlich die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{Pl^2g}{\alpha p}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{Plg}{p}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\frac{Plg}{p}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2},\quad (28)$$

wie bekannt. (Vergleiche Poisson Mechanik. II. §. 483.)

XVI.

Schwingungen einer elastischen Ebene.

Wir denken uns eine begränzte Ebene, welche eine einzige Lage von Molekülen bilde; sie sei zur Ebene der xy gewählt. Sie werde an ihrem äusseren Umfange durch eine überall in der Richtung der Ebene und senkrecht auf demselben gleiche Kraft, die (auf die Einheit der Fläche des Querschnitts bezogen) gleich F sei, gespannt. In diesem Falle wird die fragliche Ebene nahezu das bilden, was man eine elastische Membrane (elastische Ebene) zu nennen pflegt. Man hat hier offenbar, wenn man vom natür-

lichen Gleichgewichte ausgeht, die fremden Kräfte vernachlässigt und einen neuen Gleichgewichtszustand voraussetzt: $\gamma_0=90^0$, also $N_0=0$, $P_0=Q_0=0$ und immer $G_0=H_0=J_0=0$; ferner, wenn man die Membrane als isotrop annimmt (§. XI.): $L_0=M_0=3R_0$, so dass die (7') sind:

$$3\frac{\partial^2\xi}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y_0^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x_0\partial y_0}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2}+3\frac{\partial^2 v}{\partial y_0^2}+2\frac{\partial^2\xi}{\partial x_0\partial y_0}=0. \quad \text{(a)}$$

Die Grösse ζ kommt nicht vor, ist natürlich auch gar nicht vorhanden. Die Pressungen geben:

$$A=\delta_0 R_0\left[3\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+\frac{\partial v}{\partial y_0}\right],\quad B=\delta_0 R_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial y_0}+\frac{\partial v}{\partial x_0}\right],$$

$$C=0,\quad B'=\delta_0 R_0\left[\frac{\partial\xi}{\partial x_0}+3\frac{\partial v}{\partial y_0}\right],\quad C'=0,$$

$$A'=B,\quad A''=0,\quad B''=0,\quad C''=0.$$

Bei der vorausgesetzten Gleichheit der spannenden Kraft muss, indem $A'=B$ ist, auch $A=B'$ sein, d. h. man muss haben:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_0}=\frac{\partial v}{\partial y_0},\ \text{mithin}\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x_0\partial y_0}=\frac{\partial^2 v}{\partial y_0^2},\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x_0^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x_0\partial y_0},$$

wodurch die Gleichungen (a) geben:

$$5\frac{\partial^2\xi}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y_0^2}=0,\quad 5\frac{\partial^2 v}{\partial y_0^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\left[5\frac{\partial v}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y_0}\right]=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_0}\left[5\frac{\partial\xi}{\partial y_0}+\frac{\partial v}{\partial x_0}\right]=0.$$

Mithin darf in $5\frac{\partial v}{\partial x_0}+\frac{\partial\xi}{\partial y_0}$ kein y_0, in $5\frac{\partial\xi}{\partial y_0}+\frac{\partial v}{\partial x_0}$ kein x_0 vorkommen, d. h. es müssen $\frac{\partial\xi}{\partial y_0}$ und $\frac{\partial v}{\partial x_0}$ von x_0 und y_0 unabhängig sein, oder man hat $\frac{\partial\xi}{\partial y_0}=a$, $\frac{\partial v}{\partial x_0}=b$, mithin: $\xi=ay_0+\varphi(x_0)$, $v=bx_0+\psi(y_0)$, wo φ und ψ willkührliche Funktionen sind. Daraus folgt $\frac{\partial\xi}{\partial x_0}=\varphi'(x_0)$, $\frac{\partial v}{\partial y_0}=\psi'(y_0)$, also da $\frac{\partial\xi}{\partial x_0}=\frac{\partial v}{\partial y_0}$: $\varphi'(x_0)=\psi'(y_0)=c$, $\varphi(x_0)=cx_0+\alpha$, $\psi'(y_0)=cy_0+\beta$, wo α und β Null sein werden, wenn der Anfangspunkt ein fester Punkt ist. Also endlich: $\xi=ay_0+cx_0+\alpha$, $v=bx_0+cy_0+\beta$. Daraus nun:

$A=\delta_0 R_0.4c$, $B=\delta_0 R_0(a+b)$, $C=0$, $A'=\delta_0 R_0(a+b)$, $B'=\delta_0 R_0.4c$.

Für die Axe der x ist gewiss $B=0$, also allgemein $a=-b$, so dass

$$\xi = ay_0 + cx_0 + \alpha, \quad v = -ax_0 + cy_0 + \beta.$$

Endlich ist, wegen der Umfangspressung, in der Axe der x: $A=F$, also $4c\delta_0 R_0 = F$.

Nehmen wir nun an, die elastische Membrane wird in dem neuen Zustande in transversale Schwingungen versetzt, so hat man ($\xi = v = 0$):

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = G\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right), \quad G = \tfrac{1}{2}\Sigma m r^2 \mathfrak{F}(r) \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}\Sigma m \frac{f(r)}{r} \Delta x^2,$$

da $J=N=P=Q=0$ ist.

Setzen wir oben α, β der Einfachheit wegen gleich Null voraus, so ist

$$x = x_0 + cx_0 + ay_0, \quad y = y_0 - ax_0 + cy_0,$$

also

$$\Delta x = \Delta x_0 + c\Delta x_0 + a\Delta y_0, \quad \Delta y = \Delta y_0 - a\Delta x_0 + c\Delta y_0,$$

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x_0^2 + \Delta y_0^2 + 2\Delta x_0(c\Delta x_0 + a\Delta y_0) + 2\Delta y_0(c\Delta y_0 - a\Delta x_0)$$
$$= r_0^2 + 2cr_0^2, \quad r = r_0 + cr_0 = (1+c)r_0,$$

wenn man die höhern Potenzen von a und c vernachlässigt. Also:

$$G = \tfrac{1}{2}\Sigma m \frac{f(r)}{r}\Delta x^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m \frac{f(r_0+cr_0)}{r_0+cr_0}(\Delta x_0 + c\Delta x_0 + a\Delta y_0)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\frac{f(r_0)}{r_0} + \frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}f(r_0)\right)\cdot cr_0\right][\Delta x_0^2 + 2\Delta x_0(a\Delta y_0 + c\Delta x_0)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma m \frac{f(r_0)}{r_0}\{\Delta x_0^2 + 2c\Delta x_0^2 + 2a\Delta x_0 \Delta y_0\}$$
$$+ \frac{c}{2}\Sigma m r_0 \frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}f(r_0)\right)\{\Delta x_0^2 + 2c\Delta x_0^2 + 2a\Delta x_0\Delta y_0\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma m r_0 f(r_0)\cos^2\alpha_0 + c\Sigma m r_0 f(r_0)\cos^2\alpha_0 + a\Sigma m r_0 f(r_0)\cos\alpha_0\cos\beta^0$$
$$+ \frac{c}{2}\Sigma m r_0^2 F(r_0)\cos^2\alpha_0 = \frac{c}{2}\Sigma m r_0^2 F(r_0)\cos^2\alpha_0 \quad (\S.\ \text{IV., III.})$$
$$= \frac{c}{2}\Sigma m r_0^2 F(r_0)\cos^2\alpha_0(\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0) = \frac{c}{2}\Sigma m r_0^2 F(r_0)\cos^4\alpha_0$$
$$+ \frac{c}{2}\Sigma m r_0^2 F(r_0)\cos^2\alpha_0\cos^2\beta_0 = c[3R_0 + R_0] = 4cR_0 = \frac{F}{\delta_0},$$

also endlich die Gleichung der Transversalschwingungen:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{F}{\delta_0}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right). \qquad (2$$

XVII.

Allgemeine Integration der Gleichungen der Bew gung (27), unter der Voraussetzung, X, Y, Z seien Nı

Sei $\varphi(u) = A\cos u + B\sin u$, wo A und B willkührliche K stanten sind, so genügt man den Gleichungen (27), wenn man set

$$\xi = \cos\alpha.\varphi(ax+by+cz+Kt),\quad v = \cos\beta.\varphi(ax+by+cz+Kt),$$

$$\zeta = \cos\gamma.\varphi(ax+by+cz+Kt).$$

Setzt man diese Werthe, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
K^2\cos\alpha = {} & (G+L)a^2\cos\alpha + (H+R)b^2\cos\beta + (J+Q)c^2\cos\alpha \\
& + 2Rab\cos\beta + 2Qac\cos\gamma + (\mathfrak{A}+\mathfrak{G})a^4\cos\alpha \\
& + (\mathfrak{B}+\mathfrak{M})b^4\cos\alpha + (\mathfrak{C}+\mathfrak{L})c^4\cos\alpha + (\mathfrak{F}+6\mathfrak{P})a^2b^2\cos\alpha \\
& + (\mathfrak{E}+6\mathfrak{O})a^2c^2\cos\alpha + (\mathfrak{D}+\mathfrak{Q})b^2c^2\cos\alpha + 4\mathfrak{P}a^3b\cos\beta \\
& + 4\mathfrak{M}ab^3\cos\beta + 2\mathfrak{Q}abc^2\cos\beta + 4\mathfrak{O}a^3c\cos\gamma \\
& + 2\mathfrak{Q}ab^2c\cos\gamma + 4\mathfrak{L}ac^3\cos\gamma, \\
K^2\cos\beta = {} & (H+M)b^2\cos\beta + (G+R)a^2\cos\beta + (J+P)c^2\cos\beta \\
& + 2Rab\cos\alpha + 2Pbc\cos\gamma + (\mathfrak{B}+\mathfrak{H})b^4\cos\beta \\
& + (\mathfrak{A}+\mathfrak{P})a^4\cos\beta + (\mathfrak{C}+\mathfrak{K})c^4\cos\beta + (\mathfrak{F}+6\mathfrak{M})a^2b^2\cos\beta \\
& + (\mathfrak{D}+6\mathfrak{N})b^2c^2\cos\beta + (\mathfrak{E}+\mathfrak{Q})a^2c^2\cos\beta + 4\mathfrak{M}ab^3\cos\alpha \\
& + 4\mathfrak{P}a^3b\cos\alpha + 2\mathfrak{Q}abc^2\cos\alpha + 4\mathfrak{N}b^3c\cos\gamma \\
& + 2\mathfrak{Q}a^2bc\cos\gamma + 4\mathfrak{K}bc^3\cos\gamma, \\
K^2\cos\gamma = {} & (J+N)c^2\cos\gamma + (H+P)b^2\cos\gamma + (G+Q)a^2\cos\gamma \\
& + 2Pbc\cos\beta + 2Qac\cos\alpha + (\mathfrak{C}+\mathfrak{J})c^4\cos\gamma \\
& + (\mathfrak{B}+\mathfrak{N})b^4\cos\gamma + (\mathfrak{A}+\mathfrak{O})a^4\cos\gamma + (\mathfrak{D}+6\mathfrak{K})b^2c^2\cos\gamma \\
& + (\mathfrak{E}+6\mathfrak{L})a^2c^2\cos\gamma + (\mathfrak{F}+\mathfrak{Q})a^2b^2\cos\gamma + 4\mathfrak{K}bc^3\cos\beta \\
& + 4\mathfrak{N}b^3c\cos\beta + 2\mathfrak{Q}a^2bc\cos\beta + 4\mathfrak{L}ac^3\cos\alpha \\
& + 2\mathfrak{Q}ab^2c\cos\alpha + 4\mathfrak{O}a^3c\cos\alpha.
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Man setze zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l}
(G+L)a^2+(H+R)b^2+(J+Q)c^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{G})a^4+(\mathfrak{B}+\mathfrak{M})b^4 \\
\qquad +(\mathfrak{C}+\mathfrak{L})c^4+(\mathfrak{F}+6\mathfrak{P})a^2b^2+(\mathfrak{E}+6\mathfrak{O})a^2c^2 \\
\qquad +(\mathfrak{D}+\mathfrak{Q})b^2c^2=A, \\
(G+R)a^2+(H+M)b^2+(J+P)c^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{P})a^4+(\mathfrak{B}+\mathfrak{H})b^4 \\
\qquad +(\mathfrak{C}+\mathfrak{K})c^4+(\mathfrak{F}+6\mathfrak{M})a^2b^2+(\mathfrak{D}+6\mathfrak{N})b^2c^2 \\
\qquad +(\mathfrak{E}+\mathfrak{Q})a^2c^2=B, \\
(G+Q)a^2+(H+P)b^2+(J+N)c^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{O})a^4+(\mathfrak{B}+\mathfrak{N})b^4 \\
\qquad +(\mathfrak{C}+\mathfrak{J})c^4+(\mathfrak{D}+6\mathfrak{K})b^2c^2+(\mathfrak{E}+6\mathfrak{L})a^2c^2 \\
\qquad +(\mathfrak{F}+\mathfrak{Q})a^2b^2=C, \\
Pbc+4\mathfrak{K}bc^3+4\mathfrak{N}b^3c+2\mathfrak{Q}a^2bc=D, \\
Qac+4\mathfrak{O}a^3c+2\mathfrak{Q}ab^2c+4\mathfrak{L}ac^3=E, \\
Rab+4\mathfrak{P}a^3b+4\mathfrak{M}ab^3+2\mathfrak{Q}abc^2=F;
\end{array}\right\} \quad (31)$$

o heissen die Gleichungen (30):

$$\left.\begin{array}{l}
K^2\cos\alpha = A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma, \\
K^2\cos\beta = B\cos\beta + F\cos\alpha + D\cos\gamma, \\
K^2\cos\gamma = C\cos\gamma + D\cos\beta + E\cos\alpha.
\end{array}\right\} \quad (30')$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{l}
(A-K^2)(B-K^2)(C-K^2)-D^2(A-K^2)-E^2(B-K^2) \\
\qquad -F^2(C-K^2)+2DEF=0, \\
\dfrac{\cos\alpha}{DF-E(B-K^2)}=\dfrac{\cos\beta}{EF-D(A-K^2)}=\dfrac{\cos\gamma}{(A-K^2)(B-K^2)-F^2} \\
=\dfrac{\pm 1}{[\{DF-E(B-K^2)\}^2+\{EF-D(A-K^2)\}^2+\{(A-K^2)(B-K^2)-F^2\}^2]^{\frac{1}{2}}}
\end{array}\right\} \quad (32)$$

wenn man setzt $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, was wir zum Voraus annahmen.

Die erste dieser Gleichungen ist auch:

$$\left.\begin{array}{l}
K^6-(A+B+C)K^4+(AB+BC+AC-D^2-E^2-F^2)K^2 \\
\qquad -ABC+AD^2+BE^2+CF^2-2DEF=0,
\end{array}\right\} \quad (32')$$

und giebt immer drei reelle Wurzeln für K^2.

Da, wie aus der Natur der Sache folgt, die mit den deutschen Buchstaben in (6) bezeichneten Grössen ($\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{Q}$) immer sehr

klein sind im Verhältniss zu den andern $(G, \ldots, Q)$, so werden die Werthe von $A, \ldots, F$ vorzugsweise von letztern abhängen. Die Grössen A, B, C sind immer positiv, wenn man für a, b, c nur reelle Werthe wählt, was wir voraussetzen wollen. Alsdann folgt aus (32'), dass die Summe der drei Werthe von K^2 positiv, gleich $A+B+C$ ist, so dass diese drei Werthe nicht sämmtlich negativ werden können. Auf eine nähere Untersuchung dieser Wurzeln in gerade dieser Beziehung wollen wir uns für den Augenblick nicht einlassen, da es in der Natur dieser gewiss periodischen Bewegungen liegt, dass die Werthe von K reell seien. Sind nun K_1^2, K_2^2, K_3^2 die drei Wurzeln von (23'), so hat also K die sechs Werthe:

$$+K_1, \ -K_1, \ +K_2, \ -K_2, \ +K_3, \ -K_3,$$

wobei aber zu $\pm K_1$ u. s. w. dieselben α, β, γ gehören. Bezeichnet man also die zu $\pm K_1$ gehörigen Werthe von α, β, γ mit α_1, β_1, γ_1, u. s. f., so übersieht man leicht, dass man haben werde:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \sum_{n=1}^{n=3} \cos\alpha_n [\varphi_n(ax+by+cz+K_n t) + \psi_n(ax+by+cz-K_n t)], \\
v &= \sum_{n=1}^{n=3} \cos\beta_n [\varphi_n(ax+by+cz+K_n t) + \psi_n(ax+by+cz-K_n t)], \\
\zeta &= \sum_{n=1}^{n=3} \cos\gamma_n [\varphi_n(ax+by+cz+K_n t) + \psi_n(ax+by+cz-K_n t)],
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

worin

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(ax+by+cz+K_n t) \\
&= A_n \cos(ax+by+cz+K_n t) + B_n \sin(ax+by+cz+K_n t), \\
&\psi_n(ax+by+cz-K_n t) \\
&= C_n \cos(ax+by+cz-K_n t) + D_n \sin(ax+by+cz-K_n t),
\end{aligned}$$

und das Zeichen Σ bedeutet, man solle die Summe derjenigen Grössen nehmen, die man erhält, wenn man $n=1, 2, 3$ setzt. Die Grössen A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3 bleiben ganz willkührlich. Die zweiten Seiten der Gleichungen (33) bestehen also jeweils aus zwölf Gliedern mit zwölf willkührlichen Grössen, ausser den ebenfalls willkührlichen a, b, c. Ehe wir weiter gehen, wollen wir zur Gleichung (32') zurückkehren.

XVIII.

Untersuchung der Gleichung (32').

Diese Gleichung wird lauter gleiche Werthe für K^2 liefern, wenn

$$A=B=C,\quad D=E=F=0.$$

Damit $D=E=F=0$ sei, müssen, bei der Kleinheit des einen Theils der Koeffizienten in (6) gegenüber dem andern: $P=Q=R=0$ sein, was jedoch nie der Fall sein kann. Somit hat diese Gleichung, bei beliebigen Werthen von a, b, c, nie drei gleiche Wurzeln.

Für den Fall, dass der Körper isotrop ist, hat man:

$$G=H=J,\quad L=M=N,\quad P=Q=R,\quad \mathfrak{A}=\mathfrak{B}=\mathfrak{C},\quad \mathfrak{D}=\mathfrak{E}=\mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}=\mathfrak{J},\quad \mathfrak{K}=\mathfrak{L}=\mathfrak{M}=\mathfrak{N}=\mathfrak{O}=\mathfrak{P},\quad L=3P,\quad \mathfrak{D}=2\mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{G}=5\mathfrak{K},\quad \mathfrak{Q}=2\mathfrak{K}.$$

Daraus folgt leicht, wenn man

$$a^2+b^2+c^2=r^2$$

setzt:

$$A=(G+P)r^2+2Pa^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})r^4+4\mathfrak{K}a^2r^2,$$

$$B=(G+P)r^2+2Pb^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})r^4+4\mathfrak{K}b^2r^2,$$

$$C=(G+P)r^2+2Pc^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})r^4+4\mathfrak{K}c^2r^2,$$

$$D=2Pbc+4\mathfrak{K}bcr^2,\quad E=2Pac+4\mathfrak{K}acr^2,\quad F=2Pab+4\mathfrak{K}abr^2.$$

Setzt man $(G+P)r^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})r^4=S$, $2P+4\mathfrak{K}r^2=T$, so ist also

$$A=S+Ta^2,\ B=S+Tb^2,\ C=S+Tc^2,\ D=Tbc,\ E=Tac,\ F=Tab,$$

mithin die (32′):

$$(S+Ta^2-K^2)(S+Tb^2-K^2)(S+Tc^2-K^2)-T^2b^2c^2(S+Ta^2-K^2)$$
$$-T^2a^2c^2(S+Tb^2-K^2)-T^2a^2b^2(S+Tc^2-K^2)+2T^3a^2b^2c^2=0;$$

d. h.

$$(S-K^2)^3+(S-K^2)^2Ta^2+(S-K^2)^2Tb^2+(S-K)^2Tc^2$$
$$+(S-K^2)\,T^2a^2b^2+(S-K^2)\,T^2a^2c^2+(S-K^2)\,T^2b^2c^2+T^3a^2b^2c^2$$
$$-(S-K^2)\,T^2b^2c^2-T^3a^2b^2c^2-(S-K^2)\,T^2a^2c^2-T^3a^2b^2c^2$$
$$-(S-K^2)\,T^2a^2b^2-T^3a^2b^2c^2+2T^3a^2b^2c^2=0,$$

d. h.

$$(S-K^2)^3+(S-K^2)^2Tr^2=0 \text{ oder } (S-K^2)^2[S-K^2+Tr^2]=0,$$

d. h. endlich die (32′) ist:

$$[(G+P)r^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})r^4-K^2]^2[(G+3P)r^2+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})r^4-K^2]=0$$

sie hat mithin zwei gleiche Wurzeln:

$$\left.\begin{array}{l} K_1^2 = K_2^2 = (G+P)r^2 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})r^4, \\ \text{und eine ungleiche:} \\ K_3^2 = (G+3P)r^2 + (\mathfrak{A}+5\mathfrak{B})r^4. \end{array}\right\} \quad (34)$$

Man weiss, dass die durch die Gleichungen (32) bestimmten drei Richtungen auf einander senkrecht stehen. Konstruirt man übrigens das Ellipsoid:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = 1, \quad (35)$$

so sind $\frac{1}{K_1}$, $\frac{1}{K_2}$, $\frac{1}{K_3}$ die Längen seiner Hauptaxen und die Gleichungen (32) geben die Richtungen derselben. Für den Fall eines isotropen Körpers sind die zwei ersten Hauptaxen einander gleich, ihre Richtung willkührlich in der auf der dritten Axe senkrechten Ebene. Wirklich ergiebt sich auch, dass die zweiten Gleichungen (32) unbestimmt werden, wenn man für K^2 die Werthe K_1^2, K_2^2 aus (34) setzt, dagegen bestimmte Werthe liefern, wenn man $K^2 = K_3^2$ setzt.

XIX.

Ebene Wellen. Fortpflanzungs-Geschwindigkeit. Oszillationsdauer. Polarisations-Richtungen.

Wegen der linearen Form der Gleichungen (27) genügt schon eines der durch (33) ausgedrückten Systeme denselben. Stellen wir dasselbe so dar:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = [\varphi(ax+by+cz+Kt) + \psi(ax+by+cz-Kt)]\cos\alpha, \\ v = [\varphi(ax+by+cz+Kt) + \psi(ax+by+cz-Kt)]\cos\beta, \\ \zeta = [\varphi(ax+by+cz+Kt) + \psi(ax+by+cz-Kt)]\cos\gamma, \end{array}\right\} \quad (35)$$

so stellen diese Gleichungen eine Elementarbewegung oder, wie wir sagen wollen, eine Elementarwelle dar. Dabei ist K dreifach, eben so wie α, β, γ; diese Werthe hängen übrigens von a, b, c ab. Aber eben wegen der linearen Form der Gleichungen (27) wird man für a, b, c alle möglichen reellen Werthe wählen können, wo dann zu jedem solchen Systeme von Werthen für a, b, c drei Formen wie (35) gehören. Alle so erhaltenen (dreifach unendlich vielen) Formen genügen in ihrer Summe ebenfalls den (27) und stellen das allgemeine Integral dieser Gleichungen vor.

Betrachten wir nun ein bestimmtes System von Werthen für a, b, c. Aus (35) folgt alsdann, dass alle Punkte, welche in der durch

$$ax + by + cz = m \qquad (36)$$

charakterisirten Ebene liegen, für denselben Zeitmoment dieselbe Bewegung haben, in so ferne man bloss die durch (35) gegebene Elementarwelle betrachtet. Legt man dem m verschiedene Werthe bei, so erhält man eine Reihe paralleler Ebenen, in denen allen — jede für sich betrachtet — in demselben Zeitmomente für alle Punkte dieselbe Bewegung vorhanden ist.

Die Entfernung der Ebene (36) vom Anfangspunkt ist $\frac{m}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ $= \frac{m}{r}$. Wählen wir nun zwei Ebenen, die beide mit der Ebene

$$ax + by + cz = 0 \qquad (37)$$

parallel laufen, die eine in der Entfernung $\frac{m}{r}$, die andere in der Entfernung $\frac{m+2\pi}{r}$, so werden für dieselben $ax + by + cz = m$ und $= m + 2\pi$ sein, so dass φ und ψ ihre Werthe nicht ändern für denselben Werth von t. Diese Ebenen sind von einander um $\frac{2\pi}{r}$ entfernt und man schliesst hieraus, dass man durch den (als unbegränzt gedachten) Körper eine Reihe Ebenen parallel zu (37) und in der gegenseitigen Entfernung $\frac{2\pi}{r}$ legen könne, in denen allen zu derselben Zeit dieselbe Bewegung herrscht. Die Grösse $\frac{2\pi}{r}$ heisst desshalb die Wellenlänge für die durch (35) gegebene Elementarwelle.

Aus (35) geht ferner hervor, dass ein jeder Punkt nach der Zeit $\frac{2\pi}{K}$ wieder in diejenige Lage zurückkehrt, die er am Anfange dieser Zeit inne hatte, so wie dass die Bewegung desselben geradlinig sei. Die Grösse $\frac{2\pi}{K}$ heisst in Folge dessen die Oszillationsdauer.

Denken wir uns, die Bewegung gienge anfänglich von der Ebene (37) aus, so werden, nach Umfluss der Zeit $\frac{2\pi}{K}$, alle Punkte die-

ser Ebene wieder die anfängliche Lage angenommen haben; alle Punkte in der mit (37) parallelen, in der Entfernung $\frac{2\pi}{r}$ befindlichen Ebene sind in demselben Augenblick ganz genau in derselben Lage. Die Punkte in der ersten Ebene setzen ihren Weg fort, indem sie ihre Bewegung zum zweiten Male machen; die in der zweiten Ebene wollen ihn zum ersten Male anfangen. Somit pflanzt sich die Erschütterung in der Zeit $\frac{2\pi}{K}$ durch den Weg $\frac{2\pi}{r}$ fort, und die Geschwindigkeit dieser Fortpflanzung ist also $\frac{K}{r}$. Die Schwingungen in allen den mit (37) parallelen Ebenen bleiben sich fortwährend parallel, indem $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nur von a, b, c, K abhängen, und zwar sind sie parallel derjenigen Hauptaxe des Ellipsoids (35), deren Länge $=\frac{1}{K}$ ist.

Für dieselbe Ebene (37), welche wir Wellebene heissen wollen, giebt es drei Werthe von K; es gehören also zu jeder Wellebene dreierlei Elementarwellen, deren Wellenlänge $\frac{2\pi}{r}$ dieselbe für alle ist, deren Oszillationsdauern $\frac{2\pi}{K_1}$, $\frac{2\pi}{K_2}$, $\frac{2\pi}{K_3}$ und deren Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten $\frac{K_1}{r}$, $\frac{K_2}{r}$, $\frac{K_3}{r}$ verschieden sind. Die Schwingungen in jeder der drei Wellen bleiben immer parallel mit einer der drei Hauptaxen des Ellipsoids (35), wesshalb man sagt, sie seien polarisirt und diese Richtungen die Polarisationsrichtungen nennt.

Betrachten wir also bloss ein einziges System von Werthen für a, b, c (d. h. eine einzige Wellebene (37)), so erhalten wir dadurch schon drei Elementarwellensysteme, die mit ungleichen Geschwindigkeiten und ungleichen Oszillationsdauern, aber mit derselben Wellenlänge den Körper durcheilen. Die Schwingungsrichtungen in den dreien stehen auf einander senkrecht und bleiben sich immer parallel. Alle Punkte, welche in Ebenen liegen, die parallel mit (37) gehen und in der gegenseitigen Entfernung $\frac{2\pi}{r}$ sind, befinden sich für einen bestimmten Zeitmoment in demselben Bewegungszustande, indem sie es in Folge jeder einzeln der drei Wellensysteme ja sind.

Das Ellipsoid (35) wird im Allgemeinen ein anderes, wenn a, b, c sich ändern. Gesetzt, man lasse a, b, c in ϱa, ϱb, ϱc übergehen, wo ϱ willkührlich, so wird die Wellebene (37) sich

nicht ändern, dagegen wird die Wellenlänge zu $\frac{2\pi}{r\varrho}$ werden. Es herrscht also in der Ebene (37) und den mit ihr parallelen Ebenen nicht nur die durch die Wellenlänge $\frac{2\pi}{r}$ charakterisirte Bewegung, sondern auch die durch die Wellenlänge $\frac{2\pi}{\varrho r}$ festgestellte, wo ϱ ganz willkührlich ist.

Würde man in (31) die Grössen $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{Q}$ vernachlässigen, so ergäbe (32), dass K in ϱK übergienge, wenn a, b, c in ϱa, ϱb, ϱc übergiengen, so dass die entsprechende Oszillationsdauer $\frac{2\pi}{\varrho K}$ wäre. Die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit bliebe $\frac{K}{r}$, wie vorhin, so dass sich mithin Schwingungen von verschiedener Oszillationsdauer mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen würden. Da dies den wirklichen Erscheinungen zu entsprechen scheint, so liegt hierin ein erfahrungsgemässer Beweis, dass $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{Q}$ sehr klein sind im Verhältniss zu $G, \ldots, R$. Lässt man die eben erwähnte Annahme nicht gelten, so geht K nicht in ϱK über und die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit ist nicht dieselbe. Darauf müsste eine Dispersion der ebenen Wellen in festen Körpern beruhen, die bis jetzt von der Erfahrung nicht nachgewiesen zu sein scheint.

Für den Ausdehnungskoeffizienten (§. VI.) erhält man aus (35):

$$\theta = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\,[\varphi'(ax+by+cz+Kt) + \psi'(ax+by+cz-Kt)]. \tag{38}$$

Der Winkel ε, den eine Polarisations- (Schwingungs-) Richtung mit der auf der Wellebene (37) errichteten Normale macht, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos\varepsilon = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{r}$$

$$= \frac{a[DF-E(B-K^2)] + b[EF-D(A-K^2)] + c[(A-K^2)(B-K^2)-F^2]}{rs},$$

wenn wir mit s den letzten Nenner in (32) bezeichnen.

Für den Fall eines isotropen Körpers und $K^2 = (G+3P)r^2 + (\mathfrak{A}+5\mathfrak{R})r^4$ ist

$$DF - E(B-K^2) = Tacr^2, \quad EF - D(A-K^2) = Tbcr^2,$$

$$(A-K^2)(B-K^2) - F^2 = Tc^2r^2;$$

also

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

d. h.

$$\cos\varepsilon=\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}{r}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1,\quad \varepsilon=0,$$

d. h. die entsprechende Schwingungsrichtung steht senkrecht auf der Wellebene, die zwei andern liegen folglich darin. Für diese letztern ist also $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0$, d. h. nach (38) die Verdichtung oder Ausdehnung Null.

Je mehr ein Körper sich dem isotropen Zustande nähert, desto mehr sind die eben gemachten Folgerungen richtig.

XX.

Die Wellenfläche.

Wird in einem Punkte, z. B. dem Anfangspunkt der Koordinaten, eine Bewegung erregt und unterhalten, so kommt nach und nach der ganze (unbegränzte) Körper in Erregung. Die entsprechende Bewegung versinnlichen wir uns dadurch, dass wir sagen es durcheilen ebene Wellen in unendlicher Anzahl denselben; in jeder ist andere Oszillationsdauer und andere Fortpflanzungs Geschwindigkeit.

Ist

$$ax+by+cz=0$$

eine Wellebene, so gehören zu ihr dreierlei ebene Wellen von verschiedenen Polarisationsrichtungen und verschiedenen Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten. Am Ende der Zeit t ist die am Anfange im Anfangspunkt erregte ebene Welle in der Ebene

$$ax+by+cz=\varrho$$

angelangt, wo $\varrho=Kt$. Fragen wir nun, wohin die Bewegung überhaupt am Ende der Zeit t gelangt sei, so müssen wir a, b, c alle möglichen Werthe beilegen und sodann diejenige krumme Fläche suchen, welche durch die Durchschnitte aller Ebenen, deren Gleichung

$$ax+by+cz=Kt$$

ist, gebildet, d. h. von allen berührt wird, wenn man a, b, c alle möglichen (reellen) Werthe beilegt. In dieser Fläche treten alle Elementarwellen zusammen und man wird dadurch eine für unsere Sinne wahrnehmbare Bewegung erhalten, während die der einzel-

nen Elementarwelle nicht wahrnehmbar ist (sie ist im Grunde nicht vorhanden, sondern bloss zur besseren Verdeutlichung aus den Resultaten der Rechnung hergenommen). Wir setzen zur Bequemlichkeit $t=1$ und verstehen also die Gestalt der gesuchten Fläche nach Umfluss der Zeit 1 vorzugsweise, wenn wir von der **Wellenfläche** sprechen.

Die Bestimmung der Wellenfläche für den Fall, da von derselben Wellebene aus Wellen von verschiedener Fortpflanzungs-Geschwindigkeit fortgehen, ist eine gewisse unbestimmte Aufgabe, indem die fragliche Fläche aus einem Systeme von Flächen besteht. Wir wollen nur denjenigen Fall betrachten, in dem man I, ..., $\mathfrak{Q}$ vernachlässigt. Setzt man dann

$$a^2+b^2+c^2=r^2,\quad \frac{a}{r}=m,\quad \frac{b}{r}=n,\quad \frac{c}{r}=p,\quad \frac{K}{r}=\overline{\omega};$$

so ist

$$mx+ny+pz=\overline{\omega} \tag{a}$$

die Gleichung der Wellebene, $\overline{\omega}$ die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit, gegeben durch

$$\left.\begin{array}{l}(A'-\overline{\omega}^2)(B'-\overline{\omega}^2)(C'-\overline{\omega}^2)-D'^2(A'-\overline{\omega}^2)-E'^2(B'-\overline{\omega}^2)\\ \qquad -F'^2(C'-\overline{\omega}^2)+2D'E'F'=0,\end{array}\right\} \tag{b}$$

wo

$$A'=(G+L)m^2+(H+R)n^2+(J+Q)p^2,$$
$$B'=(G+R)m^2+(H+M)n^2+(J+P)p^2,$$
$$C'=(G+Q)m^2+(H+P)n^2+(J+N)p^2,$$
$$D'=2Pnp,\quad E'=2Qmp,\quad F'=2Rmn,$$

und zugleich

$$m^2+n^2+p^2=1. \tag{c}$$

Denken wir uns für m, n, p alle zwischen -1 und $+1$ liegenden Werthe, welche (c) genügen, so erhalten wir alle möglichen Wellebenen.

Da p von m und n (durch (c)) abhängt, so sind drei nahe an einander liegende Wellebenen:

$$mx+ny+pz=\overline{\omega},$$

$$(m+\partial m)x+(n+\partial n)y+(p+\frac{\partial p}{\partial m}\partial m+\frac{\partial p}{\partial n}\partial n)z=\overline{\omega}+\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial m}\partial m+\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial n}\partial n,$$

$$(m+\partial m')x+(n+\partial n')y+(p+\frac{\partial p}{\partial m}\partial m'+\frac{\partial p}{\partial n}\partial n')z=\overline{\omega}+\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial m}\partial m'+\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial n}\partial n'.$$

Um die Koordinaten ihres Durchschnittspunktes zu erhalten, lässt man alle drei zugleich bestehen. Man übersieht leicht, dass bei der Willkührlichkeit von ∂m, ∂n, $\partial m'$, $\partial n'$ dieselben zurückkommen auf

$$mx+ny+pz=\varpi,\quad x+\frac{\partial p}{\partial m}z=\frac{\partial \varpi}{\partial m},\quad y+\frac{\partial p}{\partial n}z=\frac{\partial \varpi}{\partial n}. \tag{d}$$

Bestimmt man $\frac{\partial p}{\partial m}$, $\frac{\partial p}{\partial n}$ aus (c), $\frac{\partial \varpi}{\partial m}$, $\frac{\partial \varpi}{\partial n}$ aus (b) und eliminirt dann m, n, p, ϖ aus (d), (c) und (b), so erhält man die Gleichung der Wellenfläche.

Man übersieht unschwer, wie man zu verfahren hätte, wenn nicht $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{Q}$ vernachlässigt werden. Alsdann müsste man z. B. die Wellenfläche für alle diejenigen Wellen suchen, die von den verschiedenen Wellebenen ausgehend dieselbe Wellenlänge, z. B. $\frac{2\pi}{\varrho}$, hätten. Man hätte dann:

$$ax+by+cz=K,$$

$$\left.\begin{array}{c}(A-K^2)(B-K^2)(C-K^2)-D^2(A-K^2)-E^2(B-K^2)\\ -F^2(C-K^2)+2DEF=0,\end{array}\right\} \tag{b'}$$

$$a^2+b^2+c^2=\varrho^2, \tag{c'}$$

$$ax+by+cz=K,\quad x+\frac{\partial c}{\partial a}z=\frac{\partial K}{\partial a},\quad y+\frac{\partial c}{\partial b}z=\frac{\partial K}{\partial b}, \tag{d'}$$

und hätte aus (b'), (c'), (d'), nachdem die Differentialquotienten erhalten worden, a, b, c, K zu eliminiren.

Die Durchführung der Rechnung ist von geringerem Interesse, sie mag daher unterbleiben.

Wir wollen im Nachfolgenden nun noch einige Betrachtungen zufügen, welche sich bloss auf elastische isotrope Körper (§. I.) beziehen.

XXI.

Bedingungen, unter denen man von der Wirkung der äusseren Kräfte absehen kann.

In der Regel sind die fremden (Massen-) Kräfte die der Schwere, oder sie rühren von Anziehungen, die umgekehrt proportional sind dem Quadrat der Entfernung, her. In beiden Fällen kann man die

Betrachtung dieser Kräfte in folgender Weise umgehen. Geht man von einem beliebigen Gleichgewichtszustande aus, um zu einem andern zu gelangen, und vernachlässigt die Grössen $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{Q}$, so hat man, unter der Voraussetzung eines isotropen Körpers (§. III.):

$$\left.\begin{aligned}
(G+P)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}\right)+X=0,\\
(G+P)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z}\right)+Y=0,\\
(G+P)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right)+Z=0.
\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

Angenommen nun, man könne diesen Gleichungen genügen, wenn man X, Y, Z weglässt, und seien ξ_1, v_1, ζ_1 die dadurch sich ergebenden Werthe von ξ, v, ζ, so wird es oft nicht schwer sein, gewisse Grössen ξ_0, v_0, ζ_0 zu finden, der Art, dass $\xi_1+\xi_0$, v_1+v_0, $\zeta_1+\zeta_0$ für ξ, v, ζ den Gleichungen (39) genügen. Wir wollen dies in den beiden berührten Fällen nachweisen.

Seien X, Y, Z im Allgemeinen konstant, gleich a, b, c, so wird man leicht finden:

$$\xi_0=-\frac{a}{2(G+3P)}x^2,\quad v_0=-\frac{b}{2(G+3P)}y^2,\quad \zeta_0=-\frac{c}{2(G+3P)}z^2.\quad(40)$$

Denn unter dieser Voraussetzung ist

$$(P+G)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}\right)+X$$
$$=-\frac{2a}{2(P+3G)}(P+G)-\frac{4aP}{2(P+3G)}+a=0$$

u. s. w. Die Werthe (40) sind also Werthe von ξ_0, v_0, ζ_0, wie sie verlangt wurden.

Rühren X, Y, Z von Anziehungskräften her, so seien α, β, γ die Koordinaten eines Punktes des anziehenden Körpers; x, y, z die des betrachteten Punktes unseres elastischen Körpers; M die Masse dieses Punktes; $f(\alpha, \beta, \gamma)$ die Dichte des anziehenden Körpers im Punkte (α, β, γ), so ist die Wirkung des anziehenden Körpers auf den Punkt M nach den drei Axen:

$$M\iiint\frac{f(\alpha,\beta,\gamma).(\alpha-x)}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma,\quad M\iiint\frac{f(\alpha,\beta,\gamma).(\beta-y)}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma,$$

$$M\iiint\frac{f(\alpha,\beta,\gamma).(\gamma-z)}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma,$$

wo die dreifachen Integrale auf den ganzen anziehenden Körper auszudehnen sind und

$$R=\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}$$

ist. Daraus folgt:

$$X=\iiint\frac{f(\alpha,\beta,\gamma).(\alpha-x)}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma,\quad Y=\iiint\frac{f(\alpha,\beta,\gamma).(\beta-y)}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma,$$

$$Z=\iiint\frac{f(\alpha,\beta,\gamma).(\gamma-z)}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma. \tag{a}$$

Man setze nun

$$\iiint\frac{f(\alpha,\beta,\gamma)}{R}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma=S, \tag{b}$$

so folgt aus (a):

$$X=\frac{\partial S}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial S}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial S}{\partial z}, \tag{c}$$

wobei die positive Richtung der Axen von (xyz) gegen $(\alpha\beta\gamma)$ geht. Setzt man endlich

$$T=\tfrac{1}{2}\iiint f(\alpha,\beta,\gamma)\,R\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma, \tag{d}$$

so genügen den (39):

$$\xi_0=-\frac{1}{G+3P}\frac{\partial T}{\partial x},\quad v_0=-\frac{1}{G+3P}\frac{\partial T}{\partial y},\quad \zeta_0=-\frac{1}{G+3P}\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{41}$$

Denn aus (41) folgt:

$$\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2}=-\frac{1}{G+3P}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$

$$=-\frac{1}{2(G+3P)}\iiint f(\alpha,\beta,\gamma).\frac{3(\alpha-x)\left[(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2\right]}{R^5}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma,$$

$$\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}=-\frac{1}{G+3P}\frac{\partial^3 T}{\partial x\partial y^2}$$

$$=\frac{1}{2(G+3P)}\iiint f(\alpha,\beta,\gamma).\frac{\alpha-x}{R^5}\left[-(\alpha-x)^2+2(\beta-y)^2-(\gamma-z)^2\right]\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma,$$

$$\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2} = -\frac{1}{G+3P}\frac{\partial^3 T}{\partial x \partial z^2}$$

$$= \frac{1}{2(G+3P)}\iiint f(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\alpha-x}{R^5}.[-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2+2(\gamma-z)^2]\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma,$$

wovon die Summe

$$= -\frac{1}{G+3P}\iiint f(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\alpha-x}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma$$

ist. Eben so

$$\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{G+3P}\left[\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2}+\frac{\partial^3 T}{\partial x \partial z^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{G+3P}\iiint f(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\alpha-x}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma.$$

Setzt man dies in (39), so erhält man:

$$(P+G)\left(\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial z}\right)$$

$$= -\iiint f(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\alpha-x}{R^3}\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma = -X,$$

d. h. man genügt der ersten Gleichung. Eben so würde man den andern zwei genügen. Kann man so ξ_0, v_0, ζ_0 bestimmen, so braucht man nur die allgemeinen Werthe von ξ, v, ζ zu suchen, welche den Gleichungen (39) ohne X, Y, Z genügen, um die allgemeinen Werthe zu haben, die den (39) mit X, Y, Z genügen werden.

Man kann das Gesagte auch leicht auf die Gleichungen (27′) anwenden, die in diesem Falle sind:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= (G+P)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right)+X,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (G+P)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z}\right)+Y,\\
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= (G+P)\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right)+Z.
\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

Gesetzt, ξ_0, v_0, ζ_0 seien Werthe, bestimmt wie so eben, so wird man bloss die allgemeinen Werthe von ξ, v, ζ zu suchen haben, welche den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= (G+P)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (G+P)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= (G+P)\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right)+2P\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

genügen, um durch Zufügung von ξ_0, v_0, ζ_0 die zu erhalten, die den (42) genügen. Dass man ähnliche Resultate für die allgemeinern Formeln (27) erhalten könnte, ist nicht schwer zu übersehen.

XXII.

Weitere Betrachtungen über die Gleichungen (43). Transversal- und Longitudinal-Schwingungen.

Die Gleichungen (43), oder die allgemeineren:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= (G+P)D^2\xi+2P\frac{\partial \Theta}{\partial x}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})D^2.D^2\xi+4\mathfrak{K}.D^2.\frac{\partial \Theta}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (G+P)D^2 v+2P\frac{\partial \Theta}{\partial y}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})D^2.D^2 v+4\mathfrak{K}.D^2.\frac{\partial \Theta}{\partial y},\\
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= (G+P)D^2\zeta+2P\frac{\partial \Theta}{\partial z}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})D^2.D^2\zeta+4\mathfrak{K}.D^2.\frac{\partial \Theta}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \quad (43')$$

worin die Bezeichnung aus §. XI. klar ist, wurden bereits in §. XVII. integrirt und wir haben dort gesehen, dass zu jeder Wellebene dreierlei Wellen gehören, wovon die eine ihre Polarisationsrichtung senkrecht auf die Wellebene, die andern zwei in der Wellebene haben, und alle drei Richtungen auf einander senkrecht stehen.

Die ersten Schwingungen wollen wir desshalb **Longitudinalschwingungen**, die andern **Transversalschwingungen** heissen. Die letztern erzeugen weder Verdichtung noch Verdünnung. Die longitudinalen Schwingungen pflanzen sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{G+3P}$, die transversalen mit $\sqrt{G+P}$ *) fort (wobei $G=0$ ist, wenn man vom natürlichen Gleichgewichte ausgeht). Ist $ax+by+cz=0$ die Gleichung der Wellebene, so wird die Polarisationsrichtung der erstern bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

*) Vernachlässigt man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$ nicht, so wären diese Grössen (§. XVIII.): $\sqrt{(G+3P)+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})r^2}$ und $\sqrt{(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})r^2}$.

während für die zweiten bloss gefunden wird: $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Die Schwingungsrichtung ist also nicht völlig bestimmt. Da die zwei transversal schwingenden Wellen gleich schnell fortgehen, so werden sie sich zu einer einzigen transversalen Welle vereinigen, so dass eigentlich bei isotropen Körpern nur zweierlei Wellensysteme entstehen.

Den Gleichungen (43) oder (43′) genügt man übrigens auch, wenn man setzt:

$$\xi=A\cos\alpha\,.\,\Pi_1,\quad v=A\cos\beta\,.\,\Pi_2,\quad \zeta=A\cos\gamma\,.\,\Pi_3, \tag{44}$$

wo Π_1, Π_2, Π_3 jeweils eine der 16 folgenden Formen haben:

$$\left.\begin{array}{lll}
\Pi_1= \sin ax\sin by\sin cz\sin Kt, & \Pi_2=-\cos ax\cos by\sin cz\sin Kt, & \Pi_3=-\cos ax\sin by\cos cz\sin Kt;\\
-\sin ax\sin by\sin cz\cos Kt, & +\cos ax\cos by\sin cz\cos Kt, & +\cos ax\sin by\cos cz\cos Kt;\\
-\sin ax\sin by\cos cz\sin Kt, & +\cos ax\cos by\cos cz\sin Kt, & -\cos ax\sin by\sin cz\sin Kt;\\
-\sin ax\sin by\cos cz\cos Kt, & +\cos ax\cos by\cos cz\cos Kt, & -\cos ax\sin by\sin cz\cos Kt;\\
-\sin ax\cos by\sin cz\sin Kt, & -\cos ax\sin by\sin cz\sin Kt, & +\cos ax\cos by\cos cz\sin Kt;\\
-\sin ax\cos by\sin cz\cos Kt, & -\cos ax\sin by\sin cz\cos Kt, & +\cos ax\cos by\cos cz\cos Kt;\\
-\cos ax\sin by\sin cz\sin Kt, & -\sin ax\cos by\sin cz\sin Kt, & -\sin ax\sin by\cos cz\sin Kt;\\
-\cos ax\sin by\sin cz\cos Kt, & -\sin ax\cos by\sin cz\cos Kt, & -\sin ax\sin by\cos cz\cos Kt;\\
-\sin ax\cos by\cos cz\sin Kt, & -\cos ax\sin by\cos cz\sin Kt, & -\cos ax\cos by\sin cz\sin Kt;\\
+\sin ax\cos by\cos cz\cos Kt, & +\cos ax\sin by\cos cz\cos Kt, & +\cos ax\cos by\sin cz\cos Kt;\\
-\cos ax\sin by\cos cz\sin Kt, & -\sin ax\cos by\cos cz\sin Kt, & +\sin ax\sin by\sin cz\sin Kt;\\
+\cos ax\sin by\cos cz\cos Kt, & +\sin ax\cos by\cos cz\cos Kt, & -\sin ax\sin by\sin cz\cos Kt;\\
-\cos ax\cos by\sin cz\sin Kt, & +\sin ax\sin by\sin cz\sin Kt, & -\sin ax\cos by\cos cz\sin Kt;\\
+\cos ax\cos by\sin cz\cos Kt, & -\sin ax\sin by\sin cz\cos Kt, & +\sin ax\cos by\cos cz\cos Kt;\\
+\cos ax\cos by\cos cz\sin Kt, & -\sin ax\sin by\cos cz\sin Kt, & -\sin ax\cos by\sin cz\sin Kt;\\
+\cos ax\cos b[illegible], & -\sin ax\sin b[illegible], & -\sin ax\cos by\sin cz\cos Kt
\end{array}\right\} \tag{45}$$

wobei entweder

$$K=r\sqrt{(G+3P)+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})r^2},\ \frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=\pm\frac{1}{r},\ r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

oder

$$K=r\sqrt{(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})r^2},\ \ a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0,$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Die Grösse A in (44) bleibt willkührlich. Ein jedes der obigen 16 Systeme genügt für sich den (43′); die Summe mehrerer oder aller genügt eben so, wobei die willkührliche Konstante A bei jedem eine andere sein kann. Lässt man a, b, c alle möglichen Werthe durchlaufen, so erhält man durch Summirungen weit allgemeinere Integrale. (§. XIX.)

Da man hat:

$$2P\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(G+P)D^2\xi=2P.\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(G+P)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(G+P)(D^2\xi-\frac{\partial\Theta}{\partial x})$$
$$=(G+3P)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(G+P)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}\right)$$
$$=(G+3P)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(G+P)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right];$$

$$4\mathfrak{K}.D^2.\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K}).D^2.D^2\xi=D^2.[4\mathfrak{K}.\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})D^2\xi]$$
$$=D^2.[4\mathfrak{K}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})(D^2\xi-\frac{\partial\Theta}{\partial x})]$$
$$=D^2.[(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right\}]$$

u. s. w., so wird man die Gleichungen (43′) auch in folgender Form schreiben können:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}&=[(G+3P)+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})D^2.]\frac{\partial\Theta}{\partial x}\\
&\quad+[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})D^2.]\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right],\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=[(G+3P)+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})D^2.]\frac{\partial\Theta}{\partial y}\\
&\quad+[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})D^2.]\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right],\\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}&=[(G+3P)+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})D^2.]\frac{\partial\Theta}{\partial z}\\
&\quad+[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{K})D^2.]\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\right],
\end{aligned}\right\}(46)$$

a welchen Gleichungen die gedrängte symbolische Bedeutung da-
urch leicht verständlich werden wird, dass wir die erste dersel-
en etwas ausführlicher schreiben. Sie wäre:

$$=(G+3P)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{B})D^2\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

$$+(G+P)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right]$$

$$+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})D^2\cdot\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right],$$

obei wir uns erinnern, dass $D^2.u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Aus den Gleichungen (46), welche identisch sind mit (43'), lgt nun, dass die Longitudinalschwingungen sowohl als die Trans-
ersalschwingungen für sich allein bestehen können. Es folgt
es allerdings bereits schon aus dem, was wir in §. XVII. ff. ge-
hen haben; jedoch mag es nicht ohne Interesse sein, es hier
chmals zu erweisen.

Angenommen nämlich, man habe bloss

$$\left.\begin{aligned}
&=[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})D^2.]\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right],\\
&=[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})D^2.]\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right],\\
&=[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})D^2.]\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\right],
\end{aligned}\right\}(47)$$

d man setze für ξ, v, ζ eines der Systeme (45), so ergiebt sich

$${}^2\cos\alpha=[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})r^2][r^2\cos\alpha-a(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)],$$

$${}^2\cos\beta=[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})r^2][r^2\cos\beta-b(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)],$$

$${}^2\cos\gamma=[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})r^2][r^2\cos\gamma-c(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)].$$

Aus diesen Gleichungen folgt ganz unmittelbar, indem man
e erste mit a, die zweite mit b, die dritte mit c multiplizirt und
dirt:

$$K^2-[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})r^2](r^2-r^2)\}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)=0,$$

h. da nicht $K^2=0$, so ist nothwendig:

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0,\quad K^2=[(G+P)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})r^2]r^2.$$

Die erste dieser Gleichungen ergiebt dann auch, dass $\Theta=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ $+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$, so dass dieselben Werthe, welche den (47) genügen, auch den (46) Genüge leisten. Da $\Theta=0$, so sind dies Transversalschwingungen, welche somit für sich bestehen können.

Gesetzt nun weiter, man habe bloss die Gleichungen:

(48)

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=[G+3P+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})D^2.]\frac{\partial\Theta}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=[G+3P+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})D^2.]\frac{\partial\Theta}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=[G+3P+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})D^2.]\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$

und setze wieder für ξ, v, ζ eines der Systeme (45), so erhält man:

$$K^2\cos\alpha$$
$$=[G+3P+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})r^2][r^2\cos\alpha+b(a\cos\beta-b\cos\alpha)+c(a\cos\gamma-c\cos\alpha)],$$
$$K^2\cos\beta$$
$$=[G+3P+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})r^2][r^2\cos\beta+a(b\cos\alpha-a\cos\beta)+c(b\cos\gamma-c\cos\beta)],$$
$$K^2\cos\gamma$$
$$=[G+3P+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})r^2][r^2\cos\gamma+a(c\cos\alpha-a\cos\gamma)+b(c\cos\beta-b\cos\gamma)].$$

Man multiplizire die erste mit b, die zweite mit a, und subtrahire, so hat man:

$$(b\cos\alpha-a\cos\beta)K^2=0,\quad \text{also}\quad b\cos\alpha-a\cos\beta=0.$$

Eben so leicht $a\cos\gamma-c\cos\alpha=0$, $b\cos\gamma-c\cos\beta=0$, und dann

$$K^2=[G+3P+(\mathfrak{A}+5\mathfrak{K})r^2]r^2.$$

Aus $b\cos\alpha-a\cos\beta=0$, $a\cos\gamma-c\cos\alpha=0$, $b\cos\gamma-c\cos\beta=0$ folgt aber auch, dass zugleich:

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

d. h., dass dieselben Werthe, welche den (48) genügen, auch den (46) genügen. Daraus folgt der behauptete Satz unmittelbar. Kennt man die allgemeinen Integrale von (47) und (48), so erfolgt aus der Summirung beider ein Integral von (46).

XXIII.

Mechanische Bedeutung der Grösse $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{P_0 \delta_0}$. (§. VIII.)

Wir wollen uns ein Prisma denken, das vertikal aufgehängt sei; es sei dasselbe einer Zugkraft F (auf die Einheit der Fläche) unterworfen, die an seiner untern Fläche angebracht sei, während auf die Seitenflächen keine fremden Kräfte wirken. Ist (Taf. VI. Fig. 5.) AD die Axe der x, AB die der y, AE der z, so wird man setzen können:

$$\xi = -\alpha x, \quad v = -\alpha y, \quad \zeta = \beta z,$$

wo α und β zwei Konstanten sind. Diese Annahmen genügen den Gleichungen des §. III. und widersprechen der Natur der Sache offenbar nicht. Hieraus folgt (§. VIII.), wenn wir den Körper als isotrop voraussetzen:

$$A = \delta_0 P_0 [\beta - 4\alpha], \; B' = \delta_0 P_0 [\beta - 4\alpha], \; C'' = \delta_0 P_0 [3\beta - 2\alpha], \; B = C = C' = 0.$$

Da aber auf die Seitenflächen keinerlei Druck ausgeübt wird, so müssen $A = B' = 0$ sein, d. h. $\beta = 4\alpha$, also $C'' = \delta_0 P_0 . 10\alpha = \frac{5}{2}\beta P_0 \delta_0$; diese Grösse ist aber $= F$, also

$$F = \frac{5}{2}\beta P_0 \delta_0, \quad \beta = \frac{2}{5} \cdot \frac{F}{P_0 \delta_0}.$$

β ist aber die lineäre Verlängerung $\left(\frac{\zeta}{z}\right)$ des Prismas, wenn seine Länge $z = 1$; daraus folgt, dass

> die Grösse $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\delta_0 P_0}$ bei isotropen Körpern die Verlängerung bedeutet, welche ein Prisma von der Länge 1 erleidet, wenn im Sinne seiner Länge auf die eine Grundfläche eine Zugkraft $= 1$ (auf die Einheit der Fläche) ausgeübt wird und die andere Grundfläche fest ist, während keine Massenkräfte und keine seitlichen Kräfte auf dasselbe wirken.

Wir schliessen hiemit diese Betrachtungen. Es lag natürlich nicht in unserer Absicht, Anwendungen auf spezielle Beispiele zu machen, wir wollten nur die allgemeinen Gesetze, namentlich die Bildung der allgemeinen Differentialgleichungen klar und ausführlich entwickeln, und müssen, was speziellere Beispiele anbelangt,

etwa auf das bereits in der Einleitung berührte Werk von Lamé verweisen. Lamé hat allerdings einen durchaus andern Weg eingeschlagen, auch in so ferne andere Resultate erhalten, als er von schliesslich zwei bleibenden Konstanten in den Gleichungen (39) spricht, wobei er natürlich sich denkt, es sei vom natürlichen Gleichgewichtszustande ausgegangen, (in welchem Falle $G=0$ wäre); andernfalls enthalten auch unsere Gleichungen (39) zwei bleibende Konstanten $P+G$ und $2P$. Das im Vorstehenden Erörterte ist hinreichend, um zum Studium eines spezielleren Werkes die nöthigen allgemeinern Kenntnisse zu geben. Der Vortheil der obigen Betrachtungen, wie sie von Navier, Poisson, Cauchy herrühren, gegenüber denen von Lamé, scheint uns vorzugsweise in dem klaren Verständnisse dessen zu liegen, was die jeweils eingeführten Grössen zu bedeuten haben, wie sie folglich zu berechnen und zu behandeln sind — ein Vortheil, der gewiss nicht zu niedrig anzuschlagen ist.

In der vorliegenden Arbeit wurde neu gegeben: die Entwickelung der Gleichungen (7) bis zur vierten Ordnung und Alles, was nun damit zusammenhängt, so wie die Darstellung in §. XVII. auch in einer Weise elementar geführt wurde, dass zum leichtern Verständniss ein vielleicht nicht unwichtiger Schritt gethan wurde. Wie man bei wirklichen Beispielen, also bei gegebenem Anfangszustande sich zu benehmen habe, ist allerdings nicht aus einander gesetzt worden, jedoch nach allgemein bekannten Lehren der höhern Mathematik nicht schwer durchzuführen. Die §§. VII., IX., XI., XII., XV., XVI. u. a. m. enthalten ebenfalls manches Neue, so dass, wie schon Eingangs gesagt wurde, in dem Vorliegenden nicht bloss alt Bekanntes aufgeführt wurde.

Schliesslich mag noch eine Bemerkung in Bezug auf die Anwendung des Vorstehenden auf die Theorie des Lichtes hier Platz finden. In §. II. haben wir den dortigen zweiten Fall speziell als hieher gehörig betrachtet, und behalten uns vor, in einem folgenden Aufsatze denselben zu erörtern. Man hat aber, und vorzugsweise Cauchy, schon die obige Theorie (erster Fall des §. II.) geradezu auf die Lichtbewegungen angewendet. Dabei stellte sich jedoch der Uebelstand heraus, dass man die Lichtzerstreuung (Dispersion) nicht erklären konnte, wie dies aus §. XIX. auch hervorgeht, indem bei der (seither gebräuchlichen) Beschränkung auf die Gleichungen (27′) Wellen von verschiedener Oszillationsdauer mit derselben Geschwindigkeit sich fortpflanzen würden. Cauchy hat desshalb durch weiter getriebene „Näherung“, wie er sagt, die Dispersion zu erklären gesucht. Der eigentliche Grund seiner Rechnungen läge in der Annahme der Gleichungen (27),

aus denen allerdings nach §. XIX. eine Dispersion folgen würde. Allein es müsste dieselbe alsdann auch im leeren Raume Statt finden, was abermals den Erscheinungen widerspricht, so dass die Cauchy'sche Theorie wieder nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Wir werden im Nächstfolgenden sehen, dass unter den Voraussetzungen des §. II. die Dispersion in den verschiedenen Medien sich ganz natürlich erklärt.

Endlich ist es noch meine Pflicht, anzuführen, dass manche Anregungen zu obigen Ausführungen aus gemeinschaftlichen Besprechungen und Studien mit den Herren Professoren Redtenbacher und Dr. Wiener der hiesigen polytechnischen Schule hervorgegangen sind.

XVIII.

Miscellen.

Folgerungen aus dem in Theil XXII. S. 354. bewiesenen Satze.

Von Herrn Professor J. K. Steczkowski an der Universität zu Krakau.

Erster Satz. Sei ABC (Taf. VI. Fig. 6.) ein geradliniges Dreieck, in welchem der Winkel A ein spitziger Winkel ist; errichtet man auf seinen drei Seiten Quadrate und fällt aus dem Scheitel C auf AB das Perpendikel Cm, so ist die Fläche des auf der Seite BC kleiner als die Summe der Flächen der auf den beiden andern Seiten errichteten Quadrate; dieser Ueberschuss ist gleich der Fläche eines Rechtecks, dessen zwei anliegende Seiten $2AB$ und Am sind, d. h. wenn man der Kürze halber die Quadrate auf AB und AC durch P und Q bezeichnet, $BCDE = P + Q - 2AB \times Am$.

Beweis. Nach dem in Thl. XXII. S. 354. des Archivs bewiesenen Lehrsatze ist:

$$P + Q = BCGF.$$

Da aber $BCGF = BCMH$, so ist augenscheinlich das Quadrat $BCDE$ kleiner als das Rechteck $BCMH$, also kleiner als das

Parallelogramm $BCGF$, und endlich kleiner als die Summe $P+Q$ um das Rechteck $DEHM$, d. i.

$$BCDE = P + Q - DEHM.$$

Verlängere man HM bis I so, dass $HI = 2AB$, und ergänze das Rechteck $HEPI$, schneide dann auf HE $HK = Am$ ab und ziehe die Gerade KL parallel zu HI, welche CM in N schneidet, ziehe zuletzt die Diagonale HP. Im Dreiecke PHI ist

$$HN : NP = HM : MI,$$

weil aber $HM = DE$ und $MI = DP$, so ist auch $HN : NP = DE : DP$, d. i. die drei Punkte H, N, P liegen in einer und derselben Geraden HP. Die Figur zeigt, dass

$$DEHM = HKNM + DEKN,$$

und bekanntlich das Rechteck $DEKN = NLIM$, desswegen

$$DEHM = HKNM + NLIM = HILK = HI \times HK = 2AB \times Am,$$

also $BCDE = P + Q - 2AB \times Am$, w. z. b. w.

Zweiter Satz. Sei ABC (Taf. VI. Fig. 7.) wieder ein geradliniges Dreieck, in welchem der Winkel A ein stumpfer Winkel ist; errichtet man auf seinen drei Seiten Quadrate und fällt aus dem Scheitel C auf die gegenüberliegende Seite AB das Perpendikel Cm, so ist das auf der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite errichtete Quadrat grösser als die Summe der Quadrate auf den beiden andern Seiten, und dieser Ueberschuss ist gleich der Fläche des Rechtecks, dessen zwei anliegende Seiten $2AB$ und Am sind, oder, die obige Bezeichnung beibehaltend:

$$BCDE = P + Q + 2AB \times Am.$$

Beweis. Nach dem vorher erwähnten Lehrsatze ist $P + Q = BCGF = BCMH$. Da aber $BCMH = BCDE - BEHM$, so ist auch $P + Q = BCDE - DEHM$. Verlängere man ED bis P so, dass $EP = 2AB$ sei, und schneide auf EH $EK = Am$ ab, ziehe dann KL parallel zu EP, welche die Seite CD des Quadrats im Punkte N schneidet, ziehe endlich die Diagonale EI, so kann man wieder beweisen, dass der Punkt N in dieser Diagonale liegt. Nun ist ersichtlich, dass das Rechteck $DEHM = DEKN + HKNM$ sei und dass man statt des letztern das ihm gleiche $DNLP$ nehmen könne. Auf diese Art haben wir

$$P + Q = BCDE - DEHM = BCDE - (DEKN + HKNM)$$
$$= BCDE - (DEKN + DNLP) = BCDE - EKLP$$
$$= BCDE - EP \times EK = BCDE - 2AB \times Am,$$

also

$$BCDE = P + Q + 2AB \times Am.$$

XIX.

Einfacher Beweis des Lehrsatzes, welcher behauptet, dass zwei dreiseitige Pyramiden, die einander gegenbildlich (symmetrisch) gleich sind, gleich grossen Rauminhalt haben.

Von dem

Herrn Reallehrer ***P. G. H. Heinemann***

in Marburg *).

Man beschreibe um eine gegebene dreiseitige Pyramide eine Kugel, in deren Oberfläche die sämmtlichen Eckpunkte dieser Pyramide liegen.

Man erweitere die vier Grenzflächen der genannten Pyramide bis zum Durchschnitt mit der Kugeloberfläche.

Man hat alsdann, wie Taf. VII. Fig. 1. zeigt, ausser der dreiseitigen Pyramide, die wir mit P bezeichnen wollen, noch folgende zwei Arten von Raumstücken in dieser Kugel dargestellt:

1) Sechs zweieckige Stücke, welche längs den Kanten der dreiseitigen Pyramide liegen. Sie sind in Taf. VII. Fig. 1. mit s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 und s_6 bezeichnet. Jedes derselben ist eingeschlossen von zwei ebenen Kreissegmenten, welche zu Kugel-

---

*) Gleich nachdem ich meinen Beweis dieses Satzes im siebenten Theile dieser Zeitschrift pag. 284. u. ff. bekannt gemacht hatte, fand Herr Heinemann, welcher damals mein Zuhörer war, den vorliegenden Beweis und theilte ihn mir und einigen Freunden mit. Da mir dieser neue Beweis sehr interessant zu sein scheint, so habe ich Herrn Heinemann ersucht, ihn zu veröffentlichen. Prof. Hessel.

kreisen gehören, und von einem zweieckigen Kugelflächenstück, das von den Bögen dieser Kreissegmente begrenzt ist.

2) Vier dreieckige Raumstücke, welche auf den Grenzflächen der Pyramide aufliegen. Sie sind in Taf. VII. Fig. 1. bezeichnet mit d_1, d_2, d_3 und d_4. Jedes derselben ist eingeschlossen von einem ebenen Dreieck, welches zugleich Grenzfläche der Pyramide ist, von drei ebenen Kreissegmenten, welche in den Erweiterungen der drei übrigen Grenzflächen der Pyramide liegen und von einem dreieckigen Kugelflächenstück, das durch die Bögen dieser drei Kreissegmente begrenzt ist.

Stellt man das zu einer beliebigen Spiegelebene VV gehörige Spiegelbild der so zertheilten Kugel Taf. VII. Fig. 2. dar, so enthält dasselbe ein Spiegelbild der in Taf. VII. Fig. 1. vorhandenen Pyramide, welches wir mit Π bezeichnen wollen. Dasselbe enthält aber auch die zweieckigen Raumstücke σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5 und σ_6, die der Ordnung nach die Spiegelbilder der Stücke s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 und s_6 sind. Es enthält endlich die vier Raumstücke δ_1, δ_2, δ_3 und δ_4, welche der Reihe nach die Spiegelbilder der Raumstücke d_1, d_2, d_3 und d_4 sind.

Bezeichnet man die Kugel in Taf. VII. Fig. 1. mit F und die ihr congruente in Taf. VII. Fig. 2. mit Φ, so kann man die Inhalte beider Kugeln ausdrücken durch folgende Summen:

$$F = P + [s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6] + [d_1 + d_2 + d_3 + d_4],$$

wofür wir setzen wollen:

$$F = P + S + D$$

und

$$\Phi = \Pi + [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6] + [\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4],$$

was wir bezeichnen wollen durch:

$$\Phi = \Pi + \Sigma + \Delta.$$

Nun ist jedes der Stücke s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 und s_6 der Ordnung nach congruent dem mit derselben Ordnungszahl bezeichneten unter den Stücken σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5 und σ_6, denn es ist z. B.

$$s_1 \cong \sigma_1,$$

weil der Neigungswinkel der beiden Ebenen anb auf amb in Taf. VII. Fig. 1. gleich ist dem Neigungswinkel der Ebenen $a_1n_1b_1$ auf $a_1m_1b_1$ in Taf. VII. Fig. 2., während zugleich die Kreissegmente anb und

$m_1 b_1$, sowie die Kreissegmente amb und $a_1 m_1 b_1$ einander congruent sind.

Es folgt hieraus, dass

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6,$$

lso

$$S = \Sigma$$

ist.

Es ist ferner jedes der Stücke d_1, d_2, d_3 und d_4 der Ordnung ach an Grösse gleich dem mit gleicher Ordnungszahl bezeichneten unter den Stücken δ_1, δ_2, δ_3 und δ_4; denn es geht diese leichheit z. B. für d_1 und δ_1 daraus hervor, dass

$$[d_1 + s_1 + s_2 + s_5] \cong [\delta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5]$$

nd

$$s_1 + s_2 + s_5 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5$$

t, indem die Kugelsegmente $[d_1 + s_1 + s_2 + s_5]$ und $[\delta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5]$ nander congruent sein müssen, weil ihre kreisförmigen Grenzchen, in welchen die einander congruenten Seitenflächen aob d $a_1 o_1 b_1$ der Pyramiden liegen, in den beiden einander conenten Kugeln F und Φ gleich weit von deren Mittelpunkten entnt sind, während die Gleichheit der Summen $[s_1 + s_2 + s_5]$ und $[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5]$ daraus folgt, dass die einander entsprechenden ieder derselben congruent sind.

Ist aber

$$d_1 = \delta_1,\; d_2 = \delta_2,\; d_3 = \delta_3 \text{ und } d_4 = \delta_4;$$

o ist auch

$$D = \Delta.$$

Da also überhaupt

$$F \cong \Phi$$

der

$$P + S + D \cong \Pi + \Sigma + \Delta$$

nd

$$S = \Sigma,$$

o wie

$$D = \Delta$$

t, so ist auch

$$P = \Pi.$$

XX.

Ein Beitrag zum geometrischen Zeichnen.

Von

Herrn *Christoph Paulus*,

Lehrer der Mathematik an der Erziehungsanstalt auf dem Salon bei Ludwigsburg.

Mit Recht wird von Seiten der Behörden und Lehrer dem Unterricht im geometrischen Zeichnen immer mehr Ausdehnung eingeräumt, denn es ist dieses Fach nicht nur für die Industrie durch seine vielfache Anwendung in den Gewerben, sondern auch für den theoretischen Unterricht in der Geometrie, dem es ein frisches und reges Leben einzuhauchen vermag, von grosser Wichtigkeit. Auch hat nicht leicht ein anderer Unterrichtszweig in so kurzer Zeit gleich grosse Fortschritte gemacht. Es ist nicht nöthig, in dieser Beziehung an die rasche Entwickelung der Projektionslehre (géometrie déscriptive) zu erinnern, welche fast ihrem ganzen Umfange nach ein Produkt der neueren Zeit ist und den höheren Theil des geometrischen Zeichnens, die Zeichnung der körperlichen Gestalten in sich schliesst; denn auch der erste, niedere Theil des geometrischen Zeichnens, nämlich die Lehre von den Construktionen ebener Gestalten, hat eine reiche Entwickelung hinter sich. Zu diesem ersten Theile des geometrischen Zeichnens rechne ich nicht nur die Construktion ebener Figuren auf dem Papiere, sondern auch diejenige, welche im Dienste der Feldmesskunst auf der Oberfläche der Erde vorgenommen wird. In beiden Beziehungen sind Fortschritte gemacht worden. Ich erinnere nur an die neueren Leistungen hinsichtlich der Construktion der in- und umbeschriebenen Vielecke, mancher Construktionen am Kreis und einer noch grösseren Zahl an den Kegelschnitten, an die neueren Mittel, gerade Linien auf dem Felde

uszustecken, die Hindernisse halber nicht visirt werden können, und an manches Andere. Zu diesen materiellen Fortschritten gesellen sich noch andere formelle, die Methode des geometrischen Zeichnens betreffende, welche von nicht geringerer Bedeutung sind. Hiezu rechne ich dasjenige, was geschehen ist, um die Grundlagen des geometrischen Zeichnens, das Ziehen von Geraden und Kreislinien, oder also den Gebrauch des Lineals und des Zirkels selbst einer Untersuchung zu unterwerfen, und zu bestimmen, in wie weit diese Grundlagen für das Zeichnen nothwendig und unentbehrlich oder zulässig und vortheilhaft seien. Mit diesen Untersuchungen haben sich in neuerer Zeit angesehene Mathematiker dreier Nationen beschäftigt.

Der Italiener Mascheroni hat in seiner „Geometrie des Zirkels", von Carette in's Französische und von Grüson in's Deutsche (1825) übersetzt, gezeigt, dass alle geometrische Construktionen allein schon durch den Zirkel ohne Gebrauch des Lineals ausgeführt werden können und dass häufig diese cirkulären Construktionen vor denen des Lineals durch eine grössere Schärfe sich auszeichnen, wodurch sie besonders für Mechaniker zur Anfertigung feiner Instrumente sich eignen sollen. Gewiss ist, dass diese Methode gekannt zu werden verdient und im geometrischen Zeichnungsunterricht nicht ganz übergangen werden sollte. Schon wegen der Vermehrung des Uebungsmaterials verdient sie Beachtung.

Französische Mathematiker, Brianchon, Poncelet u. A., haben schon längst auf zahlreiche geometrische Construktionen hingewiesen, welche blos mittelst des Lineals ohne Hilfe des Zirkels ausgeführt werden können. Diese lineäre Construktion hat übrigens eine ziemlich beschränkte Anwendung, denn es eignen sich für dieselbe nur die Figuren von ganz allgemeinem Charakter. Wenn eine Figur durch Gleichsetzung gewisser Elemente bereits eine gewisse Symmetrie oder Regelmässigkeit an sich trägt und dadurch eine besondere Art von einer allgemeinen Gattung vertritt, so ist sie nicht auf linearem Wege zu construiren. So kann man auf linearem Wege wohl vier harmonische Punkte oder einen harmonischen Vierstrahl construiren, nicht aber eine Strecke oder einen Winkel halbiren, verdoppeln und auch nicht zwei auf einander senkrechte oder zwei einander parallele Gerade ziehen; auf linearem Wege kann man ferner wohl eine Figur zeichnen, welche einer anderen gegebenen collineär ist, aber nicht eine solche, welche ihr affin, ähnlich oder congruent wäre; auf linearem Wege kann man sodann wohl ein Vieleck von allgemeiner Gestalt, aber nicht ein gleichschenkliges oder gleichseitiges

Dreieck, ein Quadrat, Rhombus, Rechteck und überhaupt nicht ein Parallelogramm zeichnen; auf linearem Wege kann man endlich wohl eine Curve zweiter Ordnung construiren, welche durch fünf Elemente, seien es Punkte oder Tangentenrichtungen, gegeben ist, aber nicht eine Parabel, welche durch vier Elemente bestimmt ist, auch nicht eine gleichseitige Hyperbel, noch einen Kreis, wenn diese Curven durch drei Elemente gegeben sind. Trotz dieser beschränkteren Anwendung verdient die lineare Construktion um so mehr Beachtung, als sie nur die einfachsten Elemente des Raumes zu ihrem Zwecke gebraucht und daher eine tiefe Einsicht in die Natur der Raumgestalten voraussetzt und verlangt. Sie hat daher auch bis in die neueste Zeit nicht aufgehört, dem Forschungsgeiste der Geometer Nahrung zu geben.

Zwischen den zwei Extremen der linearen und der cirkulären Constructionsmethode hat Professor S t e i n e r einen Mittelweg in einem besonderen Werkchen (1832) bekannt gemacht, eine bedingt-lineare Constructionsweise, welche sich zwar auf den ausschliesslichen Gebrauch des Lineals beschränkt, aber doch dabei voraussetzt, dass in der Ebene des Zeichnungfeldes ein fester Kreis gegeben oder zu ziehen erlaubt ist. Diese bedingt-lineare Construktion ist nicht, wie die rein-lineare, blos auf eine kleinere Zahl von Figuren, sondern ganz allgemein auf alle Figuren, auch auf die symmetrischen und regelmässigen, anwendbar, führt aber nicht selten zu ziemlich grossen Verwickelungen. Wenn man gestattet, den Hilfskreis so zu ziehen, wie es für die jeweiligen Umstände am zweckmässigsten ist, so macht sich die Construktion oft einfacher als man erwartete. Wird der Gebrauch des Zirkels noch etwas mehr frei gegeben und erlaubt man, zwei feste Kreise nach Wahl zu ziehen, so gewinnt die Construktion häufig eine überraschend einfache Gestalt, welche nichts zu wünschen übrig lässt und vor jeder anderen den Vorzug verdient. Ich verweise in dieser Hinsicht auf die bedingt lineare Construktion der Kegelschnitte, welche ich im VI. Buch meiner Grundlinien der neueren Geometrie mitgetheilt habe, sowie auf den letzten Abschnitt (D) dieser vorliegenden Abhandlung.

Wie es nun aber für die Methode des geometrischen Zeichnens von grosser Wichtigkeit war, die Dienste kennen zu lernen, welche von den gebräuchlichsten Instrumenten zu erwarten sind, und die Vortheile, welche mit dem Gebrauch des einen oder des anderen verbunden sind, so ist es nicht minder nothwendig, auch die Ebene, auf welcher die Construktion vollzogen werden soll, einer Untersuchung zu unterwerfen. Denn mit dem, dass die Figur aus dem abstrakten Reich des Gedankens heraus in die Wirklich-

it der Welt hereintreten und wirklich construirt werden soll, hat
an sich nicht nur nach den Instrumenten, welche hiebei dienen
innen, umzusehen, sondern man hat auch den Raum, hier die
bene kennen zu lernen, welche die Figur fassen soll; weil auch
ese Ebene die Unvollkommenheiten der Realität an sich tragen
id der Ausführung neue Schwierigkeiten in den Weg setzen kann,
elche durch neue Hilfsmittel der Wissenschaft überwunden wer-
en müssen. Solche Schwierigkeiten werden sich in dem vorlie-
enden Falle, theils aus der Begrenzung und der damit verbun-
enen beschränkten Ausdehnung der Ebene erheben, welche zur
onstruktion dargeboten wird, theils aber auch aus den Uneben-
eiten ihrer Oberfläche. Diese Schwierigkeiten sind nun zwar
either nicht übersehen, aber doch auch nicht in ihrem ganzen
mfange aufgefasst worden, und desshalb konnten die Mittel ihrer
ebung in ihrer Allgemeinheit auch nicht namhaft gemacht wer-
en. Beides liegt in dem Plan der folgenden Zeilen, nämlich eine
mfassende Beleuchtung jener Schwierigkeiten und eine ebenso
llgemeine Lösung derselben; das erste wird zu einer Reihe meist
euer Aufgaben, das zweite zu einigen allgemeinen Methoden ihrer
uflösungen führen.

A. Unzugängliche Figuren.

In der Feldmesskunst heisst man einen Punkt unzugänglich,
enn er so gelegen ist, dass kein gangbarer Weg zu demselben
ihrt, während er übrigens von verschiedenen Punkten der Ebene,
i der er liegt, gesehen werden kann. Diese Unzugänglichkeit
t keine absolute; sie macht es zwar unmöglich, die Entfernungen
enes Punktes von den anderen Punkten der Ebene unmittelbar
u messen, aber sie gestattet doch, Richtungen zu ziehen, welche
urch denselben gehen. Der Punkt ist also für die in ihm con-
ergirenden Richtungen zugänglich und diese Zugänglichkeit bie-
et sodann auch die nöthigen Mittel, um die Entfernungen des
Punktes von anderen gegebenen Punkten der Ebene zu berech-
en. In einer reineren Form treten die unzugänglichen Punkte
eim geometrischen Zeichnen auf, wo von einer unendlichen Ebene
ur ein kleines Stück im Rahmen der Zeichnung eingeschlossen
egeben ist. Alle Punkte dieser Ebene, welche ausserhalb des
Rahmens der Zeichnung liegen, sind absolut unzugänglich; es
ann weder die Entfernung eines solchen Punktes von einem an-
eren Punkte der Ebene unmittelbar gemessen, noch können auf
nmittelbare Weise Richtungen gezogen werden, welche in dem-
elben convergiren. Das erste dieser Merkmale, nämlich die un-
ittelbare Maassnahme der Entfernung zweier Punkte, setzt aber

das zweite, nämlich das Ziehen der in dem Punkte convergirenden Richtungen voraus; da eine Strecke nicht messbar ist, wenn sie nicht gezogen werden kann. Das Hauptmerkmal der Unzugänglichkeit eines Punktes besteht also darin, dass Richtungen, welche durch denselben gehen sollen, nicht unmittelbar gezogen werden können.

Ein Punkt heisst also unzugänglich, wenn es Hindernisse halber nicht gestattet ist, Richtungen unmittelbar durch denselben zu ziehen.

Der Rahmen der Zeichnung ist nun aber von einer unendlichen Ebene umgeben, deren Punkte sämmtlich unzugänglich sind und welche sich nach Belieben zu unzugänglichen Figuren gruppiren lassen. Zwei, drei, vier oder mehrere unzugängliche Punkte bilden, wenn sie in einer Richtung liegen, eine zwei-, drei-, vier- oder vielpünktige unzugängliche Reihe, und wenn von jenen Punkten nicht drei in einer Richtung liegen, so bilden sie eine unzugängliche Strecke, ein unzugängliches Drei-, Vier- oder Vieleck. Wenn sich ein Punkt in der unzugänglichen Ebene bewegt, so beschreibt er eine unzugängliche Linie. Eine Gerade oder eine Curve heisst daher unzugänglich, wenn alle ihre Punkte unzugänglich sind. Es versteht sich aber von selbst, dass solche Linien auch zum Theil zugänglich und zum Theil unzugänglich sein können. Wenn eine Linie ganz zugänglich sein soll, so muss sie in sich selbst zurückkehren wie der Kreis, die Ellipse etc.; die Gerade kann nie ganz zugänglich, wohl aber ganz unzugänglich sein.

Trotz ihrer Unzugänglichkeit können solche Figuren vollkommen bestimmt sein. Durch zwei zugängliche Gerade, die aber nicht bis zu ihrem Durchschnitt verlängert werden können, wird ein unzugänglicher Punkt bestimmt; durch drei solche Gerade, welche nicht in einem Punkt convergiren, wird ein unzugängliches Dreieck; durch vier solcher Geraden, von welchen nicht drei in einem Punkte convergiren, werden sechs unzugängliche Punkte, welche vier dreipünktige Reihen und drei einfache Vierecke bilden, bestimmt; überhaupt werden durch n solcher Geraden $\frac{n(n-1)}{1.2}$ unzugängliche Punkte bestimmt, welche n unzugängliche $(n-1)$pünktige Reihen und $\frac{(n-1)!}{2}$ unzugängliche einfache Vielecke zusammensetzen. Durch drei unzugängliche Punkte wird auch ein Kreis bestimmt, der wenigstens zum Theil unzugänglich ist, durch vier solche Punkte wird eine unzugängliche Parabel, durch fünf eine wenigstens zum Theil unzugängliche Curve zweiten Grades

und durch mehr Punkte eine zum Theil unzugängliche Curve höherer Ordnung bestimmt. Das kleine Stück der Ebene, welches im Rahmen der Zeichnung eingeschlossen und dem ungehinderten Gebrauche überlassen ist, reicht also hin, um alle nur denkbare Figuren zu bestimmen, die ihrer Hauptausdehnung nach in dem unzugänglichen, unendlichen Theil der Ebene liegen, welche das Zeichnungsfeld umgiebt.

Mit allen diesen unzugänglichen Gestalten ist jedoch der in Rede stehende Gegenstand noch nicht erschöpft; denn es war bisher nur von der Unzugänglichkeit die Rede, welche in der beschränkten Ausdehnung des Zeichnungsfeldes ihren Grund hat. Ein anderer, eben so sehr zu beachtender Fall der Unzugänglichkeit entwickelt sich aus der Beschaffenheit der Oberfläche, auf der gezeichnet werden soll. Dieser Fall tritt ein, wenn man, wie solches beim Feldmessen geschieht, mit den Unebenheiten der Erdoberfläche zu kämpfen hat, die hier als Zeichnungsebene dient. Diese Unebenheiten und auch schon die grossen Ausdehnungen, die hier in Betracht kommen, machen Veränderungen des Zeichnens und Construirens nothwendig, die bis auf die Elemente desselben sich erstrecken. Ein eigentliches Ziehen der Linien ist nicht möglich; man betrachtet vielmehr eine Linie als gezogen, wenn dieselbe durch eine Reihe von lothrechten Stäben, die in kleineren Abständen auf einander folgen und als Punkte figuriren, ihrem Verlauf nach bezeichnet ist. Sind zwei solche Punkte gegeben, zwischen welchen man ungehindert sehen kann, so kann auch eine Gerade unmittelbar durch dieselben gezogen und soweit verlängert werden, als das Auge sehen kann, d. h. man kann zwischen jenen gegebenen Punkten und ausserhalb derselben auf der durch sie bestimmten Geraden weitere lothrechte Pfähle in kleineren Distanzen aufpflanzen. Wenn aber zwischen den gegebenen Punkten ein undurchsichtiger, hoher Gegenstand sich vorfindet, so dass von dem einen jener Punkte der andere nicht mehr gesehen wird, so kann die durch jene Punkte bestimmte Gerade nicht mehr gezogen werden, obgleich die zwei gegebenen und fast alle Punkte der Geraden vollkommen zugänglich sein können. Hier hat man den Fall einer unzugänglichen Richtung inmitten lauter zugänglicher Punkte.

Eine Richtung heisst also unzugänglich, wenn es Hindernisse halber nicht gestattet ist, Punkte unmittelbar auf derselben zu bezeichnen.

Die unzugängliche Richtung führt selbst wieder zu unzugänglichen Figuren. Zwei, drei, vier oder überhaupt n unzugängliche

Richtungen bilden, wenn sie in einem Punkte convergiren, einen unzugänglichen Zwei-, Drei-, Vier- oder nStrahl, wenn aber nicht drei derselben in einem Punkte convergiren, so bilden sie einen unzugänglichen Winkel, ein unzugängliches Drei-, Vier- oder nSeit. Wenn sich eine unzugängliche Richtung in einer Ebene bewegt, so hüllt sie eine unzugängliche Curve ein. Es können übrigens die Richtungen einer Figur auch zum Theil zugänglich und zum Theil unzugänglich sein.

Solche unzugängliche Figuren können durch zugängliche Punkte vollkommen bestimmt sein. Zwei zugängliche Punkte bestimmen eine unzugängliche Richtung, auf welcher keine anderen Punkte unmittelbar bestimmt werden können; durch drei solcher Punkte, die nicht in einer Richtung liegen, wird ein unzugängliches Dreiseit, durch vier solcher Punkte, von welchen nicht drei in einer Richtung liegen, werden sechs unzugängliche Richtungen bestimmt, die vier unzugängliche Dreistrahlen und drei unzugängliche einfache Vierseite bilden; durch n solcher Punkte, von welchen nicht drei in einer Richtung liegen, werden überhaupt $\frac{n(n-1)}{1.2}$ unzugängliche Richtungen bestimmt, welche n unzugängliche $(n-1)$strahlige Vielstrahlen und $\frac{(n-1)!}{2}$ einfache unzugängliche nSeite zusammensetzen. Durch drei unzugängliche Richtungen wird auch ein Kreis bestimmt, dessen Tangentenrichtungen wenigstens zum Theil unzugänglich sind. Aehnlich verhält es sich mit anderen Curven.

Es giebt dem Vorausgehenden gemäss zwei Reihen unzugänglicher Figuren, welche, wie man sehen wird, in dem Verhältniss der Reciprocität zu einander stehen. So wird man also vom rein praktischen Standpunkte aus ganz zu denselben Unterscheidungen hingedrängt, welche schon längst von Seiten der Theorie aufgestellt wurden. Wie die Theorie Punktgebilde und Strahlengebilde unterscheidet, jenachdem die Figuren durch Punkte oder Richtungen bestimmt werden, so führte die praktische Betrachtungsweise im Vorausgehenden zu zwei Reihen unzugänglicher Figuren, die unzugängliche Punktgebilde oder Strahlengebilde genannt werden müssen, je nachdem ihre Punkte oder Richtungen unzugänglich sind. Diese Unterscheidungen haben keine Schwierigkeit, nur die Gerade selbst erfordert Aufmerksamkeit, indem eine unzugängliche Gerade nicht mit einer unzugänglichen Richtung zu verwechseln ist. Eine Gerade heisst unzugänglich, wenn alle ihre Punkte es sind, wie dies bei einer Geraden der Fall ist, die ausserhalb des Rahmens der Zeichnungsebene liegt; dagegen

eisst eine Richtung unzugänglich, wenn das Mittel fehlt, um auf nmittelbare Weise die Punkte derselben zu bestimmen, während ie Punkte selbst zugänglich sind, wie dies bei den Punkten einer ichtung der Fall ist, die nicht visirt werden kann. Diese Unterscheidung hinsichtlich der Geraden und der Richtung möchte auch om theoretischen Standpunkte aus zu rechtfertigen sein, indem it dem Begriff der Richtung die Vorstellung des Einfachen und Intheilbaren und mit dem Begriff der Geraden die Vorstellung des 'heilbaren und Zusammengesetzten verbunden ist.

An den Begriff der unzugänglichen Figuren schliesst sich sogleich eine unendliche Zahl von Aufgaben und Construktionen an. Veil nämlich solche Figuren nur in Hinsicht des einen Theils ihrer Elemente unzugänglich, hinsichtlich des anderen Theiles aber zuänglich und vermöge dieser zugänglichen Elemente vollkommen estimmt sind, so können auch an den unzugänglichen Figuren lieselben Construktionen vorgenommen werden, wie an den zuänglichen, und es wird also durch den Begriff der unzugänglihen Figuren die Zahl der Construktion unmittelbar vervielfältigt, nd zwar geschieht diess um so mehr, als zwei Reihen unzugänglicher Figuren vorhanden sind und eine und dieselbe Figur in allen oder auch nur in einigen Punkten oder Richtungen unzugänglich sein kann; so führt z. B. die Aufgabe: von einem gegebenen Punkte A aus auf eine gegenüberstehende Gerade b eine Senkrechte zu fällen, zu sechs verschiedenen Construktionen, je nachdem das eine oder das andere der Bestimmungsstücke unzugänglich ist; denn es kann gegeben sein

1) ein unzugänglicher Punkt A und eine zugängliche Gerade b;
2) ein zugänglicher Punkt A und eine unzugängliche Gerade b;
3) ein unzugänglicher Punkt A und eine unzugängliche Gerade b;
4) ein zugänglicher Punkt A und eine unzugängliche Richtung b;
5) ein unzugänglicher (durch zwei unzugängliche Richtungen gegebener) Punkt A und eine zugängliche Richtung b;
6) ein unzugänglicher Punkt A und eine unzugängliche Richtung b.

Wenn die Zahl der einer Construktion zu Grunde liegenden Bestimmungsstücke grösser ist, so wird, durch die Einführung der unzugänglichen Elemente die Zahl der Construktionen noch n ungleichem Verhältnisse vergrössert. Aber auch hiermit ist die Zahl dieser Construktionen noch nicht erschöpft, denn es giebt noch eine Reihe von Construktionen, welche ausschliesslich nur n den unzugänglichen Figuren vorgenommen werden können und velche also den unzugänglichen Figuren eigenthümlich sind und

desshalb eine besondere Beachtung verdienen. In einer ganz zugänglichen Ebene schliesst nämlich jede Figur wohl auch zweierlei Elemente, Punkte und Richtungen ein, die von einander abhängen, allein es hat keine Schwierigkeit, von den einen auf die anderen überzugehen, es kann diess vielmehr auf unmittelbare Weise geschehen; hier aber in einer unzugänglichen Figur, wo nur ein Theil der Elemente zugänglich ist, muss erst auf künstlichem Wege die durch die unzugänglichen Elemente unterbrochene Continuität der Figur wieder hergestellt und der Uebergang von den einen Elementen zu den anderen gefunden werden. Es erwächst also die Aufgabe, gerade Linien zu ziehen, welche durch zwei unzugängliche Punkte bestimmt und gegeben sind, Punkte zu bezeichnen, welche durch zwei unzugängliche Richtungen bestimmt werden. Hierher gehören auch die bekannten Aufgaben: durch den unzugänglichen Convergenzpunkt zweier gegebenen Geraden noch andere Gerade zu ziehen und Punkte zu bestimmen, welche auf einer nicht visirbaren Richtung liegen.

Wie mannigfaltig aber die Aufgaben an unzugänglichen Figuren auch sein mögen, so können doch alle nach einer allgemeinen Methode aufgelöst werden, welche dem Wesentlichen nach darin besteht, dass man die Construktion der unzugänglichen Figur auf eine Construktion an einer zugänglichen Figur reducirt. Hierzu bietet die perspektivische Collineation ein ausreichendes und sehr einfaches Mittel dar. Wie dieses Mittel zu gebrauchen und wie in besonderen Fällen, um gewissen Rücksichten zu genügen, diese oder jene Form der Collineation vortheilhaft gebraucht werden kann, das wird sich am Besten an bestimmten Figuren zeigen lassen.

B. Erste Methode der Construktion unzugänglicher Figuren.

Die perspektivische Collineation im engeren Sinne findet ihre Anwendung, wenn die Construktion auf linearem Wege geschehen soll, und kann sich also nur auf die Fälle erstrecken, welche sich für die lineare Construktion eignen, also gerade auf die Fälle, welche im Vorausgehenden als die eigenthümlichen Construktionen unzugänglicher Figuren bezeichnet worden sind.

I. Es sollen die Diagonalen eines Vierseits *abcd*, dessen Ecken alle unzugänglich sind, gezeichnet werden.

Erster Fall: Die vier gegebenen Richtungen *a*, *b*, *c*, *d* haben eine solche Lage, dass man gerade Linien ziehen kann,

durch welche jene Richtungen in vier zugänglichen Punkten geschnitten werden. Es muss zuerst ein Hilfsvierseit gezeichnet werden, welches lauter zugängliche Ecken hat und dem gegebenen Vierseit $abcd$ perspektivisch collineär ist, und hiebei ist die Wahl des Centrums, der Axe und eines Paares homologer Elemente der Willkühr freigestellt. Im vorliegenden Falle wird man die Axe x (Taf. VII. Fig. 3.) so nehmen, dass sie die gegebenen Richtungen a, b, c, d in zugänglichen Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ schneidet; die homologen Richtungen m und m', welche mit der Axe x in einem Punkte X convergiren, wird man so ziehen, dass wenigstens eine derselben, etwa m, von den gegebenen Richtungen a, b, c, d ebenfalls in zugänglichen Punkten A, B, C, D geschnitten wird; endlich wird man noch das Centrum O so wählen, dass die Collineationsstrahlen OA, OB, OC und OD von der Geraden m' in zugänglichen Punkten A', B', C', D' geschnitten werden. Zieht man nun $\mathfrak{A}A'$, $\mathfrak{B}B'$, $\mathfrak{C}C'$, $\mathfrak{D}D'$, so sind diess die Richtungen a', b', c', d', welche den gegebenen Richtungen homolog sind und also das verlangte perspektivisch collineare Vierseit bilden. Zeigt es sich nun, dass die sechs Ecken M', N', R', S', V', W' dieses Vierseits $a'b'c'd'$ alle zugänglich sind, so ist diess ein Zeichen, dass die Wahl der Stücke O, x, m und m' glücklich war; sollten aber von jenen sechs Ecken, eines oder mehrere nicht zugänglich sein, so muss man wenigstens mit einem jener Stücke, am besten mit der Lage von m' eine Aenderung vornehmen. In der Regel wird man finden, dass es zweckmässig ist, der Richtung m' eine solche Lage zu geben, dass $\angle \mathfrak{A}XA' < \angle \mathfrak{A}XA$, indem alsdann das Vierseit $a'b'c'd'$ eine kleinere Ausdehnung erlangt; übrigens ist auch darauf zu sehen, dass dieses Vierseit nicht eine allzu kleine und gedrückte Gestalt annehme. Sind nun die Ecken des Vierseits $a'b'c'd'$ alle zugänglich, so wird man auf unmittelbare Weise die Diagonalen $M'N'$, $R'S'$ und $V'W'$ desselben ziehen und hierauf die homologen Aequivalente derselben im System $abcd$ aufsuchen und damit die der Aufgabe genügenden Richtungen haben. Das Letztere geschieht einfach dadurch, dass man die Punkte $\mathfrak{P}$ und P', in welchen die Axe x und die Gerade m' von einer Diagonale $M'N'$ geschnitten wird, bemerkt, den Collineationsstrahl OP' zieht und dessen Schnittpunkt P mit der Geraden m durch eine Gerade $P\mathfrak{P}$ mit dem Punkte $\mathfrak{P}$ verbindet. Die Richtung $P\mathfrak{P}$ ist nämlich, als Element des Systems $abcd$, der Richtung $M'N'$ des Systems $a'b'c'd'$ homolog, weil diese Richtungen durch die homologen Punkte P' und P der Systeme gehen und in einem Punkte $\mathfrak{P}$ ihrer Axe convergiren. Weil nun aber in collineären Systemen homologe Richtungen in homologen Punkten convergiren, so wird die Richtung $P\mathfrak{P}$ sowohl mit a und c in einem

Punkte M, als auch mit b und d in einem Punkte N convergiren, wie in dem System $a'b'c'd'$ die Diagonale $M'N'$ durch die Punkte M' und N', d. i. durch die Convergenzpunkte der Richtungen a', c' und b', d' geht. Ganz auf dieselbe Weise gelangt man auch zu den Diagonalen $(ab)(cd)$ *) und $(ad)(bc)$ des gegebenen Vierseits, welche beziehungsweise mit $V'W'$ und $R'S'$ homolog sind.

Zweiter Fall: Die vier gegebenen Richtungen a, b, c, d haben eine solche Lage, dass sie nicht gestatten, eine Richtung zu ziehen, welche mit den gegebenen Richtungen in vier zugänglichen Punkten convergirt. Dieser Fall kann dem Wesentlichen nach auf den ersten zurückgeführt werden. Nimmt man nämlich auf der Richtung a zwei Punkte E und F und auf der gegenüberstehenden Richtung c zwei andere Punkte G und H nach Belieben und verbindet diese vier Punkte durch Gerade, die man nach Gutdünken mit den Buchstaben e, f, g, h bezeichnen kann, so werden die Richtungen e, f, g, h, b, d jedenfalls eine solche Lage haben, dass sie durch eine andere Gerade in lauter zugänglichen Punkten geschnitten werden kann. Man wird also, wie in dem vorausgehenden Fall, zu dem System $bdefgh$ ein perspektivisch collineares System $b'd'e'f'g'h'$ mit lauter zugänglichen Ecken zeichnen können, und dasselbe wird auch die Elemente a' und e', welche den Elementen a und e homolog sind, unmittelbar liefern, und im Uebrigen das gleiche Verfahren zur Bestimmung der Diagonalen des Vierseits $abcd$ wie im ersten Fall zur Anwendung bringen lassen.

II. Es sollen die Diagonalen eines Vierseits $abcd$ gezeichnet werden, dessen Ecken alle bis auf das Eck R der Seiten a und b unzugänglich sind.

Die in I. gegebene allgemeine Methode kann hier dahin abgeändert und dadurch vereinfacht werden, dass man das Collineationscentrum O in das zugängliche Eck R verlegt. Man gewinnt hiedurch den Vortheil, dass nur noch zu den zwei Seiten c und d ihre collineären Aequivalente c' und d' aufgesucht werden dürfen, indem die Richtungen a und b beiden Systemen gemeinsam angehören. Die Richtungen, welche den Diagonalen des Hilfsvierseits $abc'd'$ in dem System der gegebenen Richtungen homolog sind, genügen der Aufgabe.

III. Es sollen die Diagonalen eines Vierseits $abcd$ gezogen werden, von welchem drei nicht in einer Richtung liegende Ecken R, V, W zugänglich, die drei anderen Ecken aber unzugänglich sind.

*) $(ab)(cd)$ bedeutet die Richtung, welche den Convergenzpunkt der Richtungen a und e mit dem Convergenzpunkt der Richtungen c und d verbindet.

Man wird hier nicht nur ein zugängliches Eck R (Taf. VII. Fig. 4.) um Centrum O der Collineation wählen, sondern auch die Diagonale VW der zwei anderen zugänglichen Ecken als die demselben System angehörige Hilfslinie m betrachten, so dass man nur noch die Axe x und die Gerade m' so zu ziehen hat, dass diese drei Linien in einem Punkte X convergiren. Die in dem Centrum O convergirenden Richtungen b und e werden auf m' die Punkte V' und W' bezeichnen, welche den Punkten V und W homolog sind, während die zwei anderen Richtungen a und d auf der Axe x die Punkte $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ bestimmen. Durch diese Punkte werden sodann die Richtungen $\mathfrak{W}W'$ und $\mathfrak{V}V'$ oder a' und d' bestimmt, welche mit b und c das Vierseit $a'd'bc$ bilden, dessen Diagonalen $M'N'$ und $R'S'$ gezogen werden können. Die Richtungen des Systems $abcd$, welche den Diagonalen $M'N'$ und $R'S'$ homolog sind, genügen der Aufgabe. Man wird die der Diagonale $M'N'$ homologe Richtung $P\mathfrak{P}$ wie in I. construiren, dagegen ist RS' als Collineationsstrahl beiden Systemen entsprechend gemeinschaftlich, und ist daher unmittelbar auch die Diagonale des gegebenen Vierseits $abcd$, welche das Eck R mit dem Convergenzpunkte ad verbindet.

IV. Es sollen die Diagonalen eines Vierseits $abcd$ gezeichnet werden, dessen Ecken alle bis auf eine, nämlich das Eck ad, zugänglich sind.

Die fünf zugänglichen Ecken bestimmen unmittelbar zwei Diagonalen MN und VW (Taf. VII. Fig. 5.), welche selbst wieder in einem zugänglichen Eck O convergiren können. Ist diess Letztere der Fall, so kann man O als Collineationscentrum nehmen und den übrigen Stücken eine solche Bedeutung geben, dass dadurch nicht nur eine perspektivische, sondern sogar eine involutorische Collineation begründet wird. Zu dem Ende wird man die Richtungen MW und NV einerseits, sowie auch die Richtungen MV und NW andererseits, als zwei Paare homologer Richtungen betrachten, welche auf der Axe in zwei Punkten convergiren. Der Convergenzpunkt R des letzten Paares ist unmittelbar gegeben, derjenige des ersten Paares ist unzugänglich; dennoch kann die Richtung der Axe leicht gefunden werden, wenn man noch einen Collineationsstrahl zieht, der die Richtungen MW und NV in den homologen Punkten P und P' schneidet und dadurch die weiteren homologen Richtungen MP' und NP bestimmt, die in einem zweiten Punkte T der Axe convergiren. Die Gerade RT ist somit die Axe der involutorischen Systeme und convergirt also mit MW und NV oder mit a und d in einem unzugänglichen Punkte.

V. Von einem zugänglichen Punkt R aus nach einem

unzugänglichen Punkte, der durch die Richtungen a und b gegeben ist, eine Gerade zu ziehen.

Diese allgemein bekannte praktische Aufgabe wird unmittelbar durch Zurückführung auf III. oder IV. aufgelöst, indem man durch den Punkt R zwei Richtungen zieht, welche die Richtungen a und d in zwei zugänglichen Punkten V und W (Taf. VII. Fig. 4.) schneidet oder auch indem man zwei solche Richtungen zieht, welche die Richtungen a und d in vier zugänglichen Punkten M, V, N, W (Taf. VII. Fig. 5.) schneidet.

VI. Es ist ein Viereck $ABCD$ mit lauter unzugänglichen Seitenrichtungen gegeben; man soll die Convergenzpunkte der drei Gegenseitenpaare construiren.

Es muss zu dem Vierecke $ABCD$ (Taf. VIII. Fig. 6.), ohne von den Seitenrichtungen desselben Gebrauch zu machen, ein collineäres und perspektivisch liegendes Viereck construirt werden und dabei können das Centrum O, die Axe x und zwei homologe Punkte M und M' nach Belieben gewählt werden. Zur Raumersparniss ist es dienlich, die Punkte M und M' mit dem Centrum O auf einer Seite der Axe x, und zwar so zu nehmen, dass M' zwischen M und O zu liegen kommt, weil dann die Ecken des collineären Hilfsvierecks zwischen dem Centrum O und den Ecken des gegebenen Vierecks $ABCD$, also jedenfalls im zugänglichen Theil der Zeichnungsebene liegen. Hat man die Wahl der die Collineation bestimmenden Stücke getroffen, so wird man das collineäre Hilfsviereck leicht zeichnen. Um z. B. den homologen Punkt zu dem Eck A zu finden, wird man den Punkt $\mathfrak{A}$, in welchem die Axe x von der Richtung MA geschnitten wird, mit M' verbinden und den Collineationsstrahl OA ziehen; die Geraden OA und $\mathfrak{A}M'$ bestimmen den gesuchten Punkt A'. Hat man auf diese Weise die Punkte A', B', C' und D' bestimmt, so kann man unmittelbar die Convergenzpunkte E', F' und G' der Gegenseiten des Vierecks $A'B'C'D'$ finden, und sodann im System des gegebenen Vierecks $ABCD$ die homologen Punkte E, F und G aufsuchen. Durch drei Geraden kann ein jeder dieser Punkte construirt werden; durch die Gerade $M'E'$ z. B. bestimmt man den Punkt $\mathfrak{E}$ auf der Axe x, und die zwei Geraden $M\mathfrak{E}$ und OE' bestimmen den Punkt E, welcher dem Punkt E' homolog ist und so liegt, dass in ihm die unzugänglichen Richtungen AB und CD convergiren.

VII. Es ist ein Viereck $ABCD$ gegeben, dessen Seitenrichtungen alle bis auf AB unzugänglich sind; man soll die Convergenzpunkte der drei Gegenseitenpaare construiren.

Die in VI. angegebene allgemeine Methode gewinnt in diesem esonderen Falle an Einfachheit, wenn man die zugängliche Richtng AB zur Collineationsaxe macht, im Uebrigen jedoch auf leiche Weise wie in VI. verfährt.

VIII. Es ist ein Viereck $ABCD$ gegeben, in welchem los die drei Seitenrichtungen AB, BC und AD zuäuglich sind; man soll die Convergenzpunkte der rei Gegenseitenpaare construiren.

Man wird AB zur Collineationsaxe wählen (Taf. VIII. Fig. 7.), en Convergenzpunkt F der zwei anderen zugänglichen Richtunen BC und AD zeichnen, und bei der Wahl des Centrums O und ines Paares homologer Punkte eben den Punkt F zu einem der etzteren nehmen. Hat man also die Punkte O und F' auf einer urch F gehenden Richtung bezeichnet, so darf man nur auf $F'A$ und $F'B$ die Punkte C' und D' bemerken, in welchen jene Richtungen von den Strahlen OC und OD geschnitten werden, m die Richtung $C'D'$ zu haben, welche mit der unzugänglichen Richtung CD in einem und demselben Punkte der Axe AB conergirt. Auch den Convergenzpunkt G der zwei anderen unzuänglichen Richtungen AC und BD wird man mittelst des Conergenzpunktes G' der Richtungen $A'C'$ und $B'D'$ sogleich zu eichnen wissen.

IX. Es ist ein Viereck $ABCD$ gegeben, in welchem lle Seitenrichtungen bis auf die eine, CD, zugänglich ind; man soll den Punkt finden, in welchem diese unugängliche Richtung mit ihrer Gegenseite AB conergirt.

Hier, wo fünf Richtungen zugänglich sind, kann man die inolutorische Involution in Anwendung bringen. Man wird die Diaonale FG (Taf. VIII. Fig. 8.) als die Axe und die Richtungen AD nd BC einerseits, AC und BD andererseits als Paare homoloer Richtungen betrachten. Zieht man also von den homologen Punkten A und B aus durch einen beliebigen Punkt K der Axe FG zwei weitere homologe Richtungen, so werden auch sie auf len homologen Richtungen BC und AD zwei homologe Punkte L und M bestimmen. Die Richtungen LM, AB und CD, deren ede zwei homologe Punkte verbindet, sind somit Collineationstrahlen der involutorischen Systeme und convergiren in einem nd demselben Punkte E. Dieser Punkt, durch die zugänglichen Richtungen AB und LM bestimmt, genügt also der Aufgabe.

X. Es sei durch zwei Punkte C und D eine unzu-

gängliche Richtung gegeben; man soll auf derselben denjenigen Punkt finden, in welchem sie von einer gegebenen zugänglichen Richtung geschnitten wird.

Diese Aufgabe wird auf VIII. oder auf IX. zurückgeführt, wenn man auf der zugänglichen Richtung noch zwei andere Punkte A und B nimmt, welche, mit den Punkten C und D verbunden, weitere zugängliche Richtungen liefern, von welchen man drei (VIII.) oder fünf (IX.) gebrauchen kann. Es ist kaum nöthig, zu erwähnen, dass es für die Construktion gleichgültig ist, ob die Richtung AB zwischen C und D durchgeht oder die Richtung CD erst in ihrer Verlängerung schneidet.

Bemerkung. Es ergeben sich wohl noch manche besondere Fälle, theils dadurch, dass eine andere, im Vorausgehenden nicht berücksichtigte Zahl der zugänglichen Elemente gegeben ist, theils dadurch, dass die gegenseitige Lage derselben zu einander verschieden ist, theils endlich auch dadurch, dass in einer Figur unzugängliche Punkte und unzugängliche Richtungen gemischt vorkommen, allein die zehn angeführten Fälle werden genügen, um zu zeigen, welche Abänderungen in der allgemeinen Methode (I. und VI.) vorzunehmen sind, um auf die einfachste Art zum erwünschten Ziele zu gelangen. Auch ist absichtlich die Construktion unzugänglicher Curven zweiter Ordnung übergangen worden, weil sie nichts Eigenthümliches darbietet, sondern auf die Construktion unzugänglicher Fünfecke und Fünfseite zurückgeführt werden muss. Sollte z. B. eine Curve zweiter Ordnung gezeichnet werden, welche durch fünf unzugängliche Punkte geht, so müsste zunächst ein collineäres zugängliches Fünfeck gezeichnet, eine Curve zweiter Ordnung um dasselbe beschrieben und die aequivalenten Elemente derselben in dem Systeme der gegebenen fünf Punkte wieder aufgesucht werden.

C. Zweite Methode der Construktion unzugänglicher Figuren.

Eine zweite, nicht nur für die im vorausgehenden Abschnitt behandelten Aufgaben, sondern bei der Construktion unzugänglicher Figuren ganz allgemein anwendbare Methode liefert die Aehnlichkeit perspektivisch liegender Figuren. Wie nun aber die erste Methode unvermeidlich ist, wenn die Construktion auf linearem Wege geschehen soll, so ist auch diese zweite Methode unentbehrlich, wenn die zu zeichnende Figur sich nicht für die lineäre Construktion eignet, also irgend welche Bestimmungen der Sym-

metrie oder Regelmässigkeit an sich trägt. Obgleich nun die Aehnlichkeit nur ein besonderer Fall der Collineation ist, der darin seine Eigenthümlichkeit hat, dass die Collineationsaxe im unendlichen Raume liegt, und obgleich also auch hier nach den Regeln des vorausgehenden Abschnitts gezeichnet werden kann, so hat dieser besondere Fall doch auch wieder seine besondern Vortheile und Zeichnungsregeln, welche an folgenden Beispielen zu ersehen sind.

XI. Es soll die Aufgabe I. durch die Aehnlichkeit perspektivisch liegender Vielecke aufgelöst werden.

Wenn die gegebenen Richtungen eine solche Lage haben, dass sie durch eine Gerade in vier zugänglichen Punkten geschnitten werden können, so kann die bei I. gegebene Construktion mit den für den besonderen Fall der Aehnlichkeit nöthigen Abänderungen in Anwendung gebracht werden. Weil die Axe x im unendlichen Raum liegt, so müssen die Hülfslinien m und m' einander parallel sein, wie überhaupt alle homologen Linien einander parallel sind; im Uebrigen kann man ganz das bei I. angegebene Verfahren wiederholen.

Wenn aber die gegebenen Richtungen nicht gestatten, durch eine Gerade in vier zugänglichen Punkten geschnitten zu werden, so gewährt das Mittel der perspektivischen Aehnlichkeit ein einfacheres Verfahren, als die Collineation im engeren Sinne, ein Verfahren, das auch sonst in ähnlichen Fällen anwendbar ist. Dieses Verfahren besteht darin, dass man dem Vierseit $abcd$ ein anderes Vierseit einbeschreibt, dessen zugängliche Ecken A, B, C, D beziehlich auf den Seiten a, b, c, d des gegebenen Vierseits liegen, und nun mittelst eines im zugänglichen Raum beliebig gewählten Centrums O und seiner Strahlen OA, OB, OC und OD ein ähnliches Vierseit $A'B'C'D'$ dadurch zeichnet, dass man zwischen den Collineationsstrahlen $A'B' \parallel AB$, $C'D' \parallel CD$, $A'C' \parallel AC$, $B'D' \parallel BD$ zieht. Diese zwei homologen Vierseite $ABCD$ und $A'B'C'D'$ vermitteln die zwei Systeme und haben dieselbe Bedeutung wie früher die Richtungen m und m'. Zieht man nämlich jetzt durch den Punkt A' die Richtung $a' \parallel a$, und ebenso durch die Punkte B', C', D' die Richtungen $b' \parallel b$, $c' \parallel c$, $d' \parallel d$, so ist das Vierseit $a'b'c'd'$ dem gegebenen Vierseit homolog, und wird, wenn die Lage von A' zwischen O und A dem Zweck entsprechend gewählt wurde, lauter zugängliche Ecken zeigen, so dass die Diagonalen $M'N'$, $R'S'$, $V'W'$ gezeichnet werden können. Die Richtungen MN, RS, VW, welche diesen Diagonalen im System des gegebenen Vierseits homolog sind, ent-

sprechen der Aufgabe. Um aber die letzteren, etwa MN, zu finden, wird man nur die Punkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{N}'$ bemerken, in welchen der Umfang $A'B'C'D'$ von $M'N'$ geschnitten wird, durch die Punkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{N}'$ die Collineationsstrahlen $O\mathfrak{M}'$ und $O\mathfrak{N}'$ ziehen und die Schnittpunkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ dieser Strahlen mit dem Umfang $ABCD$ durch eine Gerade verbinden; dieselbe wird durch die unzugänglichen Ecken M und N des gegebenen Vierseits $abcd$ gehen.

Wenn bei der vorausgehenden Aufgabe einige Ecken zugänglich sind, so lassen sich ähnliche Vereinfachungen der Construktion anbringen, wie solche im vorausgehenden Abschnitt für den Fall der Collineation angeführt wurden. Es wird genügen, hier statt der vielen Fälle nur den folgenden ausführlicher zu behandeln.

XII. **Von dem zugänglichen Punkte R aus nach dem unzugänglichen Convergenzpunkte der Richtungen a und d eine Gerade zu ziehen.**

Nimmt man R (Taf. VIII. Fig. 9.) als Collineationscentrum und zieht die homologen Parallelen m und m', von welchen die letztere zwischen R und m, die Richtung m aber so liegt, dass sie von den gegebenen Richtungen a und d in den Punkten A und D geschnitten wird, so werden die Collineationsstrahlen RA und RD auf m' die Punkte A' und D' bezeichnen, welche mit A und D homolog sind. Zieht man also noch $A'S' \parallel a$, $D'S' \parallel d$, und verbindet den Convergenzpunkt S' dieser Richtungen mit dem Centrum R durch eine Gerade, so ist dieselbe ebenfalls ein Collineationsstrahl, welcher durch den unzugänglichen Convergenzpunkt S der gegebenen Geraden a und d gehen wird.

Zu einer anderen eben so einfachen Auflösung gelangt man, wenn man den unzugänglichen Convergenzpunkt der Geraden a und d als Collineationscentrum betrachtet, wie vorher das Dreieck RAD (Taf. VIII. Fig. 10.) und sodann noch ein zweites perspektivisch ähnliches dadurch zeichnet, dass man $A'D' \parallel AD$, $A'R' \parallel AR$, $D'R' \parallel DR$ zieht und dadurch den Punkt R' bestimmt, welcher dem Punkte R homolog ist, und also so liegt, dass die Richtung RR' durch das Centrum, d. h. durch den Convergenzpunkt der gegebenen Richtungen a und d geht.

XIII. Die Aufgabe VI. wird, wenn sie durch das Mittel der Aehnlichkeit aufgelöst werden soll, so wenig verändert, dass es nicht nöthig scheint, weiter darauf einzugehen. Die Punkte O, M', M in einer beliebigen Richtung bleiben der Wahl überlassen, die Axe x liegt im unendlichen Raum, alle homologen Richtungen sind einander parallel. Es wird daher genügen, einen be-

sonderen Fall anzuführen, um die Vereinfachung zu sehen, welche lie allgemeine Methode in einzelnen Fällen erleiden kann.

XIV. Auf einer zugänglichen Richtung r den Punkt u finden, in welchem sie von einer unzugänglichen ichtung geschnitten wird, die durch zwei zugäng-che Punkte A und B gegeben ist.

Man nehme auf der Richtung r den Punkt R (Taf. VIII. Fig. 11.) eliebig und betrachte ihn als das Centrum der ähnlichen Sy-teme; auf einer anderen beliebigen, durch R gehenden Richtung ehme man die homologen Punkte M' und M jener Systeme, so ind hierdurch die Systeme bestimmt. Nun ziehe man MA, MB nd hierauf $M'A' \parallel MA$, $M'B' \parallel MB$, bemerke die Schnittpunkte l' und B', welche diese Richtungen mit den Strahlen RA und RB hervorbringen, und ziehe die Richtung $A'B'$, welche mit r in inem Punkte S' convergiren wird. Zieht man nun $M'S'$ und lurch den Punkt M die Richtung $MS \parallel M'S'$, so wird dieselbe uf r den gesuchten Punkt S bestimmen.

Man kann auch den gesuchten Convergenzpunkt hier mit Vor-heil zum Centrum nehmen, die Punkte R und R' (Taf. VIII. Fig. 12.) eliebig auf r anmerken, diese Punkte entsprechend mit A und B erbinden, sodann nach Belieben die Richtungen RM und AM nd endlich noch $R'M' \parallel RM$, $BM' \parallel AM$ ziehen, so wird die Richtung MM' mit r und AB in einem Punkte S convergiren und lso den gesuchten Punkt auf r bestimmen.

XV. Es ist durch drei Richtungen a, b, c ein unzu-gängliches Dreieck gegeben; man soll die Höhen des-elben construiren.

Nachdem das Centrum O gewählt, das dem gegebenen Drei-seit abc inbeschriebene Dreieck ABC (Taf. VIII. Fig. 13.) und sein homologes Aequivalent $A'B'C'$ durch Parallelen zwischen den Col-lineationsstrahlen OA, OB, OC gezeichnet ist, werden durch lie Punkte A', B', C' mit den gegebenen Richtungen a, b, c Parallelen gezogen, welche das Dreieck $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ bestimmen, das lem gegebenen perspektivisch ähnlich ist und zugängliche Ecken eigt. Construirt man nun die Höhen des Dreiecks $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ und ucht ihre homologen Aequivalente im System der gegebenen Rich-ungen a, b, c auf, so entsprechen sie der Aufgabe. Das Letztere eschieht einfach dadurch, dass man durch die Schnittpunkte m' nd n', in welchen der Umfang des Dreiecks $A'B'C'$ von der löhe $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ des Dreiecks $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ geschnitten wird, die Collinea-ionsstrahlen Om' und On' zieht und die Punkte m und n, welche

durch dieselben auf dem Umfang des Dreiecks ABC bezeichnet werden, durch eine Gerade $\mathfrak{CD}$ verbindet. Diese Gerade wird nämlich die durch das Eck ab gehende Höhe des gegebenen Dreiecks sein. Wenn es sich blos darum gehandelt hätte, den Fusspunkt $\mathfrak{D}$ dieser Höhe zu finden, so wäre derselbe unmittelbar durch den Collineationsstrahl $O\mathfrak{D}'$ zu bestimmen gewesen.

XVI. **Es ist durch die Punkte A, B, C ein unzugängliches Dreiseit gegeben; man soll seine Höhe construiren.**

Man wählt das Centrum O und die homologen Punkte M und M' der ähnlichen Systeme nach Belieben, construirt dann wie in XIII. ein Dreieck $A'B'C'$, welches dem gegebenen ähnlich ist, construirt die Höhen des letzteren und sucht ihre homologen Aequivalente in dem Systeme des gegebenen Dreiseits wieder auf, so genügen sie der Aufgabe.

D. Dritte Methode der Construktion unzugänglicher Figuren.

Zwei concentrische Kreise sind für ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt als Centrum perspektivisch ähnlich. Zwei solche Kreise bestimmen daher zwei perspektivisch ähnliche Systeme und gewähren zugleich einen sehr leichten Uebergang von den Richtungen des einen Systems zu den homologen Richtungen des andern Systems, wenigstens in allen denjenigen Fällen, wo die Kreislinien von den Richtungen ihrer Systeme geschnitten werden. Denn wenn man an die zwei Schnittpunkte, in welchen eine Richtung und die Kreislinie eines Systems sich schneiden, zwei Halbmesser zieht, so bezeichnen die Richtungen dieser Halbmesser, weil sie zugleich Collineationsstrahlen sind, auf der Kreislinie des zweiten Systems diejenigen Punkte, welche jenen Schnittpunkten des ersten Systems homolog sind; die Richtung, welche durch diese zwei Punkte des zweiten Systems geht, ist also der gegebenen Richtung des ersten Systems homolog. Man sieht hieraus, dass, wenn eine Richtung des ersten Systems gegeben ist, welche den zugehörigen Kreis in zwei Punkten schneidet, die homologe Richtung des zweiten Systems vermittelst dreier gerader Linien ohne Hilfe des Lineals gefunden werden kann. Sobald also die zwei concentrischen Kreise gezogen sind, so ist der Uebergang von den Elementen des einen Systems zu den homologen Elementen des anderen Systems auf rein linearem Wege zu

bewerkstelligen. Es ist also einleuchtend, wie durch die Construktion von zwei concentrischen Kreisen die im vorausgehenden Abschnitt behandelte Methode der ähnlichen und perspektivisch liegenden Kreise namhaft vereinfacht wird. Ich glaube keck sagen zu dürfen, dass diese Methode der concentrischen Kreise für die vorliegende Construktion alle Vorzüge in sich vereinigt, um sie für den praktischen Gebrauch als die beste empfehlen zu können. Nur in den Fällen, wo überhaupt die ähnlichen Systeme weniger Genauigkeit darbieten, wird der Praktiker ihr die erste rein lineare Methode vorziehen, was namentlich in einem Falle, wie der in Taf. VII. Fig. 3. dargebotene, wo die gegebenen Richtungen sich unter sehr kleinen Winkeln schneiden, geschehen möchte. Ein Blick auf Taf. VII. Fig. 3. zeigt, dass die Seiten des Hilfsvierseits $a'b'c'd'$ sich unter viel grösseren Winkeln schneiden, als die homologen Seiten des gegebenen Vierseits $abcd$, und diese Gestaltsverhältnisse sind bei dem kleinen Raum der Hilfsgestalt $a'b'c'd'$ offenbar für die Genauigkeit des Resultats sehr günstig. Nicht anwendbar ist die Methode der concentrischen Kreise, wenn überhaupt die Umstände das Ziehen von Kreisen unmöglich machen oder erschweren, also z. B. bei Construktionen auf dem freien Felde. Will man nun aber die Methode der concentrischen Kreise anwenden, so ist im Allgemeinen nur noch darauf aufmerksam zu machen, dass der grössere Kreis, welcher dem System der gegebenen Elemente angehört, so gezogen werden muss, dass er wo möglich alle gegebenen Richtungen schneidet. Wenn unter den gegebenen Elementen Punkte sind, so wird man immer zwei derselben so benutzen, dass einer derselben in das Centrum der concentrischen Kreise und der andere auf die Peripherie, oder auch beide Punkte auf die Peripherie des Kreises, der ihrem Systeme zugehört, zu liegen kommen. Sollten aber mehr Punkte gegeben sein oder die gegebenen Punkte eine solche Lage haben, dass die eben ausgesprochene Regel nicht ausführbar ist, so bleibt nichts anderes übrig, als durch einen solchen Punkt zwei Sekanten des Kreises zu ziehen *), um denselben durch Richtungen zu bestimmen, deren Aufsuchung im homologen System keine Schwierigkeit macht. Es wird hinreichen, zur detaillirten Anschauung dieser Methode ein Paar Constructionen im Einzelnen anzugeben.

XVII. Es sind drei Richtungen a, b und c gegeben, die in lauter unzugänglichen Punkten convergiren; man soll eine vierte Richtung zeichnen, welche mit c parallel sei und in einem Punkt mit a und b convergire.

---

*) Ein anderes Mittel, welches durch die in dem gegebenen Punkt convergirenden Tangenten dargeboten wird, ist unpraktisch.

Man ziehe aus dem Punkte O der Richtung a (Taf. IX. Fig. 14.) zwei concentrische Kreise, von welchen der äussere die Richtung b in den Punkten D und E schneide; ziehe sodann durch die Punkte D' und E', in welchen der innere Kreis von den Halbmessern OD und OE geschnitten wird, die Richtung $D'E'$, welche die gegebene Richtung a in einem Punkte F scheiden wird; ziehe hierauf durch diesen Punkt F eine Parallele mit c, welche dem inneren Kreise in den Punkten C' und G' begegnet, und verbinde endlich auch die Punkte C und G, in welchen der äussere Kreis von den Halbmessern OC' und OG' geschnitten wird, durch eine Gerade CG, so wird CG der Aufgabe genügen. Denn, wie die Richtungen $C'G'$ und $D'E'$ in einem Punkte F der Richtung a convergiren, so müssen auch die homologen Richtungen CG und DE in einem Punkte des Collineationsstrahles a convergiren, und zugleich ist die Richtung CG, weil sie mit der Richtung $C'G'$ parallel ist, wie diese auch mit a parallel.

XVIII. Die Verbindungslinie zweier unzugänglichen Punkte zu ziehen, welche durch vier Richtungen a, b, c, d gegeben sind, von denen zwei andere gegenüberstehende Convergenzpunkte R und S zugänglich sind.

Nachdem die zwei concentrischen Hilfskreise (Taf. IX. Fig. 15.) so gezeichnet sind, dass der gemeinschaftliche Mittelpunkt in R zu liegen kommt, die Peripherie des äusseren Kreises durch S geht und die Richtungen a und b in den Punkten A, B zum zweiten Mal schneidet, so wird man vermittelst der Halbmesser RA, RS und RB die Sekanten $A'S'$ und $S'B'$ des kleineren Kreises bestimmen, welche auf c und d die Punkte C' und D' bezeichnen, die, wenn der innere Kreis klein genug war, zugänglich sind und durch eine Gerade $C'D'$ verbunden werden können. Diese Gerade $C'D'$ bestimmt auf der Peripherie des kleineren Kreises die Punkte E' und F', und die Richtungen der nach diesen Punkten gezogenen Halbmesser bestimmen auf dem grösseren Kreise die Punkte E und F. Die Gerade EF genügt der Aufgabe; denn sie ist in dem Systeme der gegebenen Richtungen der Richtung $E'F'$ im Systeme des inneren Kreises homolog, und wie in diesem Systeme die Richtungen $S'A'$ und $S'B'$, d und c in den zwei Punkten D' und C' mit $E'F'$ convergiren, so müssen auch in dem System des äusseren Kreises die Richtungen a und d, b und c mit EF in den zwei Punkten convergiren, die hier unzugänglich sind.

XXI.

wei sehr merkwürdige Sätze von der Ellipse und von der Hyperbel.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

In einem Briefe von Leibniz an Huygens, der ohne Jah-
eszahl und Datum abgedruckt ist in:

Leibnizens gesammelten Werken, aus den Hand-
chriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover, her-
usgegeben von Georg Heinrich Pertz. Dritte Folge.
lathematik. Zweiter Band. Berlin 1850. S. 53. Nr. XVII.

uch unter dem Titel:

Leibnizens mathematische Schriften, herausgege-
ben von C. J. Gerhardt. Erste Abtheilung. Band II.
Berlin 1850.

indet sich gegen das Ende folgende, mit dem übrigen Inhalte des
Briefes in gar keiner Verbindung stehende Bemerkung:

„Dans l'ouvrage que j'avois composé autrefois sur la quadra-
ture Arithmetique, je trouve cette proposition generale: Sector
comprehensus arcu sectionis conicae a vertice inci-
piente et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, aequa-
tur rectangulo sub semilatere transverso et recta
$t \pm \frac{1}{3}t^3 \pm \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. posito t esse portionem tangentis
in vertice, inter verticem et tangentem *) alterius ex-

tremi interceptam, et rectangulum sub dimidiis latribus recto et transverso (id est quadratum a semiaxe transverso) esse unitatem. Est autem ± in hyperbola + in ellipse vel circulo." —

Man muss gestehen, dass in dieser Stelle eine ziemliche Dunkelheit herrscht, und der Herausgeber, Herr Gerhardt, hat uns über deren Sinn durch keine Erläuterung aufgeklärt, sondern erwähnt bei dem mit einem *) bezeichneten Worte nur ganz kurz:

„Hugens hat bemerkt: Secantem."

Da mich die obige Bemerkung Leibnizens sehr interessirte, so habe ich dieselbe einer sorgfältigen Untersuchung unterworfen, welche mich zu zwei Sätzen von der Ellipse und Hyperbel geführt hat, die ich aus verschiedenen Gründen für sehr merkwürdig und für den wahren und eigentlichen Ausdruck der in der obigen Bemerkung Leibnizens angedeuteten Sätze halte; zugleich wird sich aus dieser Untersuchung ergeben, dass die obige Stelle, wie sie wenigstens in der von Herrn Gerhardt veranstalteten Sammlung der Briefe Leibnizens abgedruckt ist, nothwendig manches Falsche enthalten muss, so wie auch, dass die von Huygens, oder, wie Herr Gerhardt schreibt, Hugens *), beigefügte Bemerkung „Secantem" wohl gar keinen Sinn hat.

Ich hoffe, dass man die Sätze, die ich, veranlasst durch die obige, freilich in mehreren Beziehungen dunkle und wohl auch manches Falsche enthaltende Bemerkung Leibnizens, im Fol-

---

*) Herr Gerhardt sagt S. 3: „Diese Schreibart des Namens ist deshalb gewählt worden, weil alle an Leibniz gerichteten Briefe übereinstimmend unterzeichnet sind mit: Hugens de Zulichem." Die Schreibart des Namens dieses hochberühmten Mathematikers ist allerdings zweifelhaft. Jacob Bernoulli (Opera. T. I. p. 195.) schreibt Hugens, dagegen an anderen Stellen (z. B. T. I. p. 458. T. II. p. 947.) sehr häufig Huygens. Johann Bernoulli (z. B. Opera. T. II. p. 129.) schreibt meistens Huguens, wenigstens in französisch verfassten Aufsätzen. Renau in allen seinen in Johann Bernoulli's Werken mitgetheilten Abhandlungen schreibt durchgängig Hughens. Reuss in seinem Repertorium commentationum a societatibus litterariis editarum Tom. VII. schreibt bei den Titeln aller Abhandlungen des grossen holländischen Mathematikers Huyghens. Da alle mir bekannten Schriften von Huygens oder Huyghens lateinisch verfasst sind, so können diese nicht maassgebend sein, weil auf ihren Titeln der Name durchgängig Hugenius lautet. Was mag nun wohl bei der sich findenden so grossen Verschiedenheit eigentlich das Richtige sein? Bei einem so bedeutenden Mathematiker wäre eine sichere Aufklärung sehr wünschenswerth, die ich gern in das Archiv aufnehmen würde.

genden entwickeln werde, für einen bemerkenswerthen Beitrag zur Theorie der Ellipse und Hyperbel, und zugleich für eine dankenswerthe Erläuterung einer jedenfalls sehr merkwürdigen Stelle in einem Briefe des grossen Mannes halten werde. Vielleicht werden mir Leibnizens Briefe späterhin noch zu anderen ähnlichen Erläuterungen, deren dieselben in der That an vielen Stellen sehr bedürftig sind, Gelegenheit geben, wobei ich immer auf die von Herrn Gerhardt in Verein mit Herrn Pertz veranstaltete Sammlung besonderen Bezug nehmen werde.

I.

Wir wollen uns in Taf. IX. Fig. 1. eine aus dem Mittelpunkte C beschriebene Ellipse denken; zwei beliebige conjugirte Durchmesser dieser Ellipse seien AA' und BB', deren Hälften wir durch a und b bezeichnen wollen; die positiven Theile dieser beiden conjugirten Durchmesser seien CA und CB, und α sei der von denselben eingeschlossene Winkel $A'CB$. Legt man nun die beiden in Rede stehenden conjugirten Durchmesser als Coordinatenaxen zu Grunde und bezeichnet die veränderlichen oder laufenden Coordinaten in diesem Systeme durch u, v; so ist bekanntlich

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{v}{b}\right)^2=1$$

die Gleichung der Ellipse. Wenn nun ferner CA_1 ein beliebiger, auf der positiven Seite des Durchmessers AA' liegender Halbmesser der Ellipse ist, den wir durch r, den Winkel ACA_1 durch φ bezeichnen wollen, so wird von CA, CA_1 und dem, dem Winkel φ entsprechenden elliptischen Bogen AA_1 ein elliptischer Sector begränzt, dessen Flächenraum in der Kürze durch $\operatorname{Sect}\varphi$ bezeichnet werden mag, wo dann nach einer allgemein bekannten Formel der Integralrechnung

$$\operatorname{Sect}\varphi=\tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2\partial\varphi$$

ist. Die weitere Entwickelung des Flächeninhalts dieses Sectors soll uns nun im Folgenden beschäftigen.

Zu dem Ende wollen wir die Coordinaten des Punktes A in dem angenommenen Systeme durch x, y bezeichnen; dann hat man offenbar die beiden folgenden allgemein gültigen Proportionen:

$$\sin\alpha:\sin(\alpha+\varphi)=r:x,$$
$$\sin\alpha:\sin\varphi\quad=r:y;$$

woraus sich

$$x=\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}r,\quad y=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}r;$$

folglich, weil nach dem Obigen, da der Punkt A_1 oder (xy) in der Ellipse liegt,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

ist:

$$\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2=\frac{1}{r^2},$$

also

$$r^2=\frac{1}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\mathrm{Sect}\,\varphi=\tfrac{1}{2}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2},$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$\mathrm{Sect}\,\varphi=\tfrac{1}{2}a^2b^2\sin\alpha^2\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{a^2\sin\varphi^2+b^2\sin(\alpha+\varphi)^2}$$

ergiebt.

Wir wollen uns nun durch die Punkte A und A_1 Berührende an die Ellipse gezogen denken und deren Durchschnittspunkt mit T bezeichnen. Die Gleichung der Berührenden im Punkte A_1, dessen Coordinaten x, y sind, ist bekanntlich

$$v-y=\frac{\partial y}{\partial x}(u-x)\ ^*),$$

wo der Differentialquotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

entwickelt werden muss; dadurch erhält man:

*) Dass diese Gleichung auch für schiefwinklige Coordinaten gilt, weiss Jeder.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

e Gleichung der Berührenden:

$$v-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(u-x),$$

wie sich hieraus mit Rücksicht auf die zwischen x und y
ndende Gleichung bekanntlich leicht ergiebt:

$$\frac{xu}{a^2}+\frac{yv}{b^2}=1.$$

zeichnen wir jetzt die Entfernung des Durchschnittspunkts
beiden durch A und A_1 gezogenen Berührenden von dem
l A des Durchmessers AA', nämlich die Linie AT, durch
wird dieses v offenbar aus der vorstehenden Gleichung er-
wenn man in derselben $u=a$ setzt, wodurch man erhält:

$$v=\frac{b^2}{a}\cdot\frac{a-x}{y}.$$

; aber

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

$$v=b\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

umgekehrt

$$x=a\frac{b^2-v^2}{b^2+v^2}$$

und da nun

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

erhält man auch mittelst leichter Rechnung:

$$y=\frac{2b^2v}{b^2+v^2},$$

sich also ergiebt, dass die Coordinaten x, y immer durch
sse v mittelst der Formeln

$$x=a\frac{b^2-v^2}{b^2+v^2},\quad y=\frac{2b^2v}{b^2+v^2}$$

rational ausgedrückt werden können. Hieraus erhält man:

$$\frac{y}{x}=\frac{2b^2v}{a(b^2-v^2)};$$

und da nach dem Obigen

$$x=\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}r,\quad y=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}r,$$

also

$$\frac{y}{x}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

ist, so ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}=\frac{2b^2v}{a(b^2-v^2)},$$

also

$$\frac{\tang\varphi}{\sin\alpha+\cos\alpha\tang\varphi}=\frac{2b^2v}{a(b^2-v^2)},$$

woraus leicht

$$\tang\varphi=\frac{2b^2v\sin\alpha}{a(b^2-v^2)-2b^2v\cos\alpha}$$

folgt.

Weil bekanntlich

$$\tang(\alpha+\varphi)=\frac{\tang\alpha+\tang\varphi}{1-\tang\alpha\tang\varphi}$$

ist, so erhält man, wenn man den vorstehenden Werth von tan einführt, nach einigen leichten Verwandlungen:

$$\tang(\alpha+\varphi)=\frac{a(b^2-v^2)\sin\alpha}{a(b^2-v^2)\cos\alpha-2b^2v}.$$

Ferner findet man leicht:

$$1+\tang\varphi^2=\frac{a^2(b^2-v^2)^2-4ab^2v(b^2-v^2)\cos\alpha+4b^4v^2}{\{a(b^2-v^2)-2b^2v\cos\alpha\}^2},$$

$$1+\tang(\alpha+\varphi)^2=\frac{a^2(b^2-v^2)^2-4ab^2v(b^2-v^2)\cos\alpha+4b^4v^2}{\{a(b^2-v^2)\cos\alpha-2b^2v\}^2};$$

also:

$$\sin\varphi^2=\frac{4b^4v^2\sin\alpha^2}{a^2(b^2-v^2)^2-4ab^2v(b^2-v^2)\cos\alpha+4b^4v^2},$$

$$\sin(\alpha+\varphi)^2=\frac{a^2(b^2-v^2)^2\sin\alpha^2}{a^2(b^2-v^2)^2-4ab^2v(b^2-v^2)\cos\alpha+4b^4v^2}$$

und

$$\cos\varphi^2=\frac{\{a(b^2-v^2)-2b^2v\cos\alpha\}^2}{a^2(b^2-v^2)^2-4ab^2v(b^2-v^2)\cos\alpha+4b^4v^2},$$

$$\cos(\alpha+\varphi)^2=\frac{\{a(b^2-v^2)\cos\alpha-2b^2v\}^2}{a^2(b^2-v^2)^2-4ab^2v(b^2-v^2)\cos\alpha+4b^4v^2}.$$

Endlich erhalten wir aus der Gleichung

$$\tang\varphi=\frac{2b^2v\sin\alpha}{a^2(b^2-v^2)-2b^2v\cos\alpha}$$

durch Differentiation leicht:

$$\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2}=\frac{2ab^2(b^2+v^2)\sin\alpha}{\{a(b^2-v^2)-2b^2v\cos\alpha\}^2}\partial v,$$

also nach dem Obigen:

$$\partial\varphi=\frac{2ab^2(b^2+v^2)\sin\alpha}{a^2(b^2-v^2)^2-4ab^2v(b^2-v^2)\cos\alpha+4b^4v^2}\partial v.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$N^2=a^2(b^2-v^2)^2-4ab^2v(b^2-v^2)\cos\alpha+4b^4v^2,$$

so ist

$$\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2=\left(\frac{b^2-v^2}{N}\right)^2,\quad \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2=\left(\frac{2bv}{N}\right)^2$$

und

$$\partial\varphi=\frac{2ab^2(b^2+v^2)\sin\alpha}{N^2}\partial v;$$

also

$$\frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2}=\frac{2ab^2(b^2+v^2)\sin\alpha}{(b^2-v^2)^2+4b^2v^2}\partial v,$$

folglich, weil

$$(b^2-v^2)^2+4b^2v^2=(b^2+v^2)^2$$

ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2}=\frac{2ab^2\sin\alpha}{b^2+v^2}\partial v,$$

und daher, weil nach dem Obigen für $\varphi=0$ auch $v=0$ ist:

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2}=2ab^2\sin\alpha\int_0^v\frac{\partial v}{b^2+v^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\text{Sect}\,\varphi=ab^2\sin\alpha\int_0^v\frac{\partial v}{b^2+v^2}.$$

Bekanntlich ist nun allgemein

$$\int\frac{\partial v}{b^2+v^2}=\frac{1}{b}\,\text{Arctang}\,\frac{v}{b}+\text{Const},$$

also, wenn man jetzt

$$\text{Arctang}\,\frac{v}{b}$$

den kleinsten positiven Bogen bedeuten lässt, dessen gonio trische Tangente $\frac{v}{b}$ ist:

$$\int_0^v\frac{\partial v}{b^2+v^2}=\frac{1}{b}\,\text{Arctang}\,\frac{v}{b};$$

was nach dem Obigen zu dem überaus merkwürdigen Ausdru

$$\text{Sect}\,\varphi=ab\sin\alpha\,\text{Arctang}\,\frac{v}{b}$$

führt. Weil nach dem Obigen

$$v=b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

ist, so ist auch

$$\text{Sect}\,\varphi=ab\sin\alpha\,\text{Arctang}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Für $x=-a$ wird $\varphi=\pi$, folglich

$$\text{Sect}\,\pi=ab\sin\alpha\,\text{Arctang}\,\infty,$$

also

$$\text{Sect}\,\pi=\tfrac{1}{2}ab\pi\sin\alpha,$$

welches daher der Ausdruck für den Flächeninhalt jeder der l den Hälften ist, in welche die Ellipse durch den Diameter A getheilt wird.

Ueber $\varphi=\pi$ hinaus darf man die Formel

$$\operatorname{Sect}\varphi = ab\sin\alpha\operatorname{Arctang}\frac{v}{b}$$

icht ausdehnen, wie aus der ganzen vorhergehenden Betrachtung ich von selbst ergiebt, und auch schon deshalb, weil für $\varphi=\pi$ ie Grösse

$$\frac{v}{b}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

endlich wird. Man kann sich aber auf folgende Art verhalten. s erhellet nämlich aus dem Vorhergehenden und aus Taf. X. ig. 2., wenn wir die in dieser Figur durch $A'T'$ bezeichnete Linie ' nennen, dass in dem Falle, wenn $\varphi>\pi$ ist,

$$\operatorname{Sect}\varphi = \tfrac{1}{2}ab\pi\sin\alpha + ab\sin\alpha\operatorname{Arctang}\frac{v'}{b},$$

lso

$$\operatorname{Sect}\varphi = ab\sin\alpha(\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{Arctang}\frac{v'}{b})$$

t. Nun aber überzeugt man sich mittelst einer einfachen Be-achtung sehr leicht, dass

$$\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{Arctang}\frac{v'}{b} = \operatorname{Arccot}(-\frac{v'}{b})$$

ist, woraus sich nach dem Obigen

$$\operatorname{Sect}\varphi = ab\sin\alpha\operatorname{Arccot}(-\frac{v'}{b})$$

ergiebt. Nach dem Obigen ist aber, wenn auch in Taf. X. Fig. 2. wie früher $AT=v$ gesetzt wird:

$$v=b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

und, wenn man sich einmal die positiven Abscissen von C nach A' hin genommen denkt:

$$v'=b\sqrt{\frac{a-(-x)}{a+(-x)}}=b\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Also ist

$$\frac{v}{b}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},\quad \frac{v'}{b}=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}};$$

folglich

$$\frac{v}{b} \cdot \frac{v'}{b} = 1,$$

und daher nach dem Obigen offenbar:

$$\text{Sect}\,\varphi = ab \sin\alpha \,\text{Arctang}\,\frac{-v}{b}.$$

Also ist für $\varphi < \pi$:

$$\text{Sect}\,\varphi = ab \sin\alpha \,\text{Arctang}\,\frac{v}{b},$$

und für $\varphi > \pi$:

$$\text{Sect}\,\varphi = ab \sin\alpha \,\text{Arctang}\,\frac{-v}{b},$$

unter

$$\text{Arctang}\,\frac{v}{b} \text{ und } \text{Arctang}\,\frac{-v}{b}$$

immer die kleinsten positiven Bogen verstanden, deren gon trische Tangenten respective $\frac{v}{b}$ und $\frac{-v}{b}$ sind. Nimmt man aber $v = AT$ nicht, wie bisher, stets positiv, sondern viel von jetzt an positiv oder negativ, jenachdem die Linie AT der positiven oder negativen Seite des Durchmessers AA' so kann man die zwei obigen Formeln in die folgende ein gemein gültige Formel

$$\text{Sect}\,\varphi = ab \sin\alpha \,\text{Arctang}\,\frac{v}{b}$$

zusammenfassen, wo auch jetzt $\text{Arctang}\,\frac{v}{b}$ den kleinsten posi Bogen bezeichnet, dessen goniometrische Tangente $\frac{v}{b}$ ist.

Für $\varphi = \pi - \alpha$ ist offenbar $v = +b$, also

$$\text{Arctang}\,\frac{v}{b} = \text{Arctang}(+1) = \tfrac{1}{4}\pi,$$

folglich

$$\text{Sect}(\pi - \alpha) = \tfrac{1}{4} ab\pi \sin\alpha.$$

Für $\varphi = \pi$ ist

$$\frac{v}{b} = \sqrt{\frac{a+a}{a-a}} = \infty,$$

also $\text{Arctang}\,\frac{v}{b} = \text{Arctang}\,\infty = \frac{1}{2}\pi$, folglich

$$\mathrm{Sect}\,\pi = \tfrac{1}{2}ab\pi\sin\alpha.$$

Für $\varphi = 2\pi - \alpha$ ist offenbar $v = -b$, also

$$\mathrm{Arctang}\frac{v}{b} = \mathrm{Arctang}(-1) = \tfrac{3}{4}\pi,$$

folglich

$$\mathrm{Sect}(2\pi - \alpha) = \tfrac{3}{4}ab\pi\sin\alpha.$$

Für $\varphi = 2\pi$ ist $v = 0$, also $\mathrm{Arctang}\frac{v}{b} = \mathrm{Arctang}\,0 = \pi$, nicht $\mathrm{Arctang}\frac{v}{b} = 0$, weil sich hier $\frac{v}{b}$ der Null nicht vom Positiven, sondern vom Negativen her nähert; folglich

$$\mathrm{Sect}\,2\pi = ab\pi\sin\alpha.$$

Weil hiernach

$$\mathrm{Sect}(\pi - \alpha) = \tfrac{1}{4}ab\pi\sin\alpha,$$
$$\mathrm{Sect}\,\pi - \mathrm{Sect}(\pi - \alpha) = \tfrac{1}{4}ab\pi\sin\alpha,$$
$$\mathrm{Sect}(2\pi - \alpha) - \mathrm{Sect}\,\pi = \tfrac{1}{4}ab\pi\sin\alpha,$$
$$\mathrm{Sect}\,2\pi - \mathrm{Sect}(2\pi - \alpha) = \tfrac{1}{4}ab\pi\sin\alpha$$

ist; so sieht man, dass jede zwei conjugirte Durchmesser die Fläche der Ellipse in vier einander gleiche Sectoren theilen.

Weil, wie so eben gezeigt worden ist, $\mathrm{Sect}\,2\pi = ab\pi\sin\alpha$ für jedes System zweier conjugirter Durchmesser der Flächeninhalt der ganzen Ellipse ist, so ist für jede zwei conjugirte Durchmesser $ab\pi\sin\alpha$, also auch $ab\sin\alpha$ eine constante Grösse, welches ein anderweitig längst bekannter und leicht geometrisch zu deutender Satz ist *).

*) Bekanntlich ist auch $a^2 + b^2$ eine constante Grösse. Dies lässt sich, beiläufig bemerkt, wie es mir scheint, besonders leicht auf folgende Art beweisen. Die beiden Halbaxen seien A und B und in Bezug auf die beiden Axen seien x, y die Coordinaten des Scheitels des Diameters $2a$, so wie x_1, y_1 die Coordinaten des Scheitels des Diameters $2b$; dann ist offenbar

$$a^2 = x^2 + y^2, \quad b^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2.$$

Die Gleichung der Berührenden durch den Scheitel des Diameters $2a$ ist bekanntlich

$$v - y = -\frac{B^2x}{A^2y}(u - x),$$

Wenn a und b die beiden Halbaxen sind, so hat man im Obigen $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ zu setzen.

---

also, weil dieser Berührenden der Diameter $2b$ parallel ist,

$$\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2=\left(\frac{B^2x}{A^2y}\right)^2,\quad \frac{y_1{}^2}{x_1{}^2}=\frac{B^4x^2}{A^4y^2}.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^2+\left(\frac{y_1}{B}\right)^2=1,$$

so ergiebt sich leicht:

$$x_1{}^2=\frac{A^4y^2}{A^2y^2+B^2x^2}=\frac{A^4y^2}{A^2B^2}=\frac{A^2}{B^2}y^2,$$

$$y_1{}^2=\frac{B^4x^2}{A^2y^2+B^2x^2}=\frac{B^4x^2}{A^2B^2}=\frac{B^2}{A^2}x^2;$$

also

$$b^2=x_1{}^2+y_1{}^2=\frac{A^4y^2+B^4x^2}{A^2B^2}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$a^2+b^2=\frac{A^4y^2+B^4x^2}{A^2B^2}+x^2+y^2=\frac{A^2(A^2y^2+B^2x^2)+B^2(A^2y^2+B^2x^2)}{A^2B^2}$$

$$=\frac{(A^2+B^2)(A^2y^2+B^2x^2)}{A^2B^2}=\frac{(A^2+B^2)A^2B^2}{A^2B^2},$$

also $a^2+b^2=A^2+B^2$, und daher a^2+b^2 constant, wie behauptet wurde.

Dass $ab\sin\alpha$ constant ist, kann man nun ferner auch auf folgende Art leicht beweisen. Es ist offenbar, wenn wir x und y als positiv annehmen:

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\frac{y}{x}+\frac{B^2x}{A^2y}}{1-\frac{y}{x}\cdot\frac{B^2x}{A^2y}}=\frac{A^2y^2+B^2x^2}{(A^2-B^2)xy}=\frac{A^2B^2}{(A^2-B^2)xy},$$

also

$$1+\operatorname{tang}\alpha^2=\frac{(A^2-B^2)^2x^2y^2+(A^2y^2+B^2x^2)^2}{(A^2-B^2)^2x^2y^2}=\frac{(x^2+y^2)(A^4y^2+B^4x^2)}{(A^2-B^2)^2x^2y^2},$$

und folglich

$$\sin\alpha^2=\frac{\operatorname{tang}\alpha^2}{1+\operatorname{tang}\alpha^2}=\frac{A^4B^4}{(A^2-B^2)^2x^2y^2}:\frac{(x^2+y^2)(A^4y^2+B^4x^2)}{(A^2-B^2)^2x^2y^2},$$

also

Weil nach dem Obigen

$$AT = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

ist, so kann man, wenn wir v jetzt wieder bloss positiv nehmen, Sectφ auch auf folgende Art ausdrücken:

Für $\varphi < \pi$ ist:

$$\text{Sect}\,\varphi = av\sin\alpha\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\text{Arctang}\left(+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right).$$

Für $\varphi > \pi$ ist:

$$\text{Sect}\,\varphi = av\sin\alpha\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\text{Arctang}\left(-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right).$$

Unter

$$\text{Arctang}\left(+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) \text{ und } \text{Arctang}\left(-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$$

sind immer die kleinsten positiven Bogen zu verstehen, deren goniometrische Tangenten respective

$$+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \text{ und } -\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

sind.

Wenn der Flächeninhalt des gegebenen elliptischen Sectors ACA_1 in Taf. X. Fig. 3. bestimmt werden soll, so ziehe man an A und A_1 die Berührenden AT und A_1T der Ellipse und durch A_1 die Parallele A_1B mit der Berührenden AT; dann ist nach dem Obigen, insofern der Winkel ACA_1 des Sectors kleiner als 180° ist:

$$\sin\alpha^2 = \frac{A^4B^4}{(x^2+y^2)(A^4y^2+B^4x^2)}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$a^2b^2 = \frac{(x^2+y^2)(A^4y^2+B^4x^2)}{A^2B^2}.$$

Also ist

$$a^2b^2\sin\alpha^2 = A^2B^2,\quad ab\sin\alpha = AB$$

und daher $ab\sin\alpha$ constant.

Bei der Hyperbel kann man beide Sätze auf ganz ähnliche Art beweisen.

$$\text{Sect}\,ACA_1$$

$$=AC.AT.\sin CAT.\sqrt{\frac{AC+BC}{AC-BC}}.\,\text{Arctang}\left\{+\sqrt{\frac{AC-BC}{AC+BC}}\right\};$$

dagegen wäre in Taf. X. Fig. 4., insofern der Winkel ACA_1 des Sectors grösser als 180° ist:

$$\text{Sect}\,ACA_1$$

$$=AC.AT.\sin CAT.\sqrt{\frac{AC+BC}{AC-BC}}.\,\text{Arctang}\left\{-\sqrt{\frac{AC-BC}{AC+BC}}\right\};$$

in Taf. X. Fig. 5. wäre, insofern der Winkel ACA_1 des Sectors wieder kleider als 180° ist:

$$\text{Sect}\,ACA_1$$

$$=AC.AT.\sin CAT.\sqrt{\frac{AC-BC}{AC+BC}}.\,\text{Arctang}\left\{+\sqrt{\frac{AC+BC}{AC-BC}}\right\};$$

endlich wäre in Taf. X. Fig. 6., insofern der Winkel ACA_1 des Sectors wieder grösser als 180° ist:

$$\text{Sect}\,ACA_1$$

$$=AC.AT.\sin CAT.\sqrt{\frac{AC-BC}{AC+BC}}.\,\text{Arctang}\left\{-\sqrt{\frac{AC+BC}{AC-BC}}\right\}.$$

In den beiden ersten Fällen ist nämlich in den obigen Formeln für Sect φ die Abscisse $x=+BC$ zu setzen, in den beiden letzten Fällen muss in den obigen Formeln für Sect φ die Abscisse $x=-BC$ gesetzt werden.

Geht die Ellipse in einen Kreis über, so ist $a=b$ der Halbmesser des Kreises, und wenn φ der den Winkel des Sectors messende Bogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise ist, so ist offenbar der den Sector theilweise begränzende Kreisbogen $AA_1=a\varphi$. Ferner ist augenscheinlich, wenn wir das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem $\varphi<\pi$ oder $\varphi>\pi$ ist,

$$v=\pm AT=a\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$

also

$$\frac{v}{b}=\frac{v}{a}=\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi,\quad \text{Arctang}\,\frac{v}{b}=\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Weil nun allgemein für die Ellipse

$$\text{Sect}\,\varphi = ab\sin\alpha\,\text{Arctang}\,\frac{v}{b},$$

für den Kreis aber offenbar $\alpha = 90^0$ zu setzen ist, so ist für den Kreis

$$\text{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}a^2\varphi,$$

also nach dem Obigen:

$$\text{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}a\,.\,AA_1,$$

welches die bekannte Formel für den Inhalt eines Kreissectors ist.

Nach allem Vorhergehenden glaube ich, dass man mir beizustimmen geneigt sein wird, wenn ich die in Bezug auf jede zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse geltende, höchst einfache und elegante Formel

$$\text{Sect}\,\varphi = ab\sin\alpha\,\text{Arctang}\,\frac{v}{b}$$

für eins der merkwürdigsten und interessantesten Resultate in der ganzen Lehre von den Kegelschnitten halte.

Wenn $\frac{v}{b}$ positiv und nicht grösser als die Einheit ist, kann man, insofern $\text{Arctang}\,\frac{v}{b}$ immer den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, dessen goniometrische Tangente $\frac{v}{b}$ ist, wie die Analysis lehrt, bekanntlich

$$\text{Arctang}\,\frac{v}{b} = \frac{v}{b} - \frac{1}{3}\left(\frac{v}{b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{b}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{v}{b}\right)^7 + \ldots.$$

setzen, so dass also in diesem Falle nach dem Obigen:

$$\text{Sect}\,\varphi = ab\sin\alpha\cdot\left\{\frac{v}{b} - \frac{1}{3}\left(\frac{v}{b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{b}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{v}{b}\right)^7 + \ldots\right\}$$

ist. Weiter als auf den Fall, wo $\frac{v}{b}$ positiv und nicht grösser als die Einheit ist, darf man aber diese Formel nicht ausdehnen, weil in der Gleichung

$$\text{Arctang}\,\frac{v}{b} = \frac{v}{b} - \frac{1}{3}\left(\frac{v}{b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{b}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{v}{b}\right)^7 + \ldots.$$

bekanntlich der absolute Werth von $\frac{v}{b}$ die Einheit nicht übersteigen darf und $\text{Arctang}\,\frac{v}{b}$ immer den, absolut genommen, kleinsten

positiven oder negativen Bogen bezeichnet, dessen goniometrische Tangente $\frac{v}{b}$ ist, in der Gleichung

$$\text{Sect}\,\varphi = ab \sin\alpha \,\text{Arctang}\,\frac{v}{b}$$

dagegen $\frac{v}{b}$ jeden beliebigen positiven oder negativen reellen Werth haben kann und immer $\text{Arctang}\frac{v}{b}$ den kleinsten positiven Bogen, dessen goniometrische Tangente $\frac{v}{b}$ ist, bezeichnet.

II.

Sei jetzt in Taf. X. Fig. 7. aus dem Mittelpunkte C eine Hyperbel beschrieben, und AA' und BB' seien zwei conjugirte Durchmesser derselben, deren Hälften wir respective durch a und b bezeichnen wollen; die positiven Theile dieser conjugirten Durchmesser seien CA und CB, und α sei der von denselben eingeschlossene Winkel ACB. Legt man nun die beiden in Rede stehenden conjugirten Durchmesser als Coordinatenaxen zu Grunde und bezeichnet die veränderlichen oder laufenden Coordinaten in diesem Systeme durch u, v; so ist bekanntlich

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 - \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung der Hyperbel. Wenn nun ferner CA_1 ein beliebiger, auf der positiven Seite des Durchmessers AA' liegender Halbmesser der Hyperbel ist, den wir durch r, den Winkel ACA_1 durch φ bezeichnen wollen, so wird von CA, CA_1 und dem, dem Winkel φ entsprechenden hyperbolischen Bogen AA_1 ein hyperbolischer Sector begränzt, dessen Flächenraum in der Kürze durch $\text{Sect}\,\varphi$ bezeichnet werden mag, wo dann wieder nach einer allgemein bekannten Formel der Integralrechnung

$$\text{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi r^2 \partial\varphi$$

ist. Die weitere Entwickelung des Flächenraums dieses Sectors soll uns nun im Folgenden beschäftigen.

Zu dem Ende bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes A_1 in dem angenommenen Systeme durch x, y; dann hat man offenbar die beiden folgenden Proportionen:

$$\sin\alpha : \sin(\alpha-\varphi) = r : x,$$

$$\sin\alpha : \sin\varphi = r : y;$$

woraus sich

$$x = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha} r, \quad y = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} r;$$

folglich, weil nach dem Obigen, da der Punkt A_1 oder (xy) in der Hyperbel liegt,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ist,

$$\left\{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2 = \frac{1}{r^2},$$

also

$$r^2 = \frac{1}{\left\{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\mathrm{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2},$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$\mathrm{Sect}\,\varphi = -\tfrac{1}{2}a^2b^2\sin\alpha^2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{a^2\sin\varphi^2 - b^2\sin(\alpha-\varphi)^2}$$

ergiebt.

Wir wollen uns nun durch die Punkte A und A_1 Berührende an die Hyperbel gezogen denken und deren Durchschnittspunkt mit T bezeichnen. Die Gleichung der Berührenden im Punkte A_1, dessen Coordinaten x, y sind, ist bekanntlich

$$v - y = \frac{\partial y}{\partial x}(u - x),$$

wo der Differentialquotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

entwickelt werden muss; dadurch erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{b^2x}{a^2y},$$

also die Gleichung der Berührenden:

$$v-y=\frac{b^2x}{a^2y}(u-x),$$

oder, wie sich hieraus mit Rücksicht auf die zwischen x und y Statt findende Gleichung bekanntlich leicht ergiebt:

$$\frac{xu}{a^2}-\frac{yv}{b^2}=1.$$

Bezeichnen wir jetzt die Entfernung des Durchschnittspunkts T der beiden durch A und A_1 gezogenen Berührenden von dem Scheitel A des Durchmessers AA', nämlich die Linie AT, durch v, so wird dieses v offenbar aus der vorstehenden Gleichung erhalten, wenn man darin $u=a$ setzt, wodurch man erhält:

$$v=-\frac{b^2}{a}\cdot\frac{a-x}{y}.$$

Nun ist aber

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

also

$$v=b\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}=b\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},$$

woraus umgekehrt

$$x=a\frac{b^2+v^2}{b^2-v^2}$$

folgt; und da nun

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

ist, so erhält man auch mittelst leichter Rechnung:

$$y=\frac{2b^2v}{b^2-v^2},$$

woraus sich also ergiebt, dass die Coordinaten x, y immer durch die Grösse v mittelst der Formeln

$$x = a\frac{b^2+v^2}{b^2-v^2},\quad y = \frac{2b^2v}{b^2-v^2}$$

ional ausgedrückt werden können. Hieraus erhält man

$$\frac{y}{x} = \frac{2b^2v}{a(b^2+v^2)};$$

d da nach dem Obigen

$$x = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha}r,\quad y = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}r,$$

so

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}$$

t, so ist

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{2b^2v}{a(b^2+v^2)},$$

lso

$$\frac{\tang\varphi}{\sin\alpha - \cos\alpha\tang\varphi} = \frac{2b^2v}{a(b^2+v^2)},$$

woraus leicht

$$\tang\varphi = \frac{2b^2v\sin\alpha}{a(b^2+v^2)+2b^2v\cos\alpha}$$

folgt.

Weil bekanntlich

$$\tang(\alpha-\varphi) = \frac{\tang\alpha - \tang\varphi}{1+\tang\alpha\tang\varphi}$$

ist, so erhält man, wenn man den vorstehenden Werth von $\tang\varphi$ einführt, nach einigen leichten Verwandlungen:

$$\tang(\alpha-\varphi) = \frac{a(b^2+v^2)\sin\alpha}{a(b^2+v^2)\cos\alpha + 2b^2v}.$$

Ferner findet man leicht:

$$1+\tang\varphi^2 = \frac{a^2(b^2+v^2)^2 + 4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha + 4b^4v^2}{\{a(b^2+v^2)+2b^2v\cos\alpha\}^2},$$

$$1+\tang(\alpha-\varphi)^2 = \frac{a^2(b^2+v^2)^2 + 4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha + 4b^4v^2}{\{a(b^2+v^2)\cos\alpha + 2b^2v\}^2};$$

lso:

$$\sin\varphi^2 = \frac{4b^4v^2\sin\alpha^2}{a^2(b^2+v^2)^2+4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha+4b^4v^2},$$

$$\sin(\alpha-\varphi)^2 = \frac{a^2(b^2+v^2)^2\sin\alpha^2}{a^2(b^2+v^2)^2+4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha+4b^4v^2};$$

und:

$$\cos\varphi^2 = \frac{\{a(b^2+v^2)+2b^2v\cos\alpha\}^2}{a^2(b^2+v^2)^2+4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha+4b^4v^2},$$

$$\cos(\alpha-\varphi)^2 = \frac{\{a(b^2+v^2)\cos\alpha+2b^2v\}^2}{a^2(b^2+v^2)^2+4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha+4b^4v^2}.$$

Endlich erhalten wir aus der Gleichung

$$\tan\varphi = \frac{2b^2v\sin\alpha}{a(b^2+v^2)+2b^2v\cos\alpha}$$

durch Differentiation leicht:

$$\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \frac{2ab^2(b^2-v^2)\sin\alpha}{\{a(b^2+v^2)+2b^2v\cos\alpha\}^2}\partial v,$$

also nach dem Obigen:

$$\partial\varphi = \frac{2ab^2(b^2-v^2)\sin\alpha}{a^2(b^2+v^2)^2+4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha+4b^4v^2}\partial v.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$N^2 = a^2(b^2+v^2)^2+4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha+4b^4v^2,$$

so ist

$$\left\{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2 = \left(\frac{b^2+v^2}{N}\right)^2,\quad \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2 = \left(\frac{2bv}{N}\right)^2$$

und

$$\partial\varphi = \frac{2ab^2(b^2-v^2)\sin\alpha}{N^2}\partial v;$$

also

$$\frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2-\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2} = \frac{2ab^2(b^2-v^2)\sin\alpha}{(b^2+v^2)^2-4b^2v^2}\partial v,$$

folglich, weil

$$(b^2+v^2)^2-4b^2v^2 = (b^2-v^2)^2$$

ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2-\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2}=\frac{2ab^2\sin\alpha}{b^2-v^2}\partial v,$$

und daher, weil nach dem Obigen für $\varphi=0$ auch $v=0$ ist:

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2-\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2}=2ab^2\sin\alpha\int_0^v\frac{\partial v}{b^2-v^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\text{Sect}\,\varphi=ab^2\sin\alpha\int_0^v\frac{\partial v}{b^2-v^2}.$$

Allgemein ist nun

$$\int\frac{\partial v}{b^2-v^2}=\frac{1}{2b}\left\{\int\frac{\partial v}{b+v}+\int\frac{\partial v}{b-v}\right\}$$

und

$$\int\frac{\partial v}{b+v}=l(b+v),\quad\int\frac{\partial v}{b-v}=-l(b-v);$$

also

$$\int\frac{\partial v}{b^2-v^2}=\frac{1}{2b}l\frac{b+v}{b-v},$$

und daher offenbar auch:

$$\int_0^v\frac{\partial v}{b^2-v^2}=\frac{1}{2b}l\frac{b+v}{b-v}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\text{Sect}\,\varphi=\tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\, l\frac{b+v}{b-v},$$

oder

$$\text{Sect}\,\varphi=\tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\, l\frac{1+\frac{v}{b}}{1-\frac{v}{b}}.$$

Wenn, wie in Taf. X. Fig. 8., der Halbmesser CA_1 auf der negativen Seite des Durchmessers AA' liegt, so hat man die folgenden Proportionen:

$$\sin\alpha:\sin(\alpha+\varphi)=r:x,$$
$$\sin\alpha:\sin\varphi=r:-y;$$

woraus sich

$$x=\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}r,\quad y=-\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}r;$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

ist, wie oben

$$\operatorname{Sect}\varphi=\tfrac{1}{2}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2-\left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2}$$

ergiebt. Die Gleichung der Berührenden im Punkte A_1 ist wie oben

$$\frac{xu}{a^2}-\frac{yv}{b^2}=1,$$

woraus sich für $u=a$ wieder

$$v=-\frac{b^2}{a}\cdot\frac{a-x}{y}$$

ergiebt, wo nun aber v negativ ist, weil y negativ ist, und man also bloss das als negativ betrachtete AT, welches in der That auch auf der negativen Seite des Durchmessers AA' liegt, durch v bezeichnen kann. Nun ist aber jetzt

$$y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

also

$$v=-b\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}=-b\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},$$

woraus umgekehrt

$$x=a\frac{b^2+v^2}{b^2-v^2}$$

folgt; und da nun

$$y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

ist, so erhält man auch mittelst leichter Rechnung

$$y=\frac{2b^2v}{b^2-v^2},$$

bei man zu beachten hat, dass v eine negative Grösse ist.
o kann man x und y durch die Grösse v immer mittelst der
meln

$$x=a\frac{b^2+v^2}{b^2-v^2},\quad y=\frac{2b^2v}{b^2-v^2}$$

onal ausdrücken. Hieraus erhält man

$$\frac{y}{x}=\frac{2b^2v}{a(b^2+v^2)},$$

, weil nach dem Obigen

$$\frac{y}{x}=-\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}=-\frac{2b^2v}{a(b^2+v^2)}$$

$$\frac{\tan\!g\,\varphi}{\sin\alpha+\cos\alpha\,\tan\!g\,\varphi}=-\frac{2b^2v}{a(b^2+v^2)},$$

ıus sich

$$\tan\!g\,\varphi=-\frac{2b^2v\sin\alpha}{a(b^2+v^2)+2b^2v\cos\alpha}$$

$$\tan\!g\,(\alpha+\varphi)=\frac{a(b^2+v^2)\sin\alpha}{a(b^2+v^2)\cos\alpha+2b^2v}$$

ebt. Die Ausdrücke von $\sin\varphi^2$, $\sin(\alpha+\varphi)^2$; $\cos\varphi^2$, $\cos(\alpha+\varphi)^2$
ıen ganz dieselben wie oben für $\sin\varphi^2$, $\sin(\alpha-\varphi)^2$; $\cos\varphi^2$,
$\alpha-\varphi)^2$, und für $\partial\varphi$ erhält man:

$$\partial\varphi=-\frac{2ab^2(b^2-v^2)\sin\alpha}{a^2(b^2+v^2)^2+4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha+4b^4v^2}\,\partial v,$$

, wenn man wieder

$$N^2=a^2(b^2+v^2)^2+4ab^2v(b^2+v^2)\cos\alpha+4b^4v^2$$

:

$$\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2=\left(\frac{b^2+v^2}{N}\right)^2,\quad \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2=\left(\frac{2bv}{N}\right)^2$$

$$\partial\varphi = -\frac{2ab^2(b^2-v^2)\sin\alpha}{N^2}\partial v;$$

also

$$\frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2} = -\frac{2ab^2(b^2-v^2)\sin\alpha}{(b^2+v^2)^2-4b^2v^2}\partial v,$$

folglich, weil

$$(b^2+v^2)^2-4b^2v^2=(b^2-v^2)^2$$

ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2} = -\frac{2ab^2\sin\alpha}{b^2-v^2}\partial v,$$

und daher:

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\left\{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{a\sin\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{\sin\varphi}{b\sin\alpha}\right\}^2} = -2ab^2\sin\alpha\int_0^v \frac{\partial v}{b^2-v^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\text{Sect}\,\varphi = -ab^2\sin\alpha\int_0^v \frac{\partial v}{b^2-v^2},$$

also, weil nach dem Obigen

$$\int_0^v \frac{\partial v}{b^2-v^2} = \frac{1}{2b}\,\mathrm{l}\,\frac{b+v}{b-v}$$

ist:

$$\text{Sect}\,\varphi = -\tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\,\frac{b+v}{b-v}$$

oder

$$\text{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\,\frac{b-v}{b+v},$$

wobei man zu beachten hat, dass v negativ ist.

Man hat also in den beiden vorher betrachteten Fällen:

$$\text{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\,\frac{b+v}{b-v}$$

und

$$\text{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\,\frac{b-v}{b+v},$$

o im ersten Falle v positiv, im zweiten Falle v negativ ist. immt man nun aber wieder v stets positiv, so erhellet, dass man völliger Allgemeinheit, der Halbmesser CA_1 mag auf der posiven oder auf der negativen Seite des Durchmessers AA' liegen,

$$\operatorname{Sect}\varphi = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\,\frac{b+v}{b-v}$$

der

$$\operatorname{Sect}\varphi = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\,\frac{1+\frac{v}{b}}{1-\frac{v}{b}}$$

etzen kann.

Bekanntlich gilt nun die Gleichung

$$\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots),$$

$$\{-1 < x < +1\}$$

lso ist

$$\mathrm{l}\,\frac{1+\frac{v}{b}}{1-\frac{v}{b}} = 2\left\{\frac{v}{b} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{v}{b}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{v}{b}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{v}{b}\right)^7 + \ldots\right\}$$

eil natürlich, insofern $\operatorname{Sect}\varphi$ eine endliche reelle Grösse ist, ermöge des obigen Ausdrucks des Flächeninhalts dieses Sectors, kleiner als die Einheit sein muss; folglich ist nach dem Obigen:

$$\operatorname{Sect}\varphi = ab\sin\alpha\cdot\left\{\frac{v}{b} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{v}{b}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{v}{b}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{v}{b}\right)^7 + \ldots\right\}.$$

Weil das hier immer als positiv betrachtete $v = b\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$ st, so ist nach dem Obigen

$$\operatorname{Sect}\varphi = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}},$$

lso, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs unter dem Zeichen les natürlichen Logarithmus mit dem Zähler dieses Bruchs mulplicirt:

$$\operatorname{Sect}\varphi = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

oder, insofern y als positiv angenommen wird:

$$\text{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\, l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Für die Axen der Hyperbel ist dieser Ausdruck unter der F[...] $\text{Sect}\varphi = \frac{1}{2}ab\, l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$ längst bekannt, und es ist gewiss s[...] merkwürdig, dass derselbe, nach blosser Multiplication mit si[...] für jede zwei conjugirte Durchmesser überhaupt gilt. Für [...] hyperbolische Segment AB_1A_1 (m. s. die Figuren) erhält man [...] der Stelle:

$$AB_1A_1 = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\left\{xy - ab\, l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\right\}.$$

Andere Betrachtungen über diese interessanten Gegenstä[...] will ich jetzt nicht weiter anstellen.

XXII.

Integration einer lineären Differentialgleichung zweit[...] Ordnung zwischen zwei Variabelen.

Von

Herrn Doctor *Buttel*

in Hamburg.

Durch den Aufsatz Nr. V. im Archiv Band XXI. wurde i[...] auf eine von mir früher bearbeitete Aufgabe zurückgeführt, welc[...] darin bestand, die Curve zu untersuchen, deren Coordinat[...] u, v, w durch die unendlichen Reihen

$$u = 1 + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^6}{1.2.3....6} + \frac{x^9}{1.2.3....9} + ...,$$

$$v = \frac{x}{1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^7}{1.2.3....7} + \frac{x^{10}}{1.2.3....10} + ...,$$

$$w = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3....5} + \frac{x^8}{1.2.3....8} + \frac{x^{11}}{1.2.3....11} + ...$$

egeben sind.

Da die Addition dieser drei Gleichungen $u+v+w=e^x$ ergiebt d die Differentiationen nach x unmittelbar die Relationen liefern:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=w,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=v;\ \frac{\partial v}{\partial x}=u,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=w;\ \frac{\partial w}{\partial x}=v,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=u;$$

erhält man durch Substitution in obige Gleichung $u+v+w=e^x$ gende drei lineäre Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+u=e^x, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}+v=e^x, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}+w=e^x; \tag{3}$$

en Integration sich aus dem in Moigno calcul intégral, ente septième leçon 248. III. 1. dargestellten Integral der fferentialgleichung

$$D_x^2 y+A_1 D_x y+A_2 y=X$$

giebt. Dieses ist daselbst:

$$=\frac{e^{\alpha x}}{\zeta}\{\sin\zeta x(C_1+\int Xe^{-\alpha x}\cos\zeta x\partial x)+\cos\zeta x(C_2-\int Xe^{-\alpha x}\sin\zeta x\partial x)\},$$

nn die Hülfsgleichung $v^2+A_1 v+A_2=0$ ist, und die Wurzeln rselben, da sie imaginär sind, diese Gestalt haben:

$$v_1=\alpha+i\zeta,\quad v_2=\alpha-i\zeta.$$

Berechnen wir hiernach eine der obigen Differentialgleichun- n, etwa $\frac{\partial^2 u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}+u=e^x$, so erhalten wir folgende Beziehun- n zum dargestellten Integrale.

Da die Wurzeln der Gleichung $v^2+v+1=0$ die Form haben:

$$v_1=-\tfrac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\quad v_2=-\tfrac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2};$$

o ist

$$\alpha=-\tfrac{1}{2},\ \zeta=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

olglich

$$u=\frac{2e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{3}}\{\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\,(C_1+\int e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\partial x)$$
$$+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\,(C_2-\int e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\partial x)$$

Die Integrale ergeben sich aus den bekannten Formeln:

$$\int e^{ax}\cos bx\partial x=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+C_3$$

und

$$\int e^{ax}\sin bx\partial x=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C_4,$$

wenn man $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ setzt, wodurch man nach leichter Rechnung erhält:

$$\int e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\partial x=(\tfrac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)\,e^{\frac{1}{2}x}+C_3,$$

$$\int e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\partial x=(\tfrac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)\,e^{\frac{1}{2}x}+C_4.$$

Setzt man statt der Constanten C_1+C_3 und C_2-C_4 bezüglich C' und C'', so wird

$$u=\frac{2e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{3}}\Big[\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\{C'+e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}$$
$$+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\{C''-e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}\Big]. \quad (4$$

Die Constanten C' und C'' bestimmen sich aus den beiden Bedingungen: für $x=0$ wird $u=1$ und $\frac{\partial u}{\partial x}=0$; also

$$u=1=\frac{2}{\sqrt{3}}[C''+\frac{1}{2\sqrt{3}}] \text{ oder } C''=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bildet man den Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial x}$, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{3}}\Big[\{C''-e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\{C'+e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big]$$

$$+\frac{2e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{3}}\Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\{C''-e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\{-\tfrac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

$$-e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\{C'+e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\}$$

$$+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\{\tfrac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}(\tfrac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+e^{\frac{1}{2}x}(-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}\Big].$$

$x=0$ und $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ geben folgende Relation:

$$0=-\frac{1}{\sqrt{3}}\{C''+\frac{1}{2\sqrt{3}}\}+\frac{2}{\sqrt{3}}\{\tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(C'+\tfrac{1}{2})\}$$

und da $C''=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, so wird $0=-\tfrac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(C'+\tfrac{1}{2})$ oder $C'=0$, so dass darnach jetzt das Integral in (4) folgende Gestalt annimmt:

Nach Ausführung einiger Reductionen, indem sich einmal $-\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ gegen $+\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ weghebt und $\frac{1}{2\sqrt{3}}\{\cos^2\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sin^2\frac{\sqrt{3}}{2}x\}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ wird, erhält man:

$$u=\tfrac{1}{3}e^x+\tfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x. \tag{5}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die geschlossenen Ausdrücke für v und w aus den Gleichungen (2) und (3) finden, nur dass bei der Constantenbestimmung für $x=0$ $\frac{\partial v}{\partial x}=1$ wird, was bei der Berechnung zu berücksichtigen ist. Da jedoch $\frac{\partial u}{\partial x}=w$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=v$ ist, so lassen sich v und w durch die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung herstellen. Führt man die Differentiationen wirklich aus, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\tfrac{1}{3}e^x-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x=w. \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x}=\tfrac{1}{3}e^x-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x=v. \tag{7}$$

Und hierzu Gleichung (5):

$$\tfrac{1}{3}e^x+\tfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x=u.$$

Diese Ausdrücke müssen, wie es auch der Fall ist, summirt die Gleichung $u+v+w=e^x$ geben. Nach dem Obigen müssen auch die verschiedenen Differentialquotienten von v und w wieder auf u zurückführen, wovon man sich durch die Rechnung überzeugt.

Wenn die Grössen u, v, w als Coordinaten im Raum angenommen werden, so ist die daraus zu bestimmende Curve eine Curve doppelter Krümmung. Durch Elimination von x ergeben sich zwei Gleichungen, welche zwei Oberflächen repräsentiren, deren Durchschnitt die Curve doppelter Krümmung giebt. Bezeichnen wir die Gleichung

$$u+v+w=e^x, \tag{8}$$

welche wir als Folge der Gleichungen (5), (6) und (7) zu Hülfe nehmen, durch (8), so ergiebt sich durch Substitution von (8) in (5), wenn man

$$e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{\sqrt{u+v+w}}$$

setzt:

$$u=\frac{u+v+w}{3}+\frac{2}{3\sqrt{u+v+w}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

oder

$$\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x=\tfrac{1}{2}(2u-v-w)\sqrt{u+v+w}.$$

Folglich

$$\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x=\sqrt{1-\cos^2\frac{\sqrt{3}}{2}x}=\tfrac{1}{2}\sqrt{4-(2u-v-w)^2(u+v+w)}.$$

Setzen wir die Werthe für $\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$, e^x und $e^{-\frac{1}{2}x}$ in eine der Gleichungen (6) oder (7), etwa in (7), so ergiebt sich:

$$v=\frac{u+v+w}{3}-\frac{(2u-v-w)\sqrt{u+v+w}}{6\sqrt{u+v+w}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3(u+v+w)}}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{4-(2u-v-w)^2(u+v+w)}$$

oder

$$v-w=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{u+v+w}}\sqrt{4-(2u-v-w)^2(u+v+w)}.$$

Quadriren wir diese Gleichung, so finden wir:

$$3(v-w)^2(u+v+w)=4-(2u-v-w)^2(u+v+w),$$

und nach Ausführung der Rechnung:

$$3uv^2+3uw^2-6uvw+3v^3-3v^2w-3vw^2+3w^3$$

$$=4-4u^3+3uv^2+3uw^2+6uvw-v^3-3v^2w-3vw^2-w^3$$

oder

$$-12uvw+4v^3+4w^3-4+u^3=0$$

oder

$$u^3+v^3+w^3-3uvw-1=0. \tag{9}$$

Ferner giebt die Subtraction von (6) und (7):

$$v-w=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

und da $x=\mathrm{l}(u+v+w)$ ist:

$$v-w=\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{u+v+w}}\sin\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{l}(u+v+w)\right\},$$

und die Addition von (6) und (7):

$$v+w=\tfrac{2}{3}e^{x}-\tfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

und nach Einführung der Werthe von e^x, $e^{-\frac{1}{2}x}$ und x:

$$v+w=\tfrac{2}{3}(u+v+w)-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{u+v+w}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{l}(u+v+w)$$

oder

$$\frac{2u-v-w}{3}=\frac{2}{3\sqrt{u+v+w}}\cos\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{l}(u+v+w)\right\}.$$

Dividire ich diese Gleichung in die Gleichung für $v-w$, so er-halte ich:

$$\frac{v-w}{2u-v-w}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{l}(u+v+w)\right\}$$

oder

$$\mathrm{l}(u+v+w)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{3}(v-w)}{2u-v-w}\right\} \tag{10}$$

als Gleichung der zweiten Oberfläche.

Dies Resultat stimmt mit dem im Aufsatze Nr. V. Band XX vollständig überein. Die Diskussion der Curve selbst erforde[rt,] wenn auch einzelne elegante analytische Formen sich ergebe[n,] doch sehr verwickelte Rechnungen, und würde daher hier [zu] weit führen.

XXIII.

Lösung des Problems der Bewegung eines festen schweren, um einen Punkt der Umdrehungsaxe rotirenden Revolutionskörpers in Functionen, welche die Zeit explicite enthalten.

Von
Herrn Doctor *Lottner*,
Lehrer der Mathematik und Physik an der Realschule zu Lippstadt.

I.

C. G. J. Jacobi hat in seiner berühmten Abhandlung im 39sten Bande des Crelle'schen Journals die Rotationsbewegung eines beliebigen Körpers um einen festen Punkt, wenn keine beschleunigenden Kräfte wirken, bestimmt, und zwar so, dass alle zur Kenntniss der Bewegung nöthigen Grössen explicite durch die Zeit ausgedrückt sind. Er fand, dass dieselbe sich aus zwei periodischen zusammensetze, deren Perioden im Allgemeinen unter einander incommensurabel sind. Diese Periodicität ging klar hervor, wenn man, anstatt die x- und yAxe in der unveränderlichen Ebene als fest anzunehmen, denselben in dieser eine gewisse gleichförmige rotatorische Bewegung ertheilte. Dann werden die neun Coefficienten, durch welche die Richtung der Hauptaxen bestimmt wird, periodische Functionen der Zeit. Auf ganz ähnliche Weise kann man auch den Fall behandeln, wenn ein schwerer Rotationskörper um einen Punkt seiner Rotationsaxe pendulirt, einen Fall, den schon Lagrange auf Quadraturen geführt hat. Diese Bewegung setzt sich dann aus drei periodischen, im Allgemeinen unter einander incommensurabeln zusammen. Man kann sich dieselben auf folgende Weise deutlich machen:

1) Man ertheile, ebenso wie Jacobi, in einer horizontalen, durch den festen Punkt gehenden Ebene den Axen der x und y eine

gleichförmige Rotation in dieser Ebene im Sinne der anfänglichen Bewegung des Körpers, d. h. man setze

$$\text{statt } x: \quad x\cos\Psi(t-t_0)-y\sin\Psi(t-t_0),$$
$$\text{statt } y: \quad y\cos\Psi(t-t_0)+x\sin\Psi(t-t_0),$$

wo Ψ eine Constante ist. Nach Verlauf der Zeit $\frac{2\pi}{\Psi}$ werden die Axen wieder an derselben Stelle sein.

2) Ausser dem festen Coordinatensysteme x, y, z hat man ein zweites x_1, y_1, z_1, welches auf die Hauptaxen des rotirenden Körpers bezogen ist. Man ertheile den Axen der x_1 und y_1 um die z_1Axe (die Umdrehungsaxe) eine zweite gleichförmige Rotation, d. h. man setze

$$\text{statt } x_1: \quad x_1\cos\Phi(t-t_0)+y_1\sin\Phi(t-t_0),$$
$$\text{statt } y_1: \quad y_1\cos\Phi(t-t_0)-x_1\sin\Phi(t-t_0),$$

wo Φ eine zweite Constante ist, von deren negativem oder positivem Zeichen es abhängt, ob die Bewegung in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne wie die der x- und yAxe geschieht. Nach Verlauf der Zeit $\frac{2\pi}{\Phi}$ werden die beiden Hauptaxen wieder in derselben Lage sich befinden.

3) Nach diesen Annahmen werden die neun Coefficienten, durch welche die Stellung der rotatorisch beweglichen Hauptaxen um die ebenfalls beweglichen x- und yAxen bestimmt ist, periodische Functionen der Zeit. Wenn man also setzt:

$$x_1 = ax + by + cz,$$
$$y_1 = a'x + b'y + c'z,$$
$$z_1 = a''x + b''y + c''z,$$

wo x, y, z, x_1, y_1, z_1 die in 1) und 2) näher bestimmten transformirten Coordinaten sind, so sind $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ Functionen der Zeit, die eine gewisse, vollkommen angebbare Periode T haben.

Man sieht hieraus, dass, wenn man die Positionen des beweglichen Körpers während einer begränzten Zeit T kennt, man daraus alle zukünftigen und vergangenen Positionen leicht ableiten kann. Es sei z. B. die Lage des Körpers zur Zeit t gegeben und man solle die zur Zeit $t \pm iT$ (wo i irgend eine ganze Zahl ist) stattfindende bestimmen, so drehe man den Körper zuerst um die

zAxe, d. h. um die Richtung der Schwere, um einen constanten Winkel $i\Psi T$; alsdann drehe man ihn um die z_1Axe, d. h. um die Richtung seiner Revolutionsaxe, um einen Winkel $-\Phi T$ (beide Rotationen mögen in demselben Sinne wie die anfängliche Bewegung des Körpers geschehen). Hierauf wird man die verlangte Stellung haben. Die entgegengesetzte Drehung muss man anwenden, wenn die zur Zeit $t-iT$ gehörige Position gefunden werden soll.

II.

Bestimmung der neun Coefficienten der Bewegung und der Umdrehungsgeschwindigkeiten durch die Zeit vermittelst der elliptischen Functionen.

Im Folgenden wollen wir überall die Bezeichnungen von Poisson (Mécanique Tom II. §. 425–429.) gebrauchen.

A und C seien die Trägheitsmomente in Bezug auf die x_1- und y_1Axe.

M die Masse des Körpers, g die Schwere, $Mg=P$.

γ die Entfernung des Schwerpunkts von der x_1y_1Ebene.

n die Umdrehungsgeschwindigkeit, parallel mit derselben Ebene.

l das Moment der Grössen der Bewegung in Bezug auf die vertikale Axe der z.

h die bei der Bestimmung der lebendigen Kraft vorkommende Constante.

α_1, α_2, α_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(2AP\gamma\xi+Ah)(1-\xi^2)-(Cn\xi-l)^2=0,$$

α_3 ist immer negativ und >1.

k der Modul aller vorkommenden elliptischen Functionen $=\sqrt{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}}$.

$$k'=\sqrt{\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}}.$$

K der elliptische Quadrant $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

$i=\sqrt{-1}$, $\sin^2\operatorname{am} ia_1=\frac{\alpha_1-\alpha_3}{1-\alpha_1}$, $\sin^2\operatorname{am}(ia_2+K)=\frac{\alpha_1-\alpha_3}{1+\alpha_1}$ $=\sin^2\operatorname{coam} ia_2$ oder, was dasselbe ist:

$$a_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{1-\alpha_3}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k'^2x^2}},$$

$$a_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{-(1+\alpha_3)}{\alpha_2-\alpha_3}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k'^2x^2}}.$$

$$m = \sqrt{\frac{P\gamma}{2A}(\alpha_1 - \alpha_3)}.$$

$$m(t-t_0) = u.$$

H und Θ die von **Jacobi** eingeführten Transscendenten.

$$H[i(a_1+a_2)+K]\; H[i(a_1-a_2)-K] = D.$$

$$\Theta(u-ia_1) = A', \quad \Theta(u+ia_1) = B', \quad \Theta(u-ia_2-K) = A'',$$
$$\Theta(u+ia_1+K) = B''.$$

Alsdann haben wir folgende

T a f e l

der neun Coefficienten der Bewegung.

$$a = \frac{1}{2D}\cdot\frac{H^2ia_1(B''^2+A''^2) - H^2(ia_2+K)(B'^2+A'^2)}{\Theta^2u},$$

$$a' = \frac{1}{2iD}\cdot\frac{H^2ia_1(B''^2-A''^2) - H^2(ia_2+K)(B'^2-A'^2)}{\Theta^2u};$$

$$b = -\frac{1}{2iD}\cdot\frac{H^2ia_1(B''^2-A''^2) + H^2(ia_2+K)(B'^2-A'^2)}{\Theta^2u},$$

$$b' = \frac{1}{2D}\cdot\frac{H^2ia_1(B''^2+A''^2) + H^2(ia_2+K)(B'^2+A'^2)}{\Theta^2u};$$

$$c = -\frac{Hia_1\,H(ia_2+K)}{D}\;\frac{B''B' - A''A'}{\Theta^2u},$$

$$c' = -\frac{Hia_1\,H(ia_2+K)}{iD}\;\frac{B''B' + A''A'}{\Theta^2u};$$

$$a'' = \frac{Hia_1\,H(ia_2+K)}{D}\;\frac{B'A'' - A'B''}{\Theta^2u},$$

$$b'' = \frac{Hia_1 H(ia_2+K)}{iD}\;\frac{B'A'' + A'B''}{\Theta^2u},$$

$$c'' = \frac{1}{D}\,\frac{H^2ia_1B''A'' + H^2(ia_2+K)B'A'}{\Theta^2u}.$$

Die Grössen Ψ und Φ, von denen die Bewegungen der Axen der x, y und der x_1 und y_1 abhängen, werden erhalten durch die Formeln:

$$\Psi = m\left(\frac{d.\log Hia_1}{da_1} + \frac{d.\log H(ia_2+K)}{da_2}\right),$$

$$\Phi = \frac{n(A-C)}{A} - m\left(\frac{d.\log Hia_1}{da_1} - \frac{d.\log H(ia_2+K)}{da_2}\right).$$

III.

Beweis.

1.

Die neun Coefficienten a, b, c etc. lassen sich bekanntlich als Functionen dreier Winkel ϑ, ψ, φ wie folgt ausdrücken:

$$a = \cos\vartheta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi, \quad b = \cos\vartheta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi,$$
$$c = \sin\vartheta \sin\psi;$$
$$a' = \cos\vartheta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi, \quad b' = \cos\vartheta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi,$$
$$c' = \sin\vartheta \cos\psi;$$
$$a'' = -\sin\vartheta \sin\varphi, \quad b'' = -\sin\vartheta \cos\varphi, \quad c'' = \cos\vartheta.$$

Die geometrische Bedeutung von φ, ϑ, ψ wollen wir übergehen, da sie von Euler, Poisson und Jacobi genugsam dargethan ist. Die dynamischen Differentialgleichungen des Problems lauten bei Poisson am angeführten Orte:

$$\left.\begin{aligned} &Cn\cos\vartheta - A\sin^2\vartheta \frac{d\psi}{dt} = l, \\ &A\left(\sin^2\vartheta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) = 2P\gamma\cos\vartheta + h, \\ &\frac{d\varphi}{dt} = n + \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Elimination ergiebt hieraus, wenn $(2AP\gamma\cos\vartheta + Ah)\sin^2\vartheta - (Cn\cos\vartheta - l)^2$ mit R bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned} &t - t_0 = \int \frac{A\sin\vartheta}{\sqrt{R}} d\vartheta, \quad \psi - \psi_0 = \int \frac{Cn\cos\vartheta - l}{\sin\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{R}}, \\ &\varphi - \varphi_0 = \frac{n(A-C)}{A}(t - t_0) + \int \frac{Cn - l\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{R}}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ψ_0 und φ_0 sind die zur Zeit t_0 stattfindenden Werthe von ψ und φ.

Aus der ersten Gleichung ist ϑ als Function von t zu bestimmen; dann liefern die beiden andern ψ und φ als Function zunächst von ϑ, mithin auch von t. Man setze $\cos\vartheta = \xi$, so wird

$$t - t_0 = -\int \frac{A d\xi}{\sqrt{(2AP\gamma\xi + Ah)(1-\xi^2) - (Cn\xi - l)^2}} = -\int \frac{A d\xi}{\sqrt{R}}.$$

Um dieses Integral auf die bekannte Form der elliptischen Functionen zu bringen, ist es nöthig, den Ausdruck dritter Ordnung unter der Wurzel in seine drei Factoren aufzulösen. Dieselben müssen alle reell sein. Um dies darzuthun, bemerken wir zunächst, dass R für reelle Werthe von ξ immer reell und stetig ist. Die Gränzen, zwischen denen $\xi = \cos\vartheta$ liegen kann, wenn ϑ reell ist, sind $+1$ und -1; für diese Werthe wird der Ausdruck respective $-(Cn-l)^2$ und $-(Cn+l)^2$, also beide Male negativ. Er muss aber, während ξ sich in dem Intervalle von $+1$ und -1 bewegt, jedenfalls eine Zeit lang positiv sein, denn sonst würde $\sqrt{R}$ und in Folge davon t imaginär, was der Natur des Problems widerspricht. R muss also, während ξ von -1 bis $+1$ wächst, zwei Mal durch 0 hindurch gehen, also die Gleichung $R=0$ zwei reelle Wurzeln haben, welche die Cosinus der grössten und kleinsten Werthe von ϑ ausdrücken. Daraus folgt von selbst, dass die dritte Wurzel von $R=0$ ebenfalls reell sein muss. Sie kann ferner nicht positiv und grösser als 1 sein. Denn dies könnte nur stattfinden, wenn R für positive Werthe von ξ, die grösser als 1 sind, durch 0 hindurch vom Negativen zum Positiven ginge. Dann müsste R aber nothwendigerweise zum vierten Male durch Null hindurch vom Positiven zum Negativen gehen, da es für $\xi = +\infty, -\infty$ wird. Eine vierte Wurzel ist aber unmöglich. Ferner kann die dritte Wurzel auch nicht zwischen -1 und $+1$ liegen. Dies würde nämlich bedingen, dass R zum dritten Male für dieses Intervall von ξ durch Null hindurchginge. Dann müsste dieser Fall auch ebenfalls noch einmal eintreten, weil R für $+1$ und -1 negativ ist. Es bleibt also nur übrig, dass die fragliche Wurzel negativ und grösser als 1 ist. Setzt man

$$\frac{Ah + C^2n^2}{2AP\gamma} = 3\mu_1, \quad 1 + \frac{Cnl}{AP\gamma} = 6\mu_2, \quad \frac{Ah - l^2}{2AP\gamma} = 2\mu_3,$$

$$\nu = \mu_1^2 + 2\mu_2, \quad \cos\chi = \frac{\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 - \mu_1^3}{\nu^{\frac{3}{2}}};$$

so werden die Wurzeln der Gleichung:

$$\xi^3 + 3\mu_1\xi^2 - 6\mu_2\xi - 2\mu_3 = 0:$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 2\sqrt{\nu}\cos\frac{\chi}{3} - \mu_1 = \alpha_1, \\ \xi_2 &= 2\sqrt{\nu}\cos\frac{\pi+\chi}{3} - \mu_1 = \alpha_2, \\ \xi_3 &= -2\sqrt{\nu}\cos\frac{\pi-\chi}{3} - \mu_1 = \alpha_3. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Da nun die Differenzen $\alpha_1 - \alpha_2 = 4\sqrt{\nu}\cos\frac{\pi+2\chi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$ und $_1 - \alpha_3 = 4\sqrt{\nu}\sin\frac{\chi}{3}\sin\frac{\pi}{3}$ immer positiv sind (weil χ immer unter liegend angenommen werden kann, also $\frac{\pi+2\chi}{6}$ unter $\frac{\pi}{2}$ liegt), o kann man schliessen, dass α_3 die zuletzt besprochene Wurzel t und $\xi = \cos\vartheta$ immer zwischen α_1 und α_2 liegen muss, um eelle Werthe für $\sqrt{R}$ zu geben.

Um nun das elliptische Integral

$$t - t_0 = -\sqrt{\frac{A}{2P\gamma}}\int\frac{d\xi}{\sqrt{-(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)}}$$

uf die Normalform zu bringen, setzt man bekanntlich

$$\frac{\alpha_1 - \xi}{\alpha_1 - \alpha_2} = z^2, \quad k^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}\frac{\chi}{3}}{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}\frac{\chi}{3}}.$$

Man erhält alsdann:

$$-\int\frac{d\xi}{\sqrt{-(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}.$$

Es sei zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{P\gamma}{2A}(\alpha_1 - \alpha_3)} = m, \quad m(t - t_0) = u;$$

ann ergiebt sich:

$$\cos\vartheta = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2)z^2 = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2)\sin^2\operatorname{am} u. \quad (4)$$

Mithin wäre ϑ explicite durch die Zeit ausgedrückt. Der Zeitraum, während dessen ϑ von seinem kleinsten bis zu seinem grössten Werthe übergeht, ist hiernach $\frac{K}{m}$.

2.

Da

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{R}} = \frac{1}{mA}du$$

ist, so haben wir zur Bestimmung von ψ die Gleichung:

$$\psi - \psi_0 = \frac{1}{mA}\int \frac{Cn\cos\vartheta - l}{\sin^2\vartheta}du = \frac{1}{2mA}\int\left(\frac{Cn-l}{1-\cos\vartheta} - \frac{Cn+l}{1+\cos\vartheta}\right)du$$

oder nach (4):

$$\left.\begin{aligned}(\psi-\psi_0)2mA = \frac{Cn-l}{1-\alpha_1}\int\frac{du}{1+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\sin^2\mathrm{am}\,u}\\ -\frac{Cn+l}{1+\alpha_1}\int\frac{du}{1-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\sin^2\mathrm{am}\,u}.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1}$ ist eine positive Grösse, $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+\alpha_1}$ ist ebenfalls positiv und kleiner wie 1, k^2 war gleich $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}$; da aber $-\alpha_3$ nach dem Vorhergehenden grösser wie 1 ist, so ist $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+\alpha_1} > k^2$ und <1. Man muss also, um die vorstehenden Integrale auf die Jacobi'sche Form der elliptischen Functionen dritter Gattung zu bringen (siehe Fundamenta nova. pag. 170.), setzen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1} &= -k^2\sin^2\mathrm{am}\,i a_1 = -k^2\sin^2\varepsilon_1,\\ \frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+\alpha_1} &= k^2\sin^2\mathrm{am}(ia_2+K) = k^2\sin^2\mathrm{coam}\,ia_2 = k^2\sin^2\varepsilon_2.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Aus diesen Formeln ergeben sich leicht die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\varepsilon_1 &= -\frac{\alpha_1-\alpha_3}{1-\alpha_1}, \quad \cos^2\varepsilon_1 = \frac{1-\alpha_3}{1-\alpha_1}, \quad \Delta^2\varepsilon_1 = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1};\\ \sin^2\varepsilon_2 &= \frac{\alpha_1-\alpha_3}{1+\alpha_1}, \quad \cos^2\varepsilon_2 = \frac{1+\alpha_3}{1+\alpha_1}, \quad \Delta^2\varepsilon_2 = \frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Nach diesen Substitutionen nimmt die Gleichung (5) die Form an:

(8)

$$(\psi-\psi_0)2mA = \frac{2(Cn\alpha_1-l)}{1-\alpha_1^2}u + \frac{(Cn-l)\sin\varepsilon_1}{(1-\alpha_1)\cos\varepsilon_1\Delta\varepsilon_1}\int\frac{k^2\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_1\Delta\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{1-k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u}$$
$$-\frac{(Cn+l)\sin\varepsilon_2}{(1+\alpha_1)\cos\varepsilon_2\Delta\varepsilon_2}\int\frac{k^2\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2\Delta\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{1-k^2\sin^2\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u}.$$

ist aber

$$\frac{\sin\varepsilon_1}{(1-\alpha_1)\cos\varepsilon_1\Delta\varepsilon_1}=\frac{\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}}{\sqrt{-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}},$$

$$\frac{\sin\varepsilon_2}{(1+\alpha_1)\cos\varepsilon_2\Delta\varepsilon_2}=\frac{\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}}{\sqrt{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}}.$$

erücksichtigt man ferner den Werth von m und macht von der acobi'schen Bezeichnung Gebrauch, so verwandelt sich (8) in:

(9)

$$-\psi_0=\frac{Cn\alpha_1-l}{1-\alpha_1^2}\frac{u}{mA}+\frac{Cn-l}{\sqrt{2AP\gamma}}\frac{1}{\sqrt{-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}}\Pi(u, ia_1)$$
$$-\frac{Cn+l}{\sqrt{2AP\gamma}}\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}}\Pi(u, ia_2+K).$$

ie Grössen

$$\sqrt{2AP\gamma}\sqrt{-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} \text{ und } \sqrt{2AP\gamma}\sqrt{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}$$

erden erhalten, wenn man in $\sqrt{R}$ für ξ respective $+1$ und -1 etzt; in diesen Fällen wird die Wurzelgrösse $i(Cn-l)$ und $i(Cn+l)$. Also ist das Resultat:

$$\psi-\psi_0=\frac{Cn\alpha_1-l}{1-\alpha_1^2}\frac{u}{mA}+\frac{1}{i}\Pi(u, ia_1)+\frac{1}{i}\Pi(u, ia_2+K).$$

ach den Formeln der „Fundamenta" pag. 146. folgt hieraus:

$$\left.\begin{aligned}\psi-\psi_0=\frac{Cn\alpha_1-l}{1-\alpha_1^2}\frac{u}{mA}-\left\{\frac{d.\log\Theta ia_1}{da_1}+\frac{d.\log\Theta(ia_2+K)}{da_2}\right\}u\\+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_2-K)\,\Theta(u-ia_1)}{\Theta(u+ia_2+K)\,\Theta(u+ia_1)}.\end{aligned}\right\}(10)$$

s muss nun noch das Glied $\frac{Cn\alpha_1-l}{1-\alpha_1^2}$ umgewandelt werden. Beichnet man die Wurzelgrössen in (9) mit R_1 und R_{-1}, so ist

$$-2il=\sqrt{2AP\gamma}(R_1+R_{-1}),\quad 2iCn=\sqrt{2AP\gamma}(R_1-R_{-1}),$$

$$2i(Cn\alpha_1-l)=\sqrt{2AP\gamma}\{(1+\alpha_1)R_1+(1-\alpha_1)R_{-1}\},$$

$$\frac{2i(Cn\alpha_1-l)}{(1-\alpha_1^2)\sqrt{2AP\gamma}\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}}\left\{\frac{R_1}{1-\alpha_1}+\frac{R_{-1}}{1+\alpha_1}\right\}$$

$$=\frac{\cos\text{am}\,ia_1\,\Delta\,\text{am}\,ia_1}{\sin\text{am}\,ia_1}+\frac{\cos\text{am}(ia_2+K)\Delta\,\text{am}(ia_2+K)}{\sin\text{am}(ia_2+K)}.$$

Nach einer leichten Rechnung ergiebt sich als Endresultat:

$$\frac{Cn\alpha_1 - l}{1-\alpha_1^2}\,\frac{u}{mA}$$

$$= -\left[\frac{d.(\log H i a_1 - \log \Theta i a_1)}{da_1} + \frac{d.(\log H(ia_2+K) - \log\Theta(ia_2+K))}{da_2}\right] u.$$

Addirt man dieses Glied zu dem andern in u multiplizirten in (10), so heben sich die ΘFunctionen fort. Man setze nun zur Abkürzung:

$$m\left(\frac{d.\log H i a_1}{da_1} + \frac{d.(\log H(ia_2+K))}{da_2}\right) = \Psi,\ \psi - \psi_0 + \Psi(t-t_0) = \psi'.$$

Dann wird

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}. \tag{11}$$

Man sieht hieraus, dass der Winkel ψ, ebenso wie in dem von Jacobi behandelten Falle, aus einem der Zeit proportionalen Gliede und einem oscillatorischen besteht. Nehmen wir also an, dass die Axe der x und y nicht fest wäre, sondern eine der Zeit proportionale Umdrehungsbewegung hätte, so dass sie in der Zeit t einen Winkel Ψt beschriebe, so können wir in die neun Coefficienten statt ψ den Winkel ψ' einführen.

Wenn u um $2K$ oder t um $\frac{2K}{m} = T$ wächst, so vermindert sich ψ um $\frac{2K}{m}\Psi$ oder um $T\Psi$, da die Grösse unter dem log denselben Werth behält. ψ' hat also eine Periode von der Weite T.

Aus der Gleichung (11) ergiebt sich mit leichter Mühe:

$$\left.\begin{aligned} e^{i\psi'} &= \sqrt{\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}},\\ \cos\psi' &= \frac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)+\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{2\sqrt{N}},\\ \sin\psi' &= -\frac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)-\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{2i\sqrt{N}}, \end{aligned}\right\} \tag{11$_a$}$$

wenn $N = \Theta(u+ia_1)\,\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)\,\Theta(u-ia_2-K)$.

3.

Man kann auch der grösseren Gleichmässigkeit wegen ver-

mittelst der in (7). gegebenen Werthe der α den $\cos\vartheta$ durch die ΘFunctionen ausdrücken. Es ergiebt sich:

$$\alpha_1 = \frac{\sin^2\varepsilon_1 + \sin^2\varepsilon_2}{\sin^2\varepsilon_1 - \sin^2\varepsilon_2},$$

$$1+\alpha_1 = \frac{2\sin^2\varepsilon_1}{\sin^2\varepsilon_1 - \sin^2\varepsilon_2} = \frac{2H^2ia_1\,\Theta^2(ia_2+K)}{H^2ia_1\,\Theta^2(ia_2+K) - \Theta^2ia_1\,H^2(ia_2+K)},$$

$$1-\alpha_1 = -\frac{2\sin^2\varepsilon_2}{\sin^2\varepsilon_1 - \sin^2\varepsilon_2} = -\frac{2H^2(ia_2+K)\,\Theta^2ia_1}{H^2ia_1\,\Theta^2(ia_2+K) - \Theta^2ia_1\,H^2(ia_2+K)}.$$

Nach der Formel (21) Seite 175. der „Fundamenta nova“:

$$H(u+v)\,H(u-v) = \frac{H^2u\,\Theta^2v - \Theta^2u\,H^2v}{\Theta^2 0}$$

lassen sich diese Ausdrücke auch folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} 1+\alpha_1 &= \frac{2H^2ia_1\,\Theta^2(ia_2+K)}{\Theta^2 0\,H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}, \\ 1-\alpha_1 &= -\frac{2H^2(ia_2+K)\,\Theta^2ia_1}{\Theta^2 0\,H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Ferner

$$\cos\vartheta = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2)\sin^2\mathrm{am}\,u = \frac{\sin^2\varepsilon_1 + \sin^2\varepsilon_2}{\sin^2\varepsilon_1 - \sin^2\varepsilon_2} - \frac{2k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_2}{\sin^2\varepsilon_1 - \sin^2\varepsilon_2}\sin^2\mathrm{am}\,u$$

$$= \frac{\sin^2\varepsilon_1(1-k^2\sin^2\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u) + \sin^2\varepsilon_2(1-k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u)}{\sin^2\varepsilon_1 - \sin^2\varepsilon_2}.$$

Durch Anwendung der Formel (3) Seite 152. der „Fundamenta“:

$$\Theta(u+a)\,\Theta(u-a) = \left(\frac{\Theta u\,\Theta a}{\Theta 0}\right)^2 (1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

wird hieraus erhalten:

$$c'' = \cos\vartheta = \frac{1}{H(i(a_1+a_2)+K)\,H(i(a_1-a_2)-K)} \tag{13}$$

$$\times\left\{\frac{H^2ia_1\,\Theta(u+ia_2+K)\,\Theta(u-ia_2-K) + H^2(ia_2+K)\,\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u-ia_1)}{\Theta^2u}\right\}.$$

Um die Coefficienten c und c' zu bestimmen, muss man auch $\sin\vartheta$ durch die ΘFunctionen ausdrücken. Man hat

29*

$$\sin^2\vartheta = (1-\cos\vartheta)(1+\cos\vartheta)$$
$$= (1-\alpha_1^2)(1-k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u)(1-k^2\sin^2\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u)$$
$$= (1-\alpha_1^2)\frac{\Theta^4 0 N}{\Theta^2 ia_1\,\Theta^2(ia_2+K)\,\Theta^4 u}$$

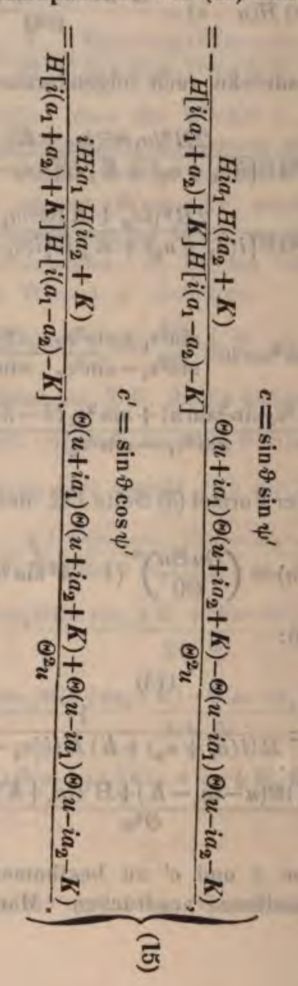
nach der eben citirten Formel

$$= -\frac{4\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_2}{(\sin^2\varepsilon_1-\sin^2\varepsilon_2)^2}\frac{\Theta^4 0 N}{\Theta^2 ia_1\,\Theta^2(ia_2+K)\,\Theta^4 u},$$

folglich mit Benutzung von (12):

$$\sin\vartheta = \frac{2iH ia_1\,H(ia_2+K)}{H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}\frac{\sqrt{N}}{\Theta^2 u}.$$

Man erhält durch Multiplication von (11) und (14) die Werthe



$$\left.\begin{aligned} c &= \sin\vartheta\sin\psi' \\ &= -\frac{H ia_1\,H(ia_2+K)}{H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}\,\frac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)-\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u}, \\ c' &= \sin\vartheta\cos\psi' \\ &= \frac{iH ia_1\,H(ia_2+K)}{H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}\,\frac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u+ia_2+K)+\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u}. \end{aligned}\right\}\quad(15)$$

4.

Wenden wir uns nun zur Bestimmung des Winkels φ. Derselbe war durch folgende Gleichung gegeben:

$$\varphi-\varphi_0=\frac{n(A-C)}{A}(t-t_0)+\int\frac{Cn-l\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{R}}.$$

ach einigen Umformungen, die denen in (2) vollkommen analog nd, nimmt die Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\varphi-\varphi_0=\frac{n(A-C)}{mA}u+\frac{1}{2mA}\int\left(\frac{Cn-l}{1-\cos\vartheta}+\frac{Cn+l}{1+\cos\vartheta}\right)du$$

ler

$$\varphi-\varphi_0=\frac{n(A-C)}{mA}u+\frac{1}{i}\Pi(u,ia_1)-\frac{1}{i}\Pi(u,ia_2+K), \quad (16)$$

dass sich also der Werth von φ in Hinsicht des Gliedes, das is elliptischen Functionen dritter Gattung besteht, nur durch das ittlere Zeichen von dem Werthe von ψ unterscheidet. Ferner ist

(17)

$$-\varphi_0=\left[\frac{n(A-C)}{mA}+\frac{Cn-l\alpha_1}{(1-\alpha_1^2)mA}-\left(\frac{d.\log\Theta ia_1}{da_1}-\frac{d.\log\Theta(ia_2+K)}{da_2}\right)\right]u$$
$$+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}.$$

urch eine ähnliche Rechnung wie im §. III. findet man:

(18)

$$\frac{Cn-l\alpha_1}{(1-\alpha_1^2)mA}=\frac{\cos\mathrm{am}\,ia_1\,\Delta\,\mathrm{am}\,ia_1}{i\sin\mathrm{am}\,ia_1}-\frac{\cos\mathrm{am}(ia_2+K)\,\Delta\,\mathrm{am}(ia_2+K)}{i\sin\mathrm{am}(ia_2+K)}$$
$$=-\frac{d.\log\frac{Hia_1}{\Theta ia_1}}{da_1}+\frac{d.\log\frac{H(ia_2+K)}{\Theta(ia_2+K)}}{da_2},$$

$$\frac{Cn}{mA}=\frac{R_1-R_{-1}}{i\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}}=\frac{\cos\mathrm{am}\,ia_1\,\Delta\,\mathrm{am}\,ia_1}{i\sin\mathrm{am}\,ia_1}(1-\alpha_1)$$
$$-\frac{\cos\mathrm{am}(ia_2+K)\,\Delta\,\mathrm{am}(ia_2+K)}{i\sin\mathrm{am}(ia_2+K)}(1+\alpha_1).$$

ach einigen Verwandlungen ergiebt sich hieraus:

(19)

$$\frac{Cn}{mA}=\frac{2}{\Theta^2 0 H(i(a_1+a_2)+K)\,H(i(a_1-a_2)-K)}\left\{H^2(ia_2+K)\Theta^2 ia_1\frac{d.\log\frac{Hia_1}{\Theta ia_1}}{da_1}\right.$$

$$\left.+\,H^2 ia_1\Theta^2(ia_2+K)\frac{d.\log\frac{H(ia_2+K)}{\Theta(ia_2+K)}}{da_2}\right\}.$$

Es wäre also auch die Grösse Cn durch die elliptischen Functionen ausgedrückt.

Man setze nun diese Ausdrücke in (17) ein, behalte aber, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, die Bezeichnung $\frac{Cn}{mA}$ bei. Alsdann folgt:

$$\left.\begin{aligned}\varphi-\varphi_0=&\left[\frac{n(A-C)}{mA}-\left(\frac{d.\log Hia_1}{da_1}-\frac{d.\log H(ia_2+K)}{da_2}\right)\right]u\\&+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}.\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Bezeichnet man die Grösse in den eckigen Klammern mit $\frac{\Phi}{m}$, so ist

$$\varphi-\varphi_0=\Phi(t-t_0)+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}.\quad(21)$$

Wenn u um $2K$ oder t um $\frac{2K}{m}$ oder um T wächst, so ist φ um ΦT gewachsen. φ besteht also auch aus zwei Gliedern, von denen das eine der Zeit proportional wächst, das andere periodisch ist. Nehmen wir also, wie in der Einleitung gesagt worden ist, an, dass zwei Hauptaxen des Körpers, die der x_1 und y_1, nicht fest sind, sondern eine der Zeit proportionale Umdrehungs-Bewegung haben, so dass sie während der Zeit t den Winkel Φt beschreiben, so können wir statt des Winkels φ den Winkel

$$\varphi'=\varphi-\varphi_0-\Phi(t-t_0)$$

in den Ausdrücken der neun Cosinus, die jetzt die Richtungen der beweglichen Hauptaxen der x_1 und y_1 um die Hauptaxe der z_1 bestimmen, einführen, und erhalten dann mit leichter Mühe:

(22)

$$e^{i\varphi'}=\sqrt{\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)+\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}{2\sqrt{N}},$$

$$\sin\varphi' = -\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)-\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}{2i\sqrt{N}}.$$

Coefficienten a'', b'' bestimmen sich daraus folgendermaassen:

$$a'' = -\sin\vartheta\sin\varphi' = \frac{Hia_1\,H(ia_2+K)}{H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}\,\frac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_2-K)-\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta^2 u},$$

$$b'' = -\sin\vartheta\cos\varphi' = -\frac{iHia_1\,H(ia_2+K)}{H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}\cdot\frac{\Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_2-K)-\Theta(u-ia_1)\Theta(u+ia_2+K)}{\Theta^2 u}. \quad (23)$$

Um die Werthe der vier noch übrigen Cosinus zu finden, bemerke man, dass man nach einigen leichten Umformungen hat:

$$4a = (1-\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'+\psi')}+e^{-i(\varphi'+\psi')})+(1+\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'-\psi')}+e^{-i(\varphi'-\psi')}),$$

$$4ia' = -(1-\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'+\psi')}-e^{-i(\varphi'+\psi')})+(1+\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'-\psi')}-e^{-i(\varphi'-\psi')}),$$

$$4ib = -(1-\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'+\psi')}-e^{-i(\varphi'+\psi')})-(1+\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'-\psi')}-e^{-i(\varphi'-\psi')}),$$

$$4b' = -(1-\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'+\psi')}+e^{-i(\varphi'+\psi')})+(1+\cos\vartheta)(e^{i(\varphi'-\psi')}+e^{-i(\varphi'-\psi')}).$$

Die Werthe der Exponentialgrössen ergeben sich aus (11) und (22). Die obigen Ausdrücke werden dann mit den Abkürzungen der Einleitung wie folgt:

$$4a = (1-\cos\vartheta)\frac{B'^2+A'^2}{A'B'} + (1+\cos\vartheta)\frac{B''^2+A''^2}{A''B''},$$

$$4ia' = -(1-\cos\vartheta)\frac{B'^2-A'^2}{A'B'} + (1+\cos\vartheta)\frac{B''^2-A''^2}{A''B''},$$

$$4ib = (1-\cos\vartheta)\frac{B'^2-A'^2}{A'B'} - (1+\cos\vartheta)\frac{B''^2-A''^2}{A''B''},$$

$$4b' = -(1-\cos\vartheta)\frac{B'^2+A'^2}{A'B'} + (1+\cos\vartheta)\frac{B''^2+A''^2}{A''B''}.$$

Nach frühern Formeln hat man auch:

$$1-\cos\vartheta = 1-\alpha_1+(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\mathrm{am}\,u = (1-\alpha_1)(1-k^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

$$= -\frac{2H^2(ia_2+K)}{H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}\cdot\frac{A'B'}{\Theta^2 u}.$$

$$(1+\cos\vartheta) = (1+\alpha_2)(1-k^2\sin^2\varepsilon_2\sin^2\mathrm{am}\,u)$$

$$= \frac{2H^2 ia_1}{H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K]}\cdot\frac{A''B''}{\Theta^2 u}.$$

Durch Substitution dieser Werthe und indem man

$$H[i(a_1+a_2)+K]\,H[i(a_1-a_2)-K] = D$$

setzt, erhält man als Endresultat die vier Coefficienten:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2D}\left\{H^2 ia_1\frac{\Theta^2(u+ia_2+K)+\Theta^2(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u} - H^2(ia_2+K)\frac{\Theta^2(u+ia_1)+\Theta^2(u-ia_1)}{\Theta^2 u}\right\},\\
a' &= \frac{1}{2iD}\left\{H^2 ia_1\frac{\Theta^2(u+ia_2+K)-\Theta^2(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u} - H^2(ia_2+K)\frac{\Theta^2(u+ia_1)-\Theta^2(u-ia_1)}{\Theta^2 u}\right\},\\
b &= -\frac{1}{2iD}\left\{H^2 ia_1\frac{\Theta^2(u+ia_2+K)-\Theta^2(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u} + H^2(ia_2+K)\frac{\Theta^2(u+ia_1)-\Theta^2(u-ia_1)}{\Theta^2 u}\right\},\\
b' &= \frac{1}{2D}\left\{H^2 ia_1\frac{\Theta^2(u+ia_2+K)+\Theta^2(u-ia_2-K)}{\Theta^2 u} + H^2(ia_2+K)\frac{\Theta^2(u+ia_1)-\Theta^2(u-ia_1)}{\Theta^2 u}\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad (2[illegible])$$

5.

Es bliebe nun noch übrig, die Geschwindigkeiten des Körpers lie x_1- und y_1 Axe, die Poisson mit p und q bezeichnet, zu mmen. Die Geschwindigkeit um die z_1 Axe r ist bekanntlich h die Formel

$$r = Cn$$

ben. Von diesen drei Grössen hängt die Umdrehungsgeschwinеit um die augenblickliche Umdrehungsaxe

$$w = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

die Lage dieser Axe ab.

Die Gleichungen, aus denen diese Grössen zu bestimmen , heissen:

$$\left.\begin{aligned} A\sin\vartheta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) &= Cn\cos\vartheta - l, \\ A(p^2+q^2) &= 2P\gamma\cos\vartheta + h. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

erhalten daraus:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{A\sin\vartheta}\{(Cn\cos\vartheta - l)\sin\varphi \\ &\qquad \pm\cos\varphi\sqrt{(2AP\gamma\cos\vartheta + Ah)\sin^2\vartheta - (Cn\cos\vartheta - l)^2}\}, \\ &\frac{1}{A\sin\vartheta}\{(Cn\cos\vartheta - l)\cos\varphi \\ &\qquad \mp\sin\varphi\sqrt{(2AP\gamma\cos\vartheta + Ah)\sin^2\vartheta - (Cn\cos\vartheta - l)^2}\}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

handelt sich also darum, $\frac{Cn\cos\vartheta - l}{A\sin\vartheta}$ und die Quadratwurzel h die Θ und H auszudrücken.

Aus dem Früheren geht hervor, dass die Wurzelgrösse

$$= \sqrt{2AP\gamma}\sqrt{-(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)}$$

$$= \sqrt{2AP\gamma}(\alpha_1-\alpha_2)\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u$$

Ferner findet man:

$$(\alpha_1-\alpha_2)\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u$$

$$= \frac{2H^2(ia_2+K)H^2ia_1}{D}k'\frac{HuH(K-u)\Theta(K-u)}{\Theta^3u};$$

also folgt mit Berücksichtigung des Werthes von $\sin\vartheta$ aus III.:

$$\frac{\sqrt{\ldots\ldots}}{A\sin\vartheta}=2m\frac{k'}{i}\frac{Hia_1\, H(ia_2+K)Hu\, H(K-u)\,\Theta(K-u)}{\Theta u\sqrt{N}}. \qquad (27)$$

Die Umformungen von Cn und $-l$ sind in II. gegeben worden. Man leitet daraus ab:

$$Cn\cos\vartheta-l=\frac{\sqrt{2AP\gamma}}{2i}\{R_1(1+\cos\vartheta)+R_{-1}(1-\cos\vartheta)\}.$$

Da

$$R_1=(1-\alpha_1)\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}\,\frac{\varDelta\varepsilon_1\cos\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_1},$$

$$R_{-1}=(1+\alpha_1)\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}\,\frac{\varDelta\varepsilon_2\cos\varepsilon_2}{\sin\varepsilon_2},$$

$$\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=\frac{1}{i}\frac{Hia_1}{H(ia_2+K)}\frac{\Theta(u-ia_2-K)\,\Theta(u+ia_2+K)}{\sqrt{N}},$$

$$\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=-\frac{1}{i}\frac{H(ia_2+K)}{Hia_1}\cdot\frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u+ia_1)}{\sqrt{N}}$$

ist, so folgt:

$$\frac{Cn\cos\vartheta-l}{A\sin\vartheta}=\frac{m}{i\sqrt{N}}\Big\{(1-\alpha_1)\frac{\varDelta\varepsilon_1\cos\varepsilon_1}{i\sin\varepsilon_1}\frac{Hia_1}{H(ia_2+K)}A''B''$$
$$-(1+\alpha_1)\frac{\varDelta\varepsilon_2\cos\varepsilon_2}{i\sin\varepsilon_2}\frac{H(ia_2+K)}{Hia_1}A'B'\Big\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\frac{Cn\cos\vartheta-l}{A\sin\vartheta}=\frac{2m}{i\sqrt{N}}\frac{Hia_1H(ia_2+K)}{\Theta^2 0D}\Big\{\Theta^2ia_1\frac{d.\log\dfrac{Hia_1}{\Theta ia_1}}{da_1}A''B''\\ +\Theta^2(ia_2+K)\frac{d.\log\dfrac{H(ia_2+K)}{\Theta(ia_2+K)}}{da_2}A'B'\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke (27) und (28) in die Formeln (26) scheint jedoch kein elegantes Resultat zu liefern, weshalb wir die weitere Rechnung übergehen.

Die Lösung dieses Problems kann vielleicht vermittelst der Störungsrechnung auf die des allgemeineren führen, wenn der Körper ein ganz beliebiger ist. Der Jacobi'sche Fall scheint weniger dazu geeignet zu sein, wenn man die Analogie mit dem

einfachen Raumpendel (wo ein schwerer Punkt an einem unausdehnsamen Faden ohne Schwere oscillirt) erwägt. Gesetzt nämlich, man wollte diese Art von Bewegung durch die Methode der Störungen aus dem Falle, wenn keine Schwere wirkt, ableiten, so würden die Gleichungen der gestörten Elemente in Vergleich mit denen des ungestörten Problems eine complicirte Form annehmen, da ja die elliptischen Functionen erscheinen. Ein ähnlicher Fall ist der unsrige. Die Jacobi'schen Formeln zeichnen sich zwar durch grössere Einfachheit von den oben abgeleiteten aus; da aber der hier behandelte Fall nothwendig in der vollständigen Lösung des Rotationsproblems, wie sie die Berliner Akademie als Preisaufgabe aufgestellt hat, enthalten sein muss, so müssen die Reihen, durch welche die gestörten Elemente des Jacobi'schen Falles ausgedrückt werden, augenscheinlich sehr complicirt werden. Man kann daher eher hoffen, dass dieselben in unserem Falle, wo die Formeln des ungestörten Problems schon complicirter sind, einfacher werden könnten.

XXIV.

De variis modis aequationes quarti gradus solvendi.

Auctore

Dre. *C. F. Lindman,*

Lectore Strengnesiae, oppido Sveciae.

Inter omnes constat, Italos, quum commercio cum Arabibus docti et excitati in Algebram studiosius elaborare coepissent, sub medium fere seculum decimum sextum vias solvendi aequationes tertii quartique gradus invenisse. Postea vero tam multa tamque varia hac de re scripta sunt, ut nullos fere libros de Algebra sis reperturus, ubi eadem via tradatur. Ob eam caussam et quoniam

compluribus hujus Archivi locis agitur de biquadraticis aequationibus aliter atque antea solvendis non prorsus inutile fore arbitratus sum, si initia, a quibus principes scriptores de aequationibus quarti gradus sunt profecti, pro angusta et doctrinae et librorum copia breviter adumbrare conatus essem, sperans fore, ut alter ad rem melius instructus id perficeret, quod ego tantummodo potuissem incipere.

Primum e Lexico Klügeliano (Tom. II. p. 401.) cognoscere licet, rationes vetustiores omnino esse tres, a Ludovico Ferrariensi et Cartesio et Eulero datas, quae omnes ea tantummodo conditione adhiberi possint, ut dignitas tertia quantitatis incognitae vel in aequatione non insit vel sublata sit. Ludovicus Ferrariensis posuit

$$x^4 = bx^2 + cx + d$$

et utrique membro addidit $2x^2y + y^2$, quo facto sinistrum membrum evadit quadratum. Deinde ita determinat y, ut dextrum quoque membrum fiat quadratum, id est, ut fiat

$$4(2y+b)(y^2+d) = c^2,$$

quae aequatio est reducta tertii gradus, cujus radix quaelibet inventa dabit radices aequationis propositae.

Cartesius aequationem biquadraticam

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0$$

ex multiplicatione aequationum

$$x^2 + ax + f = 0, \quad x^2 - ax + g = 0$$

ortam sumsit. Multiplicatione facta et comparatis inter se coëfficientibus earundem dignitatum ipsius x, quum f et g exterminatae sunt, elicitur reducta tertii gradus respectu a^2, qua soluta radices aequationis datae facile inveniuntur.

Initio a methodo Cartesii facto, Dr. Dippe demonstravit*), radices aequationis biquadraticae radicibus omnibus reductae exprimi posse. Positis enim radicibus reductae $= y_1, y_2, y_3$ resp., radices aequationis biquadraticae hanc sibi induunt formam

$$\pm\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3},$$

*) Vide Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von Grunert. Tom. VII. pag. 334. Cfr. Francoeur, Cours complet de Mathématiques pures. Cinq. Edition. Bruxelles 1838. Tom. II. pag. 145.

ubi tamen signa sigillatim determinanda sunt. Ex hac demonstratione sequitur, ut methodus Euleri, qui radices aequationis biquadraticae formae

$$\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}$$

esse constituit, non sit nisi methodus Cartesii inversa *).

Methodis vetustioribus jam brevissime perstrictis, ad rationem C[i] Ampère transeam. Ille quoque aequationem biquadraticam a dignitate tertia quantitatis incognitae liberatam constituit. Quattuor iis aequationibus exscriptis, quae e cognita relatione inter radices et coëfficientes aequationis oriuntur, et reductionibus quibusdam factis, ad reductam pervenit, cujus quantitas incognita sit quadratum summae duarum radicum. Inde patet, hanc methodum, quam Cel[us] Grunert hoc Archivo (Tom. I. p. 16.) exposuit, iisdem esse nixam principiis atque Cartesii.

Deinde Cel[us] Francoeur **) in aequatione

$$x^4+bx^2+cx+d=0$$

posuit $x=y+z$ ***), quo valore substituto y et z ita determinavit, ut evanescant ii aequationis transformatae termini, in quibus insunt impares dignitates alterius quantitatis indeterminatae ex. c. y. Valore ipsius y inde ducto et in aequatione transformata substituto, reducta tertii gradus respectu z^2 invenitur.

Dr. Schlesicke eandem rationem in hoc Archivo (Tom. XII. p. 166.) proposuit. Postea vero ibidem (Tom. XVI. p. 58.) rationem ostendit, cujus beneficio aequationem solvere licet, dignitate tertia quantitatis incognitae non sublata. Praeterea transformatione sua effecit, ut reducta termino secundo liberata prodeat. Mirandum sane non est, si omnia illa commoda cum paucis incommodis juncta sint, quae tamen non impediant, quominus ratio illa methodis antea commemoratis praeferenda videatur †).

---

*) Methodus Cel[i] Bourdon, qui $x=y+z+u$ posuit, est, ut facile patet, eadem atque Euleri, etiamsi haec magis quasi artificialis videtur.

**) l. c. pag. 144.

***) Cel[us] Bourdon docet, Lagrangium quoque ita fecisse, neque tamen aut hanc rem aut artificia sua (judice Bourdonio) multum utilitatis attulisse, quia calculus admodum molestus fiat. Quo libro Lagrangius id fecerit, nescio, sed crediderim in additamentis ad Algebram Eulerianam, qua mihi non jam uti licet.

†) Methodum, quam dedit Waring, silentio praeterii, quippe quae, de sententia saltem ejus, ad aequationem biquadraticam solam non pertineat. Vide Klügel, Mathematisches Wörterbuch T. II. p. 410.

Attamen methodus illa, quam strictim attigi, una non est, in qua utenda terminum secundum tollere evitemus. Abhinc centum fere annis Thomas Simpson dedit ejusmodi methodum, quae tamen adeo non cognita videtur, ut in Lexico Klügeliano ne mentio quidem ejus facta sit, quamobrem paullo fusius eam disserere mihi liceat. Simpson *) aequationem generalem quarti gradus

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

cogitatione finxit esse differentiam duorum quadratorum, ita ut sit

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+\tfrac{1}{2}ax+A)^2-(Bx+C)^2=0, \quad \text{(c)}$$

ubi A, B, C sunt quantitates indeterminatae. Reductione facta et coëfficientibus earundem ipsius x dignitatum inter se comparatis, invenientur aequationes

$$B^2=2A+\tfrac{1}{4}a^2-b, \quad 2BC=aA-c, \quad C^2=A^2-d.$$

Quia quater productum aequationis primae et tertiae aequale est quadrato aequationis secundae, divisione per 2 facta, habebimus

$$A^3-\tfrac{1}{2}bA^2+kA-\tfrac{1}{2}l=0,$$

si posuerimus $k=\frac{1}{4}ac-d$, $l=\frac{1}{4}c^2+d(\frac{1}{4}a^2-b)$. Postquam ex hac aequatione inventa est A, aequationes

$$B=\sqrt{2A+\tfrac{1}{4}a^2-b}, \quad C=\frac{aA-c}{2B}$$

dabunt B et C. Aequatio (c) jam suppeditat

$$x^2+\tfrac{1}{2}ax+A=\pm(Bx+C),$$

unde prodeunt radices

$$x=-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a-B)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}a-B)^2+C-A},$$
$$x=-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a+B)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}a+B)^2-C-A}.$$

---

*) Vide Treatise of Algebra. 2 Edit. London 1755. p. 150. Hoc loco praetermittendum non est, quod dixit Montferrier in libro Dictionnaire des sciences Mathématiques. Deux. Edit. Paris 1845. Tom. I. p. 229. Contendit enim Montferrier, methodum Simpsonii nihil aliud esse, nisi amplificationem quandam methodi Ludovici Ferrariensis, quam ita prorsus exponit, ut ego supra exposui methodum Simpsonianam. Hoc quidem fieri potest; maxime autem expositioni Klügelii repugnat. Mihi quidem aliquanto probabilius videtur, methodum Simpsonii a Cartesiana ortam esse, non solum quod Klügelius de ea re nihil dixit, sed etiam quia aequatio, differentia quadratorum e theoremate $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ tractata, productum fit duarum aequationum secundi gradus.

Quia B et C in radicibus quum positivae tum negativae sunt, facile patet, nihil mutari nisi ordinem radicum, si signum — quantitati B tribuitur. Quamquam A tres habet valores, e quibus quemlibet eligere licet, ratiocinatio tamen commodissima evadit, si valorem realem sumis. Aequatio vero ut tertii gradus unum ejusmodi valorem semper suppeditabit, interdum etiam tres. Methodi suae commoda recensens Simpson contendit valorem ipsius A semper esse rationalem; quibus tamen rebus in eam sententiam adductus sit, ego quidem intelligere non possum, praesertim quum exempla, quae contrarium probent, facillime reperiantur. Quamquam igitur cum Simpsonio hac de re consentire non possum, methodus tamen ejus tot tantaque commoda praebere videtur, ut ab oblivione vindicanda sit, nisi forte studiosior ejus factus sum, quippe qui ea fere semper uti consueverim. Saepe tamen methodis, quas vocant, indirectis facillime radices inveniuntur, praesertim si magnum decimalium numerum habere velimus.

Methodum Lagrangii, quae in theoria functionum symmetricarum nititur, nisi commemorare non possum, quoniam expositio ejus multum spatii requirit.

Cel^us^ Schultén in tabulis suis logarithmicis *) formulas dedit trigonometricas, quibus radices aequationum biquadraticarum inveniri possint, termino secundo non sublato.

Cl. Granlund, Adjunctus Math. ad Academiam Lundensem, dissertatione Academica methodum quoque dedit, in functionibus symmetricis, quas vocat, partialibus nixam. Quia hae functiones non antea usurpatae neque multum cognitae videntur, expositio hujus methodi definitionibus et explicationibus eget, quas hoc loco dare propositum meum non est, praesertim quum ita occasionem rei explicandae **) auctori ipsi praerepturus viderer.

Methodus novissima — quod equidem sciam — a Cel^o^ Björling data est, qui methodum suam hoc Archivo (Tom. XIX. 299.) ipse exposuit. Primum in aequatione generali

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

pro x substituit $y\,\mathrm{tg}\,z$. Deinde coëfficientes a, c, d aequationi $c^2=a^2d$ satisfacere constituit, unde $c=a\sqrt{d}$ vel $c=-a\sqrt{d}$. Pro illo valore facit $y=\sqrt[4]{d}$, pro hoc $y=i\sqrt[4]{d}$ $(i=\sqrt{-1})$, quo facto invenitur

*) Logarithmiska och Trigonometriska Tabeller. Helsingfors 1838. pag. 210.

**) Dass Herr Adjunct Granlund dies im Archive thun möge, wünscht der Herausgeber sehr. G.

$$\operatorname{Sin} 2z = \frac{y}{2y^2 - b} \{a \pm \sqrt{a^2 + 4(2y^2 - b)}\}.$$

Arcu z invento, dabitur x. Sin autem aequatio $c^2 = a^2 d$ inter oëfficientes non exsistit, demonstrat, aequationem quamcumque biquadraticam, posito $x = x_1 + u$, sic transformari posse, ut haec relatio inter coëfficientes transformatae intercedat.

Plures methodos in meis quidem libris commemoratas non inveni, quod tamen non impedit, quominus nonnulla me fugerit. Itaque non audeo dicere, hanc enumerationem tam perfectam esse quam volui.

XXV.

Observata quaedam de Ellipsi.

Auctore

Dre. *C. F. Lindman*,

Lectore Strengn.

(E conspectu actorum Reg. Acad. Scient. Holmiens.)

In libris de calculo integrali, quos cognoscere mihi licuit, demonstratur, quomodo superficies inveniatur figurae, quae Ellipsi, axi majori duabusque axi perpendicularibus ordinatis terminatur. Si idonei valores limitibus integralis dantur, Trapezio detracto, superficies cujuslibet segmenti reperiri potest. Triangulo ad segmentum addendo vel ab eo subtrahendo superficies sectoris invenitur, sive centrum sive focus vertex ejus est. At vero quum de sectoribus agitur, usus coordinatarum polarium maxime simplex et rei conveniens videtur. Quae ratio sectores quadrandi, quorum vertex focus est, multifariam ostenditur nuperque Celus Grunert*)

*) Archiv der Mathematik und Physik. Tom. XVII. p. 313.

unc rem copiose tractavit. Quanta affert commoda usus coordinatarum polarium in sectoribus ellipticis quadrandis, quorum vertex est centrum, ostendere nunc conabor, quum praesertim occasio praebeatur non solum demonstrandi theorematis, sine dubio multo ante cogniti, quod tamen nusquam invenire potui, sed etiam commemorandi res nonnullas, quae ad ejusmodi sectores pertinent.

I.

Si in aequatione Ellipsis vulgari

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

posuerimus $y = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, $x = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, ubi φ est angulus inter positivam axis majoris partem et radium vectorem e centro ductum, habebimus

$$r^2(a^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi + b^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi) = a^2b^2, \qquad (1)$$

quae est aequatio Ellipsis polaris, quando polus in centro collocatur. Valore ipsius r^2 ex (1) in formula usitata

$$S = \tfrac{1}{2}\int r^2 d\varphi$$

substituto, prodit

$$S_\alpha = \frac{a^2b^2}{2}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{a^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi + b^2\,\mathrm{Cos}^2\varphi},$$

ubi α denotat angulum inter positivam axis majoris partem et eum radium, quo sector terminatur. Divisione per $\mathrm{Cos}^2\varphi$ facta et integratione instituta, invenitur

$$S_\alpha = \tfrac{1}{2}ab\{\mathrm{Arctg}\left(\left(\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b}\right)\right) - \mathrm{Arctg}\,((0))\}.$$

Posito $u =$ minimo arcui positivo, cujus tangens est $= \dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b}$, prodit $\mathrm{Arctg}\left(\left(\dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b}\right)\right) = k\pi + u$; itidem est $\mathrm{Arctg}\,((0)) = k'\pi$, ubi numeri integri k, k' ita determinandi sunt, ut problemati satisfiat. Sit $\pi > \alpha > 0$; patet, esse $\pi > u$, $\frac{1}{2}\pi ab > S_\alpha > 0$ vel $\pi > u + (k-k')\pi > 0$, unde $k - k' = 0$ atque ideo

$$S_\alpha = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Arctg}\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b}, \qquad (2)$$

si $\mathrm{Arctg}\dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b}$ idem est atque u. Quando est $\alpha > \pi$, facile apparet esse

$$S_\alpha = \tfrac{1}{2}ab\{\pi + \text{Arctg}\frac{a\,\text{tg}\,\alpha}{b}\}.$$

Sit jam $\beta=$ alii angulo, qui conditioni $\pi > \beta > \alpha$ satisfacit; eode atque antea modo eruitur

$$S_\beta = \tfrac{1}{2}ab\ \text{Arctg}\frac{a\,\text{tg}\,\beta}{b},$$

atque ideo

$$S_\beta - S_\alpha = \tfrac{1}{2}ab\{\text{Arctg}\frac{a\,\text{tg}\,\beta}{b} - \text{Arctg}\frac{a\,\text{tg}\,\alpha}{b}\}, \qquad (3)$$

quae aequatio suppeditat superficiem sectoris, qui duobus rad vectoribus e centro ductis includitur, quando neuter angulorum int positivam axis majoris partem et radios vectores duos rectos super

Jam quaeri potest, quibus valoribus angulorum α, β ille sect quartae Ellipsis parti adaequet. Quod ut inveniatur, in (3) su stituamus $\frac{1}{4}\pi ab$ pro $S_\beta - S_\alpha$, unde oritur aequatio

$$\frac{\pi}{2} = \text{Arctg}\frac{a\,\text{tg}\,\beta}{b} - \text{Arctg}\frac{a\,\text{tg}\,\alpha}{b}.$$

Secundum ea, quae supra dicta sunt de signo Arctg, haec aequat transit in

$$b^2 + a^2\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta = 0, \text{ vel } \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}, \qquad (c)$$

quae est relatio cognita inter angulos, quos binae diametri con jugatae cum eadem axis parte faciunt. Hinc jam colligitur ho theorema: d i a m e t r i c o n j u g a t a e E l l i p s i n i n q u a t t u o r p a r t e s a e q u a l e s d i v i d u n t.

II.

Quamquam probabile non videtur, quaerat fortasse quis, sintne arcus, quos diametri conjugatae abscindunt, inter se aequales necne. In formula igitur cognita

$$s = \int_\alpha^\beta d\varphi \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}}$$

substituantur ex (1) valores ipsius r^2, $\frac{dr^2}{d\varphi^2}$. Tum habebimus

$$s = ab\int_\alpha^\beta d\varphi \sqrt{\frac{a^4\,\text{Sin}^2\varphi + b^4\,\text{Cos}^2\varphi}{(a^2\,\text{Sin}^2\varphi + b^2\,\text{Cos}^2\varphi)^3}},$$

ubi est $\beta > \alpha$ et hi anguli aequatione (c) conjuncti. Ut arcus, quos diametri conjugatae abscindunt, sint aequales pro omnibus angulorum α, β valoribus, qui aequationi (c) satisfaciant, necesse est, sit s constans pro ejusmodi valoribus angulorum α, β. Assumto igitur α variabili independente, $\frac{ds}{d\alpha}$ identice $=0$ post eliminationem ipsius β esse oportet. Jam si ponitur

$$\sqrt{\frac{a^4 \operatorname{Sin}^2\varphi + b^4 \operatorname{Cos}^2\varphi}{(a^2 \operatorname{Sin}^2\varphi + b^2 \operatorname{Cos}^2\varphi)^3}} = f(\varphi),$$

evadit

$$\frac{ds}{d\alpha} = ab\left(f(\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} - f(\alpha)\right),$$

ubi $f(\beta)$ et $\frac{d\beta}{d\alpha}$ in α ope aequationis (c) exprimendae sunt. Ita fit

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{a^2b^2}{a^4 \operatorname{Sin}^2\alpha + b^4 \operatorname{Cos}^2\alpha}, \quad f(\beta) = \frac{a^4 \operatorname{Sin}^2\alpha + b^4 \operatorname{Cos}^2\alpha}{ab\,(a^2 \operatorname{Sin}^2\alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

atque ideo

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{ab\left(ab - \sqrt{a^4 \operatorname{Sin}^2\alpha + b^4 \operatorname{Cos}^2\alpha}\right)}{(a^2 \operatorname{Sin}^2\alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quia $\frac{ds}{d\alpha}$ non est identice $=0$, arcus, de quibus agitur, aequales non sunt, quamobrem exquirendum est, num maximum et minimum admittant. Ejusmodi valores ipsius α invenientur ponendo $\frac{ds}{d\alpha}=0$, unde

$$\operatorname{Cos}\alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Repetita differentiatione elucet, arcum esse maximum pro superiore, minimum pro inferiore ipsius α valore. Hoc casu quoque est

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\beta = \mp \frac{b}{a},$$

unde sequitur, non modo ut diametri conjugatae aequales peripheriam Ellipsis dividant in partes magis inaequales quam aliae quaecunque diametri conjugatae, sed etiam ut ex his arcubus ille sit maximus, qui ab axi minori secatur, ille autem minimus, quem secat axis major.

III.

Quoniam de sectoribus ellipticis agitur, quaeramus quoq quemnam valorem angulus α habere debet, ut sector S_α per o natam puncti arcus extremi et per chordam arcus in duas pa aequales dividatur. Utroque casu dimidium sectoris est trian lum. Prius triangulum est rectangulum, cujus hypotenusa est et angulus ordinatae oppositus $=\alpha$. Superficies ($=T$) igitur h trianguli est $=\frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha$, vel valore ipsius r^2 ex (1) substit

$$T=\frac{a^2b^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha}{2(a^2 \operatorname{Sin}^2\alpha+b^2 \operatorname{Cos}^2\alpha)}.$$

Quia $T=\frac{1}{2}S_\alpha$ erit, invenimus

$$\frac{ab \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha}{a^2 \operatorname{Sin}^2\alpha+b^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}=\tfrac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{a \operatorname{tang}\alpha}{b},$$

quae aequatio, posito $\operatorname{Arctg}\frac{a \operatorname{tg}\alpha}{b}=\psi$, abit in

$$\frac{\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}^2\psi}=\tfrac{1}{2}\psi \text{ vel } \operatorname{Sin}2\psi=\psi.$$

Eadem aequatio apud Eulerum *) occurrit et invenit

$$\psi=54^0\ 18'\ 6'',8786,$$

unde α facillime inveniri potest.

Abscissa puncti, in quo r secat Ellipsin, est

$$=r \operatorname{Cos}\alpha=\frac{ab \operatorname{Cos}\alpha}{\sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2\alpha+b^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}}=a \operatorname{Cos}\psi$$

vel ab axi minore independens, unde colligitur, eam ejusdem e magnitudinis, dummodo axis major sit $=2a$.

Casu posteriore est $T=\frac{1}{2}ar \operatorname{Sin}\alpha$. et quia erit $T=\frac{1}{2}S_\alpha$, s stituto valore ipsius r, habebimus

$$\frac{2a \operatorname{Sin}\alpha}{\sqrt{a^2 \operatorname{Sin}^2\alpha+b^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}}=\operatorname{Arctg}\frac{a \operatorname{tg}\alpha}{b}.$$

Posito $\operatorname{Arctg}\frac{a \operatorname{tg}\alpha}{b}=\omega$, invenitur $2 \operatorname{Sin}\omega=\omega$ vel, $\omega=2\psi$ facto

*) Introductio in Anal. infin. Tom. II. Cap. XXII. Probl. Cfr. quoque Cagnoli, Trigonometrie. Paris 1786. pag. 218.

$$\mathrm{Sin}\, 2\psi = \psi.$$

Haec aequatio eadem est atque antea, et Eulerus ejusmodi *problema* de circulo solvens ad eam pervenit. Abscissa puncti, *in quo r* Ellipsin secat, nunc est $= a \,\mathrm{Cos}\, \omega$ atque ideo ab axi *minore* non pendet.

Quum haec problemata de circulo solvuntur, invenitur $\alpha = \psi$ t $\alpha = 2\psi$ respective. Perpendiculo deinde a puncto extremo unius adiorum, qui sectorem includunt, ad alterum ducto Ellipsique uper hunc radium ut semiaxem majorem descripta, punctum, quo perpendiculum Ellipsin secat, idem plane est, quod in his roblematis quaeritur *).

XXVI.

dnotationes quaedam de variis locis hujus Archivi.

Auctore

D^re^. *C. F. Lindman,*

Lect. Strengn.

Tomo XIX. legitur dissertatio D^i^. Schulze de integralibus llipticis in series evolvendis. Auctor ipse docet, dissertationem uam in Tomo I. relegendam esse. Quod quum facerem, haec erba inveni: „es sei ferner vorgelegt das sich nicht direct in- egriren lassende Differential $\sqrt{x+2\sqrt{x}dx}$ cett.“ Si sententia ejus st, integrale, nisi forma mutata, inveniri non posse, probe dixisse nihi videtur. Ita autem locutus ad usitatum, ut opinor, et vulga- em loquendi modum orationem suam parum conformavit: credi- lerim enim, ea quoque integralia directe esse inventa, quae sim- plici et inventu facili substitutione reperiuntur, quod genus est in- tegrale, de quo agitur. Posito enim $\sqrt{x} = z$, invenitur

---

*) Ich habe mich beeilt, vorstehenden schönen Aufsatz sogleich nach seinem Empfang noch in diesem Hefte abdrucken zu lassen, weil er einen dem von mir in dem Aufsatze Nr. XXI. behandelten Gegenstande ganz nahe verwandten Gegenstand betrifft. M. s. unten unter den Miscellen. G.

$$\int_0^x dx \sqrt{x+2\sqrt{x}} = 2\int_0^{\sqrt{x}} z dz \sqrt{z^2+2z}$$

$$= \frac{2x+\sqrt{x}-3}{6}\sqrt{x+2\sqrt{x}} + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}+1).$$

Eodem modo multa alia eademque multo generaliora integralia inveniuntur. Enimvero integrale

$$J = \int dx \sqrt{ax+b+\sqrt{\alpha x+\beta}}$$

per formulas cognitas exhibere licet, dummodo ejusmodi functio alterius variabilis z substituatur pro $\sqrt{\alpha x+\beta}$, ut quantitas sub signo $\sqrt{\ }$ ad formam Az^2+Bz+C mutetur. Simplicissimum est ponere

$$\sqrt{\alpha x+\beta} = z,$$

quo facto evadit

$$J = 2\alpha^{-\frac{3}{2}} \int z dz \sqrt{az^2+\alpha z+b\alpha-a\beta}.$$

Haec ratio tam simplex tamque facilis est, ut omnino indigna non videatur, cui in libris de elementis Calculi integralis locus detur, nisi forte res ipsa simplicior judicanda est, quam cujus explicatio praeceptis ullis egeat. Praeterea patet, rationem propositam usui esse posse, quum functiones sub signis radicalibus sint secundi gradus. Enimvero postquam alia variabilis introducta est, ita ut radicalis inferior rationalis evadat, obtinetur functio hujus formae

$$\sqrt{Az^4+Bz^3+Cz^2+Dz+E}\,.\,f(z)dz.$$

($f(z)$ est functio quaedam rationalis), cujus integrale per functiones ellipticas exprimi potest. Quoniam vero haec ratio ad calculum longum et molestum ducit, non nihil interesse mihi visum est examinare, num ille calculus umquam evitari possit, et reperi id fieri si in

$$\sqrt{ax^2+bx+c+\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$$

est

$$(ax^2+bx+c)^2-(\alpha x^2+\beta x+\gamma) = \text{quadrato vel} = (mx^2+nx+p)^2$$

ubi determinandae sunt quantitates m, n, p. Coëfficientibus earundem dignitatum ipsius x comparandis habebimus aequationes

$$m^2=a^2,\ mn=ab,\ n^2+2mp=b^2+2ac-\alpha,\ 2np=2bc-\beta,\ p^2=c^2-\gamma$$

Aequatio prima et secunda suppeditat $m=\pm a$, $n=\pm b$ et ultima docet quantitatem $c^2>\gamma$ esse debere. Deinde invenitur

$$p=\pm(c-\frac{\alpha}{2a})$$

et prodeunt aequationes conditionis

$$b\alpha=a\beta,\quad \alpha^2=4a(c\alpha-a\gamma),$$

quibus constantes satisfacere debent. Tum fit

$$\sqrt{ax^2+bx+c+\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}=\sqrt{ax^2+bx+c-\frac{\alpha}{4a}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}.$$

Tomi II pag. 122. seqq. Dr. Rädell, Berolinensis, solutionem edit numericam aequationis

$$A=(1+x)^m(1+bx),$$

quando est $x=$ fractioni admodum parvae et $b<1$. Ratio quidem ejus elegans est et commoda; at postquam dissertationem suam edidit, alia ratio, cujus beneficio aequationes hujusmodi omnes solvi possunt, data est a claro illo viro, cujus ingenio fecundissimo tam multa debet Mathesis. Enimvero abhinc paucis annis Illmus Gauss (Beiträge zur Theorie der algebraisch. Gleichungen. Göttingen 1849. p. 15.) protulit methodum quandam indirectam reperiendi radices omnes omnium aequationum trinomialium, in quarum formam aequationem, de qua nunc agitur, facillime mutare licet. Posito enim $x=y-1$, invenitur

$$A=(1-b)y^m+by^{m+1},$$

in qua praeterea aequatione solvenda ex methodo Illmi Gauss neque $b<1$ neque y paullo tantum unitate majorem ponere opus est.

Tomi XX p. 247. legitur observatum quoddam Professoris Wolfers de inveniendo integrali

$$J=\int\frac{xe^x dx}{(1+x)^2}.$$

Eulerus posuit

$$J=\frac{e^x z}{1+x},$$

ubi est z functio quaedam indeterminata ipsius x. Differentiatione invenitur aequatio differentialis

$$(1+x)dz+xzdx=xdx,$$

„ubi", ut ait Eulerus, „statim patet esse $z=1$, quod nis
se pateret, ex regulis difficulter cognosceretur." Cel^us^ Wo
integrale J directe invenit, functione z non introducta. Ve
autem Euleri sequenti aequationem differentialem nuper al
integrandam arbitror, id quod facillimo usque negotio fieri p
Huic enim aequationi dare possumus formam

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{xdx}{1+x},$$

unde, integratione facta, invenitur

$$\mathrm{l}\frac{k}{1-z}=x-\mathrm{l}(1+x)$$

vel

$$z=1-k(1+x)e^{-x} \quad (k=\mathrm{Const.}).$$

Ita reperimus

$$J=\frac{e^x}{1+x}-k,$$

e quo integrale ab Eulero datum prodit, posito $k=0$.

XXVII.

De aliquot integralibus definitis.

Auctore
Dre. *C. F. Lindman*,
Lect. Strengn.

I.

Tomo XVI. pag. 53. hujus Archivi Professor Dienger,
acus magneticae exquirens, pervenit ad integrale

$$J=\int_{\gamma}^{\pi-\gamma}\frac{d\alpha}{\sqrt{\mathrm{Sin}\,\alpha-\mathrm{Sin}\,\gamma}},$$

a quo tamen ulterius l. c. versari ei non placuit. Hoc integrale mihi contigit ad functionem ellipticam transformare, ita ut sequitur.

Primum patet integrale quaesitum ob formulam notissimam

$$\int_a^c \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_b^c \varphi(x)\,dx$$

in duo disjungi posse, unde fit

$$J = \int_\gamma^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\gamma}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\gamma} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\gamma}}.$$

Substituto $\pi - \alpha$ pro α invenitur

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\gamma} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\gamma}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\gamma}} = \int_\gamma^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\gamma}},$$

atque ideo

$$J = 2\int_\gamma^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\gamma}}.$$

Si posuerimus $\operatorname{Sin}\gamma = a$, $\operatorname{Sin}\alpha = ax$, habebimus

$$d\alpha = \frac{a\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \quad \sqrt{\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\gamma} = \sqrt{a}\sqrt{x-1}.$$

Ad limites $\alpha = \gamma$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ respondent resp. limites $x = 1$, $x = \frac{1}{a}$, quamobrem evadit

$$J = 2\sqrt{a}\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(1-a^2x^2)}}.$$

Postquam integrale ad hanc formam reductum est, liquet, id per functionem ellipticam exprimi posse. Ut hanc functionem invenirem, primum posui

$$\sqrt{x-1} = y, \text{ unde } x = 1 + y^2, \; dx = 2y\,dy.$$

Quoniam est $y = 0$ pro $x = 1$ et $y = \sqrt{\frac{1}{a} - 1}$ pro $x = \frac{1}{a}$, invenitur

$$J = 4\sqrt{a}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a}-1}} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{1-a}{a}-y^2\right)\left(\frac{1+a}{a}+y^2\right)}}.$$

Factore $\sqrt{\frac{1+a}{a}}$ disjuncto positoque $y = z\sqrt{\frac{1-a}{a}}$, eruitur

$$J = \frac{4}{\sqrt{1+a}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\frac{1-a}{1+a}z^2)}}.$$

Jam si introducamus $\operatorname{Sin}\gamma$ pro a, habebimus

$$J = \frac{4}{\sqrt{1+\operatorname{Sin}\gamma}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+\frac{1-\operatorname{Sin}\gamma}{1+\operatorname{Sin}\gamma}z^2)}}$$

vel beneficio formularum

$$1+\operatorname{Sin}\gamma = 2\operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\frac{1-\operatorname{Sin}\gamma}{1+\operatorname{Sin}\gamma} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$J = \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+z^2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right))}}.$$

Posito denique $z = \operatorname{Cos}\varphi$, habebimus

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -d\varphi,\quad 1+z^2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right) = 1+\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \frac{1-\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{Sin}^2\varphi}{\operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Quoniam est $\varphi = 0$, si $z = 1$, et $\varphi = \frac{\pi}{2}$, si $z = 0$, limitibus conversis, prodit

$$J = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{Sin}^2\varphi}}.$$

II.

Tomo IV. pag. 316. seqq. Cel[us] Schlömilch eleganter, ut solet, monstravit, quanto ad integralia definita cognoscenda sit usui, in alia arctiorum limitum dividere. Inter exempla, quibus meodum suam illustravit, est quoque integrale

$$\int_0^\infty \mathrm{l}\left(\frac{1+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}\right)^2 \frac{dy}{y},$$

iod beneficio methodi suae reperit esse aequale integrali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} \mathrm{l}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right)^2. \tag{1}$$

itegrale (1) postea Tom. VII. pag. 101. inter „Uebungsaufgaben" l inveniendum proposuit. Quoniam mihi exciderat, integrale (1) om. IV. jam tractatum fuisse, proprio Marte id reperire conatus am. Rationem meam hic proferre liceat, quia paullo simplicior itione Cel[i] Schlömilch videtur.

Integrali (1) per J designato positaque $\operatorname{tg}\varphi = x$, invenitur

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2.$$

ope formulae notissimae

$$\int_a^c \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_b^c \varphi(x)dx,$$

n qua nititur methodus Cel[i] Schlömilch, evadit

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{x(1+x^2)} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2.$$

Substituendo $\frac{1}{x}$ pro x fit

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2.$$

Jam ambo ipsius J termini eosdem habent limites, quamobrem in unum contrahi possunt. Exsistente praeterea

$$\frac{1}{x(1+x^2)}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{x},$$

invenimus

$$J=\int_0^1 \frac{dx}{x} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 2\int_0^1 \frac{dx}{x} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Functio $\mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ in seriem convergentem evolvi potest, dummodo sit $1>x>-1$. Quia igitur limes superior integralis quaesiti est $=1$, caute tractandum est integrale. Itaque ponamus

$$J=\lim_{(\varepsilon=0)} 2\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Jam est

$$\mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\text{etc.}\right\}$$

atque ideo

$$2\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x} \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=4\left\{\frac{1-\varepsilon}{1}+\frac{(1-\varepsilon)^3}{3^2}+\frac{(1-\varepsilon)^5}{5^2}+\text{etc.}\right\},$$

unde denique invenitur

$$J=4\left\{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}\right\}.$$

Eulerus vero demonstravit (**Introd. in Anal. infin. Tom. I.** §. 175.), summam terminorum inter uncos esse $=\frac{\pi^2}{8}$. Itaque est

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} \mathrm{l}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}.$$

XXVIII.

Integration der Gleichung

$$(1)\qquad x_1dx + x_2dx_1 + x_3dx_2 + xdx_3 = 0.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Privatdocenten der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Ich führe, den von Pfaff vorgezeichneten Weg befolgend, in die vorgelegte Gleichung für x_1, x_2 und x_3 Functionen ein von x und dreien neuen Variablen a_1, a_2, a_3 mittelst Substitutionen, die sich ergeben als Auflösung nachfolgender Differentialgleichungen:

$$(00)+(01)\frac{\partial x_1}{\partial x}+(02)\frac{\partial x_2}{\partial x}+(03)\frac{\partial x_3}{\partial x}=NX,$$

$$(10)+(11)\frac{\partial x_1}{\partial x}+(12)\frac{\partial x_2}{\partial x}+(13)\frac{\partial x_3}{\partial x}=NX_1,$$

$$(20)+(21)\frac{\partial x_1}{\partial x}+(22)\frac{\partial x_2}{\partial x}+(23)\frac{\partial x_3}{\partial x}=NX_2,$$

$$(30)+(31)\frac{\partial x_1}{\partial x}+(32)\frac{\partial x_2}{\partial x}+(33)\frac{\partial x_3}{\partial x}=NX_3,$$

in denen N eine Hülfsgrösse,

$$X,\quad X_1,\quad X_2,\quad X_3$$

respective die Grössen

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x$$

bezeichnen, und

$$(rs)=\frac{\partial X_r}{\partial x_s}-\frac{\partial X_s}{\partial x_r}$$

ist; Bezeichnungsweisen, welche von Jacobi eingeführt sind, wie man im zweiten Bande von Crelle's Journal ersehen kann.

Der Zweck dieser zu machenden Substitutionen ist, die Gleichung (1) auf die Form

$$A_1 da_1 + A_2 da_2 + A_3 da_3 = 0 \tag{2}$$

zu bringen, unter A_1, A_2, A_3 Functionen von a_1, a_2, a_3 verstanden.

In dem speciellen, uns vorliegenden Beispiele hat man:

$$(01) = \frac{\partial X}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x} = 1,$$

$$(02) = \frac{\partial X}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x} = 0,$$

$$(03) = \frac{\partial X}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x} = -1,$$

$$(12) = \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 1,$$

$$(13) = \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0,$$

$$(23) = \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = 1,$$

und folglich sind unsere vier Gleichungen, aus denen

$$N, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

bestimmt werden sollen, folgende:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial x} - \dfrac{\partial x_3}{\partial x} = N x_1, \\ -1 + \dfrac{\partial x_2}{\partial x} = N x_2, \\ -\dfrac{\partial x_1}{\partial x} + \dfrac{\partial x_3}{\partial x} = N x_3, \\ 1 - \dfrac{\partial x_2}{\partial x} = N x. \end{cases}$$

Durch Addition der ersten und dritten ergibt sich:

$$N(x_1 + x_3) = 0;$$

und durch Addition der zweiten und vierten:

$$N(x + x_2) = 0.$$

Beiden genügt man also für

$$N = 0. \tag{4}$$

Setzt man diesen Werth von N in die Gleichungen (3), so erhält man bloss zwei von einander verschiedene Gleichungen, nämlich

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} - \frac{\partial x_3}{\partial x} = 0,$$

$$-1 + \frac{\partial x_2}{\partial x} = 0,$$

woraus sich

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_3 = a_1, \\ x_2 - x \ = a_2 \end{array}\right. \tag{5}$$

ergibt, die nun nicht hinreichen zur Bestimmung von x_1, x_2 und x_3.

Wir sehen also, dass uns hier der von Pfaff gelehrte Weg nicht ganz zum gewünschten Ziele führt, aus dem Grunde nämlich, weil aus den vier Gleichungen (3) nicht die vier Grössen

$$N, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

bestimmt werden können.

Ich verfahre nun, um die Gleichung (1) zu integriren, folgendermaassen: Ich substituire in derselben einstweilen bloss statt x_1 und x_2 die aus (5) folgenden Werthe, nämlich:

$$x_1 = a_1 + x_3,$$
$$x_2 = a_2 + x,$$

a_1 und a_2 als neue Variable betrachtet, und erhalte dadurch

$$(a_1 + 2x_3)dx + (a_2 + 2x)dx_3 + (a_2 + x)da_1 + x_3da_2 = 0. \tag{6}$$

Jetzt ist noch für x_3 eine solche Function von x, a_1, a_2, a_3 zu substituiren, auf dass diese Gleichung die Form

$$A_1da_1 + A_2da_2 + A_3da_3 = 0 \tag{2}$$

annimmt und folglich identisch auf $0 = 0$ führt, wenn man a_1, a_2, a_3 als Constanten ansieht.

Unter dieser Voraussetzung also, nämlich, dass man a_1, a_2, a_3 als Constanten ansieht, soll für ein schicklich gewähltes x_3 als Function von x die Gleichung (6) identisch auf $0 = 0$ führen; die Gleichung (6) ist aber unter Voraussetzung constanter a_1 und a_2:

$$(a_1+2x_3)\,dx+(a_2+2x)\,dx_3=0,$$

und diess gibt:

$$a_1x+a_2x_3+2xx_3=a_3,$$

woraus

$$x_3=\frac{a_3-a_1x}{a_2+2x}$$

folgt. Führt man diesen Werth von x_3 in (6) ein, a_1, a_2 und a_3 als Variable ansehend, so hat man nach gehöriger Reduction:

$$(7) \qquad a_2da_1+da_3=0.$$

Wenn man daher in

$$(1) \qquad x_1dx+x_2dx_1+x_3dx_2+xdx_3=0$$

die Substitutionen

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1=a_1+\dfrac{a_3-a_1x}{a_2+2x}, \\ x_2=a_2+x, \\ x_3=\dfrac{a_3-a_1x}{a_2+2x} \end{cases}$$

macht, so geht dieselbe über in

$$(7) \qquad a_2da_1+da_3=0.$$

Da nun ferner aus (8):

$$a_1=x_1-x_3,\quad a_2=x_2-x,\quad a_3=xx_1+x_2x_3$$

folgt, so kann man die Gleichung (7) und folglich auch die Gleichung (1) so schreiben:

$$(x_2-x)\,d(x_1-x_3)+d(xx_1+x_2x_3)=0,$$

woraus man sieht, dass der vorgelegten Gleichung genügt wird für

$$x_1-x_3=C_1,\quad xx_1+x_2x_3=C_2,$$

unter C_1 und C_2 willkührliche Constanten verstanden.

Ganz auf dieselbe Weise lässt sich auch die Gleichung

$$x_1dx+x_2dx_1+x_3dx_2+\dots+x_{2n-2}dx_{2n-3}+x_{2n-1}dx_{2n-2}+xdx_{2n-1}=0$$

behandeln.

XXIX.

Note über die Summenformel

$$\left\{\begin{aligned}&\Sigma x^m = C + \frac{x^{m+1}}{(m+1)h}\\ &-\tfrac{1}{2}x^m + B_1\frac{mh}{1}x^{m-1} - B_3\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{1.2.3.4}x^{m-3} + \ldots\end{aligned}\right.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

vatdoc. der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

In der Gleichung (1) stellt C eine willkührliche Constante vor, ler eine solche periodische Function von x, welche die Eigenhaft besitzt, ungeändert zu bleiben, wenn x um h wächst; ferr sind B_1, B_3,.... die bekannten Bernoulli'schen Zahlen.

Ich habe gefunden, dass sich die Gleichung (1) auch so schreien lasse:

$$2)\quad\left\{\begin{aligned}\Sigma x^m = C &+ \frac{1}{(m+1)h}(x-\frac{h}{2})^{m+1} + \frac{mhA_1}{2^2}(x-\frac{h}{2})^{m-1}\\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)h^3A_3}{2^4}(x-\frac{h}{2})^{m-3}\\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5A_5}{2^6}(x-\frac{h}{2})^{m-5} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

wo C dieselbe Bedeutung hat, wie in der Gleichung (1), und wo A_1, A_3, A_5,.... Zahlen sind, deren Werth sich aus der Auflösung folgender Gleichungen ergibt:

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{A_1}{1!}+\frac{1}{3!}=0, \\ \frac{A_3}{1!}+\frac{A_1}{3!}+\frac{1}{5!}=0, \\ \frac{A_5}{1!}+\frac{A_3}{3!}+\frac{A_1}{5!}+\frac{1}{7!}=0, \\ \frac{A_7}{1!}+\frac{A_5}{3!}+\frac{A_3}{5!}+\frac{A_1}{7!}+\frac{1}{9!}=0, \end{cases}$$

Der Beweis ist sehr einfach. Nimmt man nämlich von beiden Seiten der Gleichung (2) die endlichen Differenzen, so hat man

$$x^m=\frac{1}{(m+1)h}\Delta.(x-\frac{h}{2})^{m+1}+\frac{mhA_1}{2^2}\Delta.(x-\frac{h}{2})^{m-1}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)h^3A_3}{2^4}\Delta.(x-\frac{h}{2})^{m-3}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5A_5}{2^6}\Delta.(x-\frac{h}{2})^{m-5}+\dots$$

oder

$$x^m=\frac{1}{(m+1)h}[(x+\frac{h}{2})^{m+1}-(x-\frac{h}{2})^{m+1}]+\frac{mhA_1}{2^2}[(x+\frac{h}{2})^{m-1}-(x-\frac{h}{2})^{m-1}]$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)h^3A_3}{2^4}[(x+\frac{h}{2})^{m-3}-(x-\frac{h}{2})^{m-3}]$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5A_5}{2^6}[(x+\frac{h}{2})^{m-5}-(x-\frac{h}{2})^{m-5}]+\dots$$

Entwickelt man die in der eckigen Klammer stehenden Ausdrücke, so hat man:

$$x^m=\frac{2}{(m+1)h}\left[\binom{m+1}{1}x^m\frac{h}{2}+\binom{m+1}{3}x^{m-2}\frac{h^3}{2^3}+\binom{m+1}{5}x^{m-4}\frac{h^5}{2^5}+\dots\right]$$
$$+\frac{mhA_1}{2}\left[\binom{m-1}{1}x^{m-2}\frac{h}{2}+\binom{m-1}{3}x^{m-4}\frac{h^3}{2^3}+\binom{m-1}{5}x^{m-6}\frac{h^5}{2^5}+\dots\right]$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)h^3A_3}{2^3}\left[\binom{m-3}{1}x^{m-4}\frac{h}{2}+\binom{m-3}{3}x^{m-6}\frac{h^3}{2^3}\right.$$
$$\left.+\binom{m-3}{5}x^{m-8}\frac{h^5}{2^5}+\dots\right]$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5A_5}{2^5}\left[\binom{m-5}{1}x^{m-6}\frac{h}{2}\right.$$
$$\left.+\binom{m-5}{3}x^{m-8}\frac{h^3}{2^3}+\binom{m-5}{5}x^{m-10}\frac{h^5}{2^5}+\dots\right]+\dots$$

$$x^m = C + \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m + B_1\frac{mh}{1}x^{m-1} - B_3\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{1.2.3.4}x^{m-3} + \dots$$

nd da diese Gleichung nur identisch statt finden soll, so muss rstens

$$(4) \qquad x^m = \frac{2}{(m+1)h}(m+1)x^m\frac{h}{2}$$

ein, ferner muss der Coefficient einer jeden Potenz von x für ich verschwinden. Die Gleichung (4) findet wirklich statt; was ferer den mit x^{m-2r} multiplicirten Coefficienten betrifft, so ist derselbe:

$$\frac{2}{(m+1)h}\binom{m+1}{2r+1}\frac{h^{2r+1}}{2^{2r+1}} + \frac{mhA_1}{2}\binom{m-1}{2r-1}\frac{h^{2r-1}}{2^{2r-1}}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)h^3A_3}{2^3}\binom{m-3}{2r-3}\frac{h^{2r-3}}{2^{2r-3}}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5A_5}{2^5}\binom{m-5}{2r-5}\frac{h^{2r-5}}{2^{2r-5}} + \dots$$

der anders geschrieben:

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-2r+1)\frac{h^{2r}}{2^{2r}}\left[\frac{1}{(2r+1)!} + \frac{A_1}{(2r-1)!} + \frac{A_3}{(2r-3)!} + \frac{A_5}{(2r-5)!} + \dots\right],$$

nd ist, in Folge der Gleichungen (3), gleich Null.

Die in dieser Rechnung auftretenden Zahlen A_1, A_3, A_5, ... rscheinen in der Analysis auch noch bei andern Gelegenheiten. o ist z. B.

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} - A_1x + A_3x^3 - A_5x^5 + A_7x^7 - \dots$$

Denn schreibt man diese Gleichung in folgender Form:

$$\frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots} = \frac{1}{x} - A_1x + A_3x^3 - A_5x^5 + A_7x^7 - \dots,$$

o hat man, wenn man beiderseits mit dem Nenner des ersten heils der Gleichung multiplicirt:

$$1 = 1 - \left.\begin{matrix}A_1 \\ -\frac{1}{3!}\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}+A_3 \\ \frac{A_1}{3!} \\ +\frac{1}{5!}\end{matrix}\right\} x^4 \left.\begin{matrix}-A_5 \\ -\frac{A_3}{3!} \\ -\frac{A_1}{5!} \\ -\frac{1}{7!}\end{matrix}\right\} x^6 + \left.\begin{matrix}+A_7 \\ +\frac{A_5}{3!} \\ \frac{A_3}{5!} \\ +\frac{A_1}{7!} \\ +\frac{1}{9!}\end{matrix}\right\} x^8 - \dots$$

was identisch ist, weil die Coefficienten von x^2, x^4, x^6, x^8,.... vermöge der Gleichungen (3) sämmtlich Null sind.

Aus dieser Analyse folgen auch die merkwürdigen Gleichungen:

$$\Sigma x^{2r} = C + (x - \frac{h}{2})\varphi(x^2 - hx + \frac{h^2}{4}),$$

$$\Sigma x^{2r+1} = C + \psi(x^2 - hx + \frac{h^2}{4}).$$

XXX.

Ueber die kleinste Sehne, die sich durch einen in der Ebene einer ebenen Curve gegebenen Punkt in derselben ziehen lässt.

Von

Herrn Dr. *G. Emsmann,*

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Frankfurt a. d. O.

Durch eine geometrische Untersuchung, die ich vor einiger Zeit anstellte, veranlasst, legte ich mir folgende Aufgaben vor:

I. Durch einen in der Ebene einer ebenen Curve gegebenen Punkt die kleinste Sehne in derselben zu ziehen.

II. Durch einen in der Ebene einer ebenen Curve gegebenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, dass der gebildete Abschnitt ein Minimum wird.

III. Durch einen gegebenen Punkt die kleinste Sehne in einer Oberfläche zu ziehen.

IV. **Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene so zu legen, dass der durch dieselbe gebildete Abschnitt einer Oberfläche ein Minimum wird.**

Die zweite dieser Aufgaben erfordert die Bestimmung von $\int f(x)\partial x$, die vierte die von $\iint f(x,y)\partial x\partial y$.

Ich gebe hier die Auflösung der ersten dieser Aufgaben.

§. 1.

Durch einen in der Ebene einer ebenen Curve gegebenen Punkt die kleinste Sehne in derselben zu ziehen.

Der Punkt sei

$$(x', y'),$$

die Curve

$$y = f(x).$$

Auflösung. Gleichung einer geraden Linie ist $\eta = \alpha\xi + \mu$, natürlich alle Coordinaten auf dasselbe Coordinatensystem bezogen.

Damit die gerade Linie durch den Punkt (x', y') gehe, muss sich $y' = \alpha x' + \mu$ stattfinden, folglich ist

$$(1) \qquad \eta - y' = \alpha(\xi - x')$$

Gleichung der durch den Punkt (x', y') gehenden geraden Linie.

Sehne einer Curve ist das Stück einer dieselbe schneidenden Geraden, das zwischen zwei Durchschnittspunkten liegt. Es muss also unsere gerade Linie, damit sie in der gegebenen Curve eine Sehne bilde, zwei Punkte mit dieser gemein haben, für welche Durchschnittspunkte die beiden Gleichungen

$$y - y' = \alpha(x - x') \text{ und } y = f(x) \quad ,$$

coexistiren müssen. Aus der ersten derselben ergiebt sich $y = y' + \alpha(x - x')$, folglich

$$(2) \qquad f(x) = y' + \alpha(x - x'),$$

woraus sich, wenn die Curve vom zweiten Grade ist, die Coordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zweier Durchschnittspunkte als Functionen von α bestimmen lassen.

Bezeichnen wir die Länge der Sehne mit u, so ist

$$(3) \qquad u = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

so dass also $u = F(\alpha)$ sein wird.

Durch Differentiation von u nach α, welches bekanntlich die trigonometrische Tangente des Winkels bedeutet, den die Gerade mit der Abscissenaxe bildet, wird man das Minimum der Sehne u bestimmen können.

§. 2.

Die gegebene Curve sei ein **Kreis** $x^2+y^2=r^2$.

Auflösung. Wir haben also aus den beiden Gleichungen

$$y=y'+\alpha(x-x') \text{ und } x^2+y^2=r^2$$

die Coordinaten der Durchschnittspunkte zu bestimmen.

$$y^2=y'^2+2\alpha(x-x')y'+\alpha^2(x-x')^2=r^2-x^2,$$

$$(1+\alpha^2)x^2-2\alpha(\alpha x'-y')x+(\alpha x'-y')^2-r^2=0,$$

$$(4)\qquad x^2-2\frac{\alpha(\alpha x'-y')}{1+\alpha^2}x+\frac{(\alpha x'-y')^2-r^2}{1+\alpha^2}=0,$$

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha(\alpha x'-y')\pm\sqrt{r^2(1+\alpha^2)-(\alpha x'-y')^2}], \\ \text{folglich} \\ y=-(\alpha x'-y')+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}[\alpha(\alpha x'-y')\pm\sqrt{r^2(1+\alpha^2)-(\alpha x'-y')^2}]. \end{array}\right.$$

Die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte unserer durch den Punkt (x', y') gezogenen Geraden mit dem Kreise sind also

für den einen:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha(\alpha x'-y')+\sqrt{r^2(1+\alpha^2)-(\alpha x'-y')^2}], \\ y_1=-(\alpha x'-y')+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}[\alpha(\alpha x'-y')+\sqrt{r^2(1+\alpha^2)-(\alpha x'-y')^2}]; \end{array}\right.$$

für den anderen:

$$\left\{\begin{array}{l} x_2=\frac{1}{1+\alpha^2}[\alpha(\alpha x'-y')-\sqrt{r^2(1+\alpha^2)-(\alpha x'-y')^2}], \\ y_2=-(\alpha x'-y')+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}[\alpha(\alpha x'-y')-\sqrt{r^2(1+\alpha^2)-(\alpha x'-y')^2}]. \end{array}\right.$$

Demnach haben wir nach Gleichung (3):

$$(6)\qquad u^2=\frac{4}{1+\alpha^2}[r^2(1+\alpha^2)-(\alpha x'-y')^2]=4\left(r^2-\frac{(\alpha x'-y')^2}{1+\alpha^2}\right)$$

und

$$(7)\qquad u=2\sqrt{r^2-\frac{(\alpha x'-y')^2}{1+\alpha^2}},$$

indem wir das doppelte Vorzeichen weglassen können, da es uns hier nur auf die Länge, nicht aber auf die Richtung der Sehne ankommt.

Damit die Sehne u überhaupt möglich und nicht etwa imaginär werde, muss

$$(8)\qquad r^2 \geqq \frac{(\alpha x'-y')^2}{1+\alpha^2}$$

sein.

§. 3.

Wir haben nun zu differentiiren. Aus Gleichung (6) ergiebt sich

$$2u\partial u=-\frac{8(\alpha x'-y')(\alpha y'+x')}{(1+\alpha^2)^2}\partial\alpha,$$

folglich

$$(9)\qquad \frac{\partial u}{\partial\alpha}=-\frac{2(\alpha x'-y')(\alpha y'+x')}{(1+\alpha^2)^2\sqrt{r^2-\frac{(\alpha x'-y')^2}{1+\alpha^2}}}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = -\frac{2}{(1+\alpha^2)^4 \left[r^2 - \frac{(\alpha x' - y')^2}{1+\alpha^2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\times \{(1+\alpha^2)^2 [r^2 - \frac{(\alpha x' - y')^2}{1+\alpha^2}] [(\alpha x' - y') y' + (\alpha y' + x') x'] - 4\alpha (1+\alpha^2) [r^2 - \frac{(\alpha x' - y')^2}{1+\alpha^2}] (\alpha x' - y')(\alpha y' + x') + (\alpha x' - y')^2 (\alpha y' + x')^2\},$$

(10) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = -2 \cdot \frac{(1+\alpha^2)(r^2 - \frac{(\alpha x' - y')^2}{1+\alpha^2})[(1-3\alpha^2)(x'^2 - y'^2) + 2\alpha(3-\alpha^2) x' y'] + (\alpha x' - y')^2 (\alpha y' + x')^2}{(1+\alpha^2)^4 (r^2 - \frac{(\alpha x' - y')^2}{1+\alpha^2})^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir haben nun den Werth von α zu suchen, für welchen $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$ wird. Dies kann geschehen, wenn

a) der Zähler in dem Werthe für $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ Null wird,

also $(\alpha x' - y')(\alpha y' + x') = 0$, folglich entweder $\alpha x' - y' = 0$, mithin

(11) $$\alpha = \frac{y'}{x'}$$

oder $\alpha y' + x' = 0$, mithin

(12) $$\alpha = -\frac{x'}{y'}.$$

Für $\alpha = \frac{y'}{x'}$ wird der Nenner von $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ zu: $\pm r(1 + \frac{y'^2}{x'^2})^2$, was offenbar nicht Null werden kann, so dass also für $\alpha = \frac{y'}{x'}$ ganz sicherlich $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$ wird.

Für $\alpha = -\frac{x'}{y'}$ wird der Nenner von $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ zu:

$$\left(1+\frac{x'^2}{y'^2}\right)^2 \sqrt{r^2 - \frac{(-x'^2-y'^2)^2}{x'^2+y'^2}} = \left(1+\frac{x'^2}{y'^2}\right)^2 \sqrt{r^2-(x'^2+y'^2)};$$

es ist dies ein Ausdruck, der nur Null werden kann, wenn $r^2 = x'^2 + y'^2$, d. h. wenn der gegebene Punkt auf der Peripherie liegt. Es wird also auch für $\alpha = -\frac{x'}{y'}$ entschieden $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$, so lange der gegebene Punkt nicht auf der Peripherie des Kreises liegt.

Liegt aber der gegebene Punkt auf der Peripherie, so wird, wenn $\alpha = -\frac{x'}{y'}$ ist, dann $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{0}{0}$. Um den wahren Werth dieses Ausdruckes zu finden, differentiiren wir sowohl die Function im Zähler, als auch die im Nenner jede für sich nach α, und erhalten:

$$(13) \qquad -\frac{2[(\alpha x'-y')y' + (\alpha y'+x')x']}{4\alpha(1+\alpha^2)\sqrt{r^2-\frac{(\alpha x'-y')^2}{1+\alpha^2}} - \frac{(\alpha x'-y')(\alpha y'+x')}{\sqrt{r^2-\frac{(\alpha x'-y')^2}{1+\alpha^2}}}},$$

einen Ausdruck, der für $\alpha = -\frac{x'}{y'}$ zu

$$-\frac{2(x'^2+y'^2)}{4\frac{x'}{y'}\left(1+\frac{x'^2}{y'^2}\right)\sqrt{r^2-(x'^2+y'^2)} + \frac{0}{\sqrt{r^2-(x'^2+y'^2)}}}$$

und, endlich noch $x'^2 + y'^2 = r^2$ eingesetzt, zu

$$-\frac{2r^2}{0+\frac{0}{0}} = -\frac{0}{0},$$

also wieder unbestimmt wird.

Wir müssen daher Zähler und Nenner des Ausdrucks in (13) ebenfalls einzeln nach α differentiiren, und erhalten dadurch im Zähler $4x'y'$, also einen von α unabhängigen Ausdruck; der Nenner wird ein Ausdruck, der, für $\alpha = -\frac{x'}{y'}$ und dann $x'^2 + y'^2 = r^2$ gesetzt, wieder Glieder von der Form $\frac{0}{0}$ enthält, so dass wir also

noch einmal Zähler und Nenner differentiiren müssen und dann im Zähler 0 erhalten.

Es ist demnach auch für $\alpha=-\frac{x'}{y'}$ und dann $x'^2+y'^2=r^2$ gesetzt der wahre Werth von $\frac{\partial u}{\partial \alpha}=0$, so dass also auch für $\alpha=-\frac{x'}{y'}$ bei jeder Lage des Punktes (x', y') unser $\frac{\partial u}{\partial \alpha}=0$ wird.

§. 4.

1) $\alpha=\frac{y'}{x'}$. Setzen wir $\alpha=\operatorname{tg}\varphi$, wo also φ der Winkel ist, den die Sehne u mit der XAxe nach der positiven Richtung zu bildet, so haben wir demnach $\alpha=\operatorname{tg}\varphi=\frac{y'}{x'}$, d. h. die Sehne u geht durch den Coordinatenanfang, also durch den Mittelpunkt des Kreises, wird also Durchmesser, und wirklich wird hier

$$u=2\sqrt{r^2-\frac{0}{1+\frac{y'^2}{x'^2}}}=2\sqrt{r^2}=2r.$$

Setzen wir $\alpha=\frac{y'}{x'}$ in den unter (10) dargestellten Werth von $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ ein, so erhalten wir:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}&=-\frac{2(x'^2+2y'^2+\frac{y'^4}{x'^2})}{r(1+\frac{y'^2}{x'^2})^3}=-\frac{2x'^4(x'^4+2x'^2y'^2+y'^4)}{r(x'^2+y'^2)^3}\\&=-\frac{2x'^4(x'^2+y'^2)^2}{r(x'^2+y'^2)^3}=-\frac{2x'^4}{r(x'^2+y'^2)},\end{aligned}\right.$$

einen Ausdruck, der, da r als Halbmesser nicht negativ sein kann, alle anderen Grössen aber positiv sein müssen, wegen des Vorzeichens unbedingt negativ ist.

Folglich ist $u=2r$, welchen Werth u für $\alpha=\frac{y'}{x'}$ annimmt, ein Maximum, und wir erhalten den bekannten Kreissatz: Der Durchmesser ist die grösste Sehne, die sich durch irgend einen Punkt in der Ebene des Kreises ziehen lässt.

2) $\alpha = -\frac{x'}{y'}$. Setzen wir diesen Werth von $\alpha = \operatorname{tg}\varphi'$, so haben wir

$$\operatorname{tg}\varphi' = -\frac{x'}{y'} = -\frac{1}{\frac{y'}{x'}} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = -\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg}(90^0 + \varphi),$$

also

$$\varphi' = 90^0 + \varphi + 2n.90^0 = (2n+1).90^0 + \varphi,$$

wovon der kleinste Werth $90^0 + \varphi$ ist. Die durch den Punkt (x', y') gehende Gerade, welche mit der positiven Richtung der XAxe den Winkel $\varphi' = 90^0 + \varphi$ bildet, erhält man leicht, wenn man auf dem durch den Punkt (x', y') gezogenen Durchmesser in diesem Punkte eine Normale errichtet. Diese Normale ist die verlangte Gerade. Mit dieser Geraden fallen alle die anderen, welche einen um $2n.90^0$ grösseren Winkel mit der positiven Richtung der XAxe bilden, zusammen.

Dasselbe Resultat lässt sich auch aus der unmittelbaren Betrachtung von $\operatorname{tg}\varphi' = -\frac{x'}{y'}$ herleiten.

Diese Sehne selbst wird

$$u = 2\sqrt{r^2 - (x'^2 + y'^2)}. \tag{15}$$

Für $\alpha = -\frac{x'}{y'}$ wird aber

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} &= -\frac{2(-2x'^2 - y'^2 - \frac{x'^4}{y'^2})}{(1+\frac{x'^2}{y'^2})^3\sqrt{r^2-(x'^2+y'^2)}} = \frac{2y'^4(x'^4 + 2x'^2y'^2 + y'^4)}{(x'^2+y'^2)^3\sqrt{r^2-(x'^2+y'^2)}} \\ &= \frac{2y'^4(x'^2+y'^2)^2}{(x'^2+y'^2)^3\sqrt{r^2-(x'^2+y'^2)}} = \frac{2y'^4}{(x'^2+y'^2)\sqrt{r^2-(x'^2+y'^2)}},\end{aligned}\right. \tag{16}$$

ein Ausdruck, welcher, da $\sqrt{r^2 - (x'^2 + y'^2)}$ nach (15) in diesem Falle die halbe Sehne darstellt und als solche, so lange sie überhaupt reell ist, nicht negativ sein kann, offenbar **positiv** ist.

Mithin ist $u = 2\sqrt{r^2 - (x'^2 + y'^2)}$, welche[n W]erth u für $\alpha = -\frac{x'}{y'}$ annimmt, ein **Minimum**, und wir kommen so auf den bekannten Kreissatz: **Unter allen Sehnen, di[e] sich durch einen in der Ebene eines Kreises gege[b]enen Punkt in dem Kreise ziehen lassen, ist dieje[n]ige, welche auf dem**

durch den Punkt gezogenen Durchmesser senkrecht steht, die kleinste.

§. 5.

Wir wollen jetzt einige besondere Lagen des gegebenen Punktes (x', y') in Betrachtung ziehen.

Nach (8) wird u imaginär, wenn $r^2 < \frac{(\alpha x' - y')^2}{1+\alpha^2}$.

Was das Maximum der Sehne betrifft, so ist sein Werth $2r$ von der Lage des Punktes (x', y') unabhängig; es wird mithin stets eine grösste Sehne geben, der Punkt mag innerhalb oder ausserhalb des Kreises oder auf seiner Peripherie liegen. Es ergiebt sich dies auch aus dem obigen Ausdruck für r^2, denn da hier $\alpha = \frac{y'}{x'}$ ist, so müsste, wenn diese Sehne imaginär werden sollte, $r^2 < 0$ sein, was unmöglich.

Für das Minimum der Sehne, welches eintritt, wenn $\alpha = -\frac{x'}{y'}$ ist, haben wir $u = 2\sqrt{r^2 - (x'^2 + y'^2)}$ oben gefunden.

Wenn $r^2 < x'^2 + y'^2$, d. h. wenn der gegebene Punkt ausserhalb des Kreises liegt, wird die kleinste Sehne imaginär, d. h. es kann da von einer kleinsten Sehne gar nicht die Rede sein.

Ist $r^2 = x'^2 + y'^2$, d. h. liegt der gegebene Punkt auf der Peripherie, so wird $u = 0$, der Richtung nach aber fällt diese kleinste Sehne in die im gegebenen Punkte an den Kreis gezogene Tangente, nur dass ihre beiden Durchschnittspunkte mit dem Kreise in einen, in den Berührungspunkt, zusammenfallen.

Liegt endlich der gegebene Punkt innerhalb des Kreises, so gilt eben der am Schlusse des §. 4. angeführte Lehrsatz in seiner vollen Wahrheit. Fällt hier der gegebene Punkt mit dem Mittelpunkte zusammen, ist also $x' = 0$ und $y' = 0$, so wird

$$\alpha = -\frac{x'}{y'} = -\frac{0}{0} \text{ und } u = 2r,$$

d. h. die Lage der kleinsten Sehne ist in diesem Falle unbestimmt oder m. a. W. jede durch den Mittelpunkt gezogene Sehne ist kleinste für denselben, und zwar von der Grösse

des **Durchmessers.** Es kann also eigentlich hier von einer **kleinsten** Sehne nicht die Rede sein, da sie alle gleich gross sind und eben so gut **grösste** genannt werden können, und in der That ergiebt die Rechnung für diesen Fall $u = 2r$ auch als **Maximum** der Sehne.

Der gegebene Punkt (x', y') liege auf der XAxe, also $x' = x'$ und $y' = 0$, dann ist

$$\alpha = -\frac{x'}{y'} = -\frac{x'}{0} = -\infty,$$

so lange x' positiv, aber $\alpha = +\infty$, so lange x' negativ, d. h. $\varphi' = 270^0$ oder 90^0, und

$$u = 2\sqrt{r^2 - x'^2} = 2\sqrt{(r+x')(r-x')}. \tag{17}$$

Die Coordinatenaxen können aber, ohne die Gleichung des Kreises zu ändern, jede beliebige Lage haben, wenn sie nur ihren Anfangspunkt im Mittelpunkte behalten und rechtwinkelig bleiben; daher können wir, weil wir jedesmal den durch den gegebenen Punkt gezogenen Durchmesser zur XAxe nehmen können, aus Gleichung (17) den bekannten Kreissatz herleiten: **Die halbe kleinste Sehne, die sich durch einen gegebenen Punkt im Kreise ziehen lässt, ist die mittlere Proportionale aus der Summe und aus der Differenz des Halbmessers und der Entfernung des gegebenen Punktes vom Mittelpunkte.**

§. 6.

$\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ kann aber auch Null werden, wenn

b) der **Nenner** in dem Werthe für $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ unendlich wird,

also $(1+\alpha^2)^2 \sqrt{r^2 - \frac{(\alpha x' - y')^2}{1+\alpha^2}} = \infty$. Dieser Ausdruck kann aber für jedes beliebige x' und y' nur ∞ werden, wenn $\alpha = \infty$, also $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ ist, d. h. wenn die Sehne einen Winkel von 90^0 mit der XAxe bildet, und wir wissen schon, dass dann die Sehne $u = 2\sqrt{r^2 - x'^2}$ ein Minimum ist.

Für $\alpha = \infty$ wird nach Gleichung (9) wirklich

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\frac{2.\infty.\infty}{\infty^4\sqrt{r^2 - x'^2}} = -\frac{1}{\infty^2} = -0 \text{ u. nach Gl. (10) } \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = +\frac{1}{\infty} = +0.$$

§. 7.

Endlich ist noch $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \infty$ zu untersuchen.

Dieser Fall könnte eintreten, wenn entweder der Zähler oder der Nenner 0 wird.

Der Zähler kann aber nur ∞ werden für jedes belieb (x', y'), wenn $\alpha = \infty$ wird, wofür in §. 6. die weitere Untersuch schon angestellt ist, welche ergeben hat, dass dann $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ nicht sondern 0 wird.

Der Nenner kann 0 werden, entweder wenn $(1+\alpha^2)^2 =$ also $\alpha = \pm\sqrt{-1}$, d. h. $\operatorname{tg}\varphi$ imaginär würde, was nicht mögli oder wenn $r^2 - \frac{(\alpha x' - y')^2}{1+\alpha^2} = 0$, also $\alpha = \frac{1}{x'^2 - r^2}(x'y' \pm r\sqrt{x'^2 + y'^2 -}$ Dieser Werth von α ist nur dann reell, wenn $x'^2 + y'^2 \geqq r^2$. $x'^2 + y'^2 = r^2$, also $x'^2 - r^2 = -y'^2$, dann ist $\alpha = \frac{x'y'}{x'^2 - r^2} = -\frac{x'y'}{y'^2} = -$ was unser schon gefundenes Minimum giebt, aber nur für Fall, dass der gegebene Punkt auf der Peripherie liegt.

Ist $x'^2 + y'^2 > r^2$, d. h. liegt der gegebene Punkt ausserh des Kreises, so wird die Sehne $u = 0$ nach Gleichung (7). ihre Richtung zu bestimmen, wollen wir die *X*Axe durch den gebenen Punkt legen, so dass $\alpha = \pm \frac{r\sqrt{x'^2 - r^2}}{x'^2 - r^2} = \pm \frac{r}{\sqrt{x'^2 -}}$ wird. Bezeichnen wir die beiden durch den gegebenen Punkt den Kreis gezogenen Tangenten zwischen dem gegebenen Pun und ihren Berührungspunkten mit t, so ist $\sqrt{x'^2 - r^2} = t$, $\alpha = \pm\frac{r}{t} = \operatorname{tg}\varphi$. Der Winkel φ hat demnach zwei Werthe; set wir den einen φ, so ist der andere $180^0 - \varphi$, und die beid vom gegebenen Punkte an den Kreis gezogenen T genten sind es, welche die kleinste durch den Pu gehende Sehne $u = 0$ mit dem Kreise bilden.

§. 8.

Für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird

$$u^2=\frac{4a^2b^2}{(a^2\alpha^2+b^2)^2}(1+\alpha^2)[a^2\alpha^2+b^2-(\alpha x'-y')^2],$$

$$u=\frac{2ab}{a^2\alpha^2+b^2}\sqrt{(1+\alpha^2)[a^2\alpha^2+b^2-(\alpha x'-y')^2]},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}=-\frac{2ab}{(a^2\alpha^2+b^2)^2}$$

$$\times\frac{(a^2\alpha^2+b^2)[\alpha(a^2-b^2)+(\alpha x'-y')(x'+2\alpha^2x'-\alpha y')]-2a^2\alpha(1+\alpha^2)(\alpha x'-y')^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)[a^2\alpha^2+b^2-(\alpha x'-y')^2]}}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke für $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ den Zähler gleich Null, so erhält man eine Gleichung vom vierten Grade für α.

XXXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Lector Lindman in Strengnås in Schweden.

1. Si tres circuli extra se mutuo tangentes dati sunt, tangentes rectae per puncta contactus ductae in unum idemque punctum conveniunt, quod est centrum circuli inscripti ejus trianguli, cujus lateribus centra trium circulorum conjuncta sunt.

2. Demonstrare formulam integralem

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}\,dx}{1+e^{\alpha x}}=\frac{1}{2\alpha}\left\{Z'\left(\frac{\beta}{2\alpha}+1\right)-Z'\left(\frac{\beta}{2\alpha}+\tfrac{1}{2}\right)\right\}\quad\left(\frac{\beta}{\alpha}>-1\right)$$

($Z'(a)$ ex notatione Cⁱ Legendre $=\frac{d\,l\,\Gamma(a)}{da}$).

3. Invenire integrale aequationis differentialis

$$y^2D_x{}^3y=D_xy^3.$$

4. Sit $\beta=$ angulo inter axem et generatricem quamcunque coni recti; invenire arcum sectoris circularis (radius $=$ generatrici), cujus superficies sit $=$ superficiei coni convexae.

5. Demonstrare formulas integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \mathrm{l}(\sqrt{2}-1) \right\},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cot\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \mathrm{l}(\sqrt{2}+1) \right\}.$$

6. Cylindrus aut Conus rectus datus dato plano secatur; partis abscissae volumen invenire.

Von dem Herausgeber.

Das Quadrat der Grösse

$$xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''$$
$$= x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'')$$

auf die Form

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)$$
$$+2(xx'+yy'+zz')(xx''+yy''+zz'')(x'x''+y'y''+z'z'')$$
$$-(x^2+y^2+z^2)(x'x''+y'y''+z'z'')^2$$
$$-(x'^2+y'^2+z'^2)(xx''+yy''+zz'')^2$$
$$-(x''^2+y''^2+z''^2)(xx'+yy'+zz')^2$$

zu bringen.

Satz von Herrn Oskar Werner, Lehrer der Mathematik zu Dresden.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \alpha_m$, mWurzeln der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots. = 0,$$

so werden die übrigen $n-m$Wurzeln durch die Gleichung

$$x^{n-m} + \left\{ A - \overset{1}{\underset{w}{C}}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots. \alpha_m) \right\} x^{n-m-1} + \left\{ B - \overset{1}{\underset{w}{C}}(\alpha_1, \ldots. \alpha_m).A \right.$$
$$\left. + \overset{2}{\underset{w}{C}}(\alpha_1, \ldots. \alpha_m) \right\} x^{n-m-2} + \left\{ C - \overset{1}{\underset{w}{C}}(\alpha_1, \ldots. \alpha_m).B + \overset{2}{\underset{w}{C}}(\alpha_1, \ldots \alpha_m).A \right.$$
$$\left. + \overset{3}{\underset{w}{C}}(\alpha_1, \ldots. \alpha_m) \right\} x^{n-m-3} + \ldots. = 0$$

gefunden, in welcher $\overset{k}{\underset{w}{C}}(\alpha_1, \ldots \alpha_m)$ die Summe der Combinationen kter Klasse mit Wiederholungen aus den Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, jede Combination als Product aufgefasst, bedeutet.

Von Herrn Professor Dr. **Hessel** zu Marburg.

Es ist gegeben der Durchmesser einer Kugel, in deren Oberfläche die acht Eckpunkte eines von sechs vierseitigen ebenen Flächen begrenzten Körpers liegen. Man soll diesen Körper bestimmen, z. B. durch zwei zu einander senkrechte oder graphische Projectionen ihn darstellen, wenn er die weiteren Eigenschaften haben soll, die in den folgenden einzelnen Aufgaben näher angegeben sind:

1) Seine sechs Flächen sollen einander congruent sein. Diejenigen zwei Seiten einer Grenzfläche, die in einer Ecke zusammenlaufen, welche von drei nicht gleichen Winkeln eingeschlossen ist, sollen sich verhalten wie 1 zu 2.

2) Der Körper soll drei Arten von Flächen haben und zwar von jeder Art zwei, welche einander congruent sind, er soll vier Arten von Ecken besitzen, von jeder Art zwei solche, die einander congruent sind, zwei seiner Flächen sollen einander parallel sein, aber die Kantenlinien, welche nicht in diesen beiden Grenzflächen liegen, sollen keinen Parallelismus darbieten.

Unter diesen vier Kanten soll eine sich vorfinden, an welcher zwei Grenzflächen unter einem rechten Neigungswinkel sich schneiden. Alle übrigen Flächenwinkel sollen schiefe sein.

An einem Ende der rechten Kante ist der eine anliegende Grenzwinkel als ein spitziger Winkel gegeben, z. B. $=60^0$. Unter den Grenzwinkeln (welche Peripheriewinkel der Grenzflächen sind) sollen vier rechte Winkel vorkommen, alle übrigen Grenzwinkel aber schief sein. Die Länge der rechten Kante ist gegeben, z. B. $=\frac{2}{3}$ des Durchmessers der Kugel.

Theoremata et Problemata.

Auctore Dre. C. F. **Lindman**, Lect. Strengn.

1. Diagonalibus Parallelogrammi dati ductis, prodeunt quattuor triangula, quorum omnium latera sunt duo latera Parallelogrammi

et altera diagonalis. Conjungendis primum punctis, ubi altitudines horum triangulorum conveniunt, invenitur parallelogrammum dato aequalo. Deinde centris gravitatis triangulorum conjungendis prodit parallelogrammum dato simile et cujus latus est tertia pars lateris homologi parallelogrammi dati. Si denique latera parallelogrammi dati in duos partes aequales dividuntur et rectae iis perpendiculares ducuntur per haec puncta, prodit parallelogrammum dato simile, quod est ad datum $=\mathrm{Cot}^2\alpha:1$, ubi est $\alpha=$ angulo parallelogrammi dati.

2. Quaerantur termini progressionis arithmeticae, numero et summa terminorum atque summa cuborum cognitis. (Quomodo eligendae sunt quantitates incognitae, ut aequatio finalis tertii gradus evitetur?)

3. Si terminus primus progressionis arithmeticae est $=a$, differentia $=d$ et numerus terminorum $=n$ et a', d', n easdem quantitates alterius progressionis designant, summa (s) productorum, quae terminis ejusdem ordinis inter se multiplicandis oriuntur, est

$$s=naa'+\frac{n(n-1)}{2}(ad'+a'd)+\frac{n(n-1)(2n-1)}{2.3}dd'.$$

Sin autem inter se multiplicantur termini progressionis arithmeticae prioris et termini ejusdem ordinis progressionis geometricae, cujus primus terminus est b' et ratio q, summa productorum n terminorum est

$$s'=\frac{b'}{q-1}\left\{a(q^n-1)+dnq^n-\frac{dq(q^n-1)}{q-1}\right\}$$

4. Demonstrare formulam

$$\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{\mathrm{l}x}=\mathrm{l}(\sqrt{2}+1).$$

5. Invenire quadratum minimum, quod sic construi possit, ut tres ex verticibus angulorum ejus in lateribus trianguli aequilateri dati sita sint.

6. Determinare x, y, z ex aequationibus

$$x+y+z=a,\quad x^2+y^2=z^2,\quad x^3+y^3+z^3=b^3.$$

7. Si est $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=3\,\mathrm{tg}\,\alpha$, semper sunt $\mathrm{Sin}\,2(\alpha+\beta)$, $\mathrm{Sin}\,2\beta$, $\mathrm{Sin}\,2\alpha$ in progressione arithmetica vel

$$\mathrm{Sin}\,2(\alpha+\beta)+\mathrm{Sin}\,2\alpha=2\,\mathrm{Sin}\,2\beta.$$

8. Quamquam superficiem trianguli sphaerici ratione a **Cagnoli** (Trigon. pag. 281. Paris 1786.) tradita facillime atque commodissime cognoscere licet, inventio tamen hujus superficiei ope calculi integralis proponatur.

9. Invenire radices aequationis

$$\mathrm{Cos}(\alpha+\tfrac{1}{2}\psi)=\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\psi.$$

10. Demonstrare formulam

$$\left(\overset{p=n}{\underset{p=0}{S}}\mathrm{Sin}\,px\right)^2+\left(\overset{p=n}{\underset{p=0}{S}}\mathrm{Cos}\,px\right)^2=\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(n+1)x}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}x}\right)^2.$$

11. A puncto dato lineam rectam normalem ad Parabolam Appollonianam datam ducere.

12. Enodare proprietates curvae, quae ad coordinatas orthogonales relàta continetur aequatione

$$(x^2+y^2)(y+b)^2=c^2y^2.$$

XXXII.

Miscellen.

Schreiben des Hrn. Director **Strehlke** in **Danzig** an den **Herausgeber**.

Die Seite 473 im vierten Hefte XXII. Bandes Ihres Archivs erwähnte Ungewissheit in der Berechnung der Zahl π hat Professor **Richter** in Elbing schon vor mehreren Monaten gehoben. Nach zwei verschiedenen Methoden hat er dasselbe Resultat erhalten, das mit dem Seite 473 des Archivs angegebenen, mit Ausnahme der 331sten, 332sten und 333sten Decimalstelle übereinstimmt. Diese drei Stellen sind nicht 098, sondern 962. Ich möchte aber fast bei der gefälligen Bekanntmachung in Ihrem Archive vorschlagen, die ganze Zahl π mit dieser Verbesserung noch einmal voll-

ständig abdrucken zu lassen, damit man doch mit Bestimmtheit sagen könne, an dieser bestimmten Stelle steht die richtige Zahl bis zur angegebenen Grenze.

Danzig, den 29. August 1854.

Indem ich dem von Herrn Director Strehlke ausgesprochenen Wunsche gern entspreche, lasse ich die Zahl π mit der angegebenen Verbesserung hier unten noch einmal abdrucken. G.

$\pi = 3,$ 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280
34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095
50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211
05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461
28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603
48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066
06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925
90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094

Schreiben des Hrn. Director Strehlke in Danzig an den Herausgeber.

Sie werden wohl schon bemerkt haben, dass die Seite 474 des vierten Heftes XXII. Bandes Ihres Archivs von Herrn Professor Dr. Wolfers mitgetheilte Formel für die Oberfläche des Rotations-Sphäroids auch in Klügel's mathematischem Wörterbuche Thl. 4. Seite 394 steht*).

Um diesen Zeilen etwas Positives beizufügen, lege ich eine Aufgabe bei, die Bessel im Jahre 1819 einigen seiner Schüler gab.

Aufgabe.

Es seien die positiven Grössen a und b gegeben; man setze

$$a' = \tfrac{1}{2}(a+b),$$
$$b' = \sqrt{a'b},$$
$$a'' = \tfrac{1}{2}(a'+b'),$$
$$b'' = \sqrt{a''b'},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

*) Dessenungeachtet schien es mir aber immer gut, diese Formel, die Herr Professor Wolfers unzweifelhaft für sich selbst gefunden hat, wieder in Erinnerung zu bringen. G.

was wird aus $a^{(n)}$ und $b^{(n)}$?

Auflösung.

Es sei

$$a=b.\cos\varphi,$$

so ist

$$a' = b.\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2,$$
$$b' = b.\cos\tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$a'' = b.\cos\tfrac{1}{2}\varphi.\cos\tfrac{1}{4}\varphi^2,$$
$$b'' = b.\cos\tfrac{1}{2}\varphi.\cos\tfrac{1}{4}\varphi,$$

. . . .

$$a^{(n)}=\frac{b\sin\varphi}{2^n.\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)}=\frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{2^n.\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)},$$

$$b^{(n)}=\frac{b\sin\varphi}{2^n.\sin\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)}=\frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{2^n.\sin\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)},$$

$$a^{(\infty)}=b^{(\infty)}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\varphi}.$$

Für $a=0$, $b=1$ ist $\pi=\frac{2}{a^{(\infty)}}$.

Wenn $a>b$, so wird durch Einführung des Imaginären

$$a^{(\infty)}=b^{(\infty)}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{\log b-\log(a-\sqrt{a^2-b^2})}.$$

Für $a=5$, $b=4$ ist $\log 2=\frac{3}{a^{(\infty)}}$.

Für $a=5$, $b=3$ ist $\log 3=\frac{4}{a^{(\infty)}}$.

Danzig, den 6. September 1854.

Von dem Herausgeber.

Ich habe den Aufsatz Nr. XXVI., sogleich nachdem ich ihn empfangen, noch in diesem Hefte abdrucken lassen, weil er einen

dem von mir in dem Aufsatze Nr. XXI. behandelten Gegenstande ganz nahe verwandten Gegenstand betrifft. Natürlich war es mir interessant, zu untersuchen, ob das von Herrn Lindman gefundene Resultat mit dem von mir erhaltenen Ergebnisse übereinstimmt oder vielmehr aus demselben sich ableiten lässt, indem die von mir gefundene Formel allgemeiner ist. Dass diese Uebereinstimmung wirklich Statt findet, will ich hier nachträglich noch ganz in der Kürze zeigen. Ich habe für die Ellipse in Bezug auf jede zwei conjugirte Durchmessser, die den Winkel α einschliessen, auf Seite 392. die folgende Formel erhalten:

$$\mathrm{Sect}\,\varphi = ab\sin\alpha\,\mathrm{Arctang}\frac{v}{b} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Sect}\,\varphi = ab\sin\alpha\,\mathrm{Arctang}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Herr Lindman findet nur in Bezug auf die beiden Axen der Ellipse auf Seite 441. die Formel

$$S_\alpha = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Arctang}\frac{a\,\mathrm{tang}\,\alpha}{b},$$

d. h. in meinen Zeichen:

$$\mathrm{Sect}\,\varphi = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{Arctang}\frac{a\,\mathrm{tang}\,\varphi}{b}.$$

Aus meiner vorhergehenden Formel, in welcher für das System der beiden Axen der Ellipse $\alpha = 90^0$ zu setzen ist, ergiebt sich für dieses System:

$$\mathrm{Sect}\,\varphi = ab\,\mathrm{Arctang}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

und soll also diese meine Formel mit der vorhergehenden Formel des Herrn Lectors Lindman übereinstimmen, so muss

$$\mathrm{Arctang}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arctang}\frac{a\,\mathrm{tang}\,\varphi}{b}$$

oder

$$2\,\mathrm{Arctang}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \mathrm{Arctang}\frac{a\,\mathrm{tang}\,\varphi}{b}$$

sein. Um nun zu untersuchen, ob diese Gleichung richtig ist, bemerken wir zuvörderst, dass für die Axen $y = x\,\mathrm{tang}\,\varphi$, also wegen der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x\,\mathrm{tang}\,\varphi}{b}\right)^2 = 1$$

ist, woraus leicht $x = \dfrac{ab\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2}}$ folgt. Also ist

$$\frac{a-x}{a+x}=\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}-b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}+b\cos\varphi},$$

und die zu verificirende Gleichung ist folglich:

$$2\,\text{Arctang}\left\{\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}-b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}+b\cos\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}=\text{Arctang}\frac{a\,\text{tang}\,\varphi}{b}$$

oder

$$\text{tang}\,2\,\text{Arctang}\left\{\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}-b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}+b\cos\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{a\,\text{tang}\,\varphi}{b}.$$

Nun ist aber nach einer bekannten goniometrischen Elementarformel:

$$\text{tang}\,2\,\text{Arctang}\left\{\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}-b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}+b\cos\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\left\{\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}-b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}+b\cos\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}-b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}+b\cos\varphi}},$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\text{tang}\,2\,\text{Arctang}\left\{\frac{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}-b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}+b\cos\varphi}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}-b\cos\varphi\}^{\frac{1}{2}}\{\sqrt{a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2}+b\cos\varphi\}^{\frac{1}{2}}}{b\cos\varphi}$$

$$=\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}=\frac{a\,\text{tang}\,\varphi}{b},$$

welches die zu verificirende Gleichung war, so dass also zwischen den von uns beiden gefundenen Resultaten in der That völlige Uebereinstimmung Statt findet, nur dass die von mir gefundene Formel weit allgemeiner und des Herrn Lectors Lindman Formel unter derselben als ein besonderer Fall enthalten ist.

Der Satz, dass jede zwei conjugirte Durchmesser die Fläche der Ellipse in vier gleiche Theile eintheilen, kommt in unseren beiderseitigen Abhandlungen S. 395. und S. 442. vor, und ist von Herrn Lindman, indem er auf die bekannte, zwischen den Winkeln, welche die conjugirten Diameter mit demselben Theile einer der beiden Axen einschliessen, Statt findende Relation zurückgeht, auf sehr schöne Weise bewiesen. Ich freue mich sehr, bei dieser Untersuchung mit Herrn Lector Lindman, der mich zu meiner grössten Freude schon längst mit seiner mir überaus werthen Freundschaft beehrt hat, so ganz zu-

fällig zusammengetroffen zu sein, wobei ich nochmals wiede dass ich zu der von mir angestellten Untersuchung lediglich die von mir im Eingange zu meiner Abhandlung angeführte aus Leibnizens Briefen veranlasst worden bin. Herrn L man's Abhandlung enthält noch viele andere schöne Beme gen über die Ellipse, und erlaube ich mir hier, die Leser besonders zu ersuchen, diese schöne Abhandlung ja nicht achtet zu lassen.

Druckfehler.

Theil XIX.

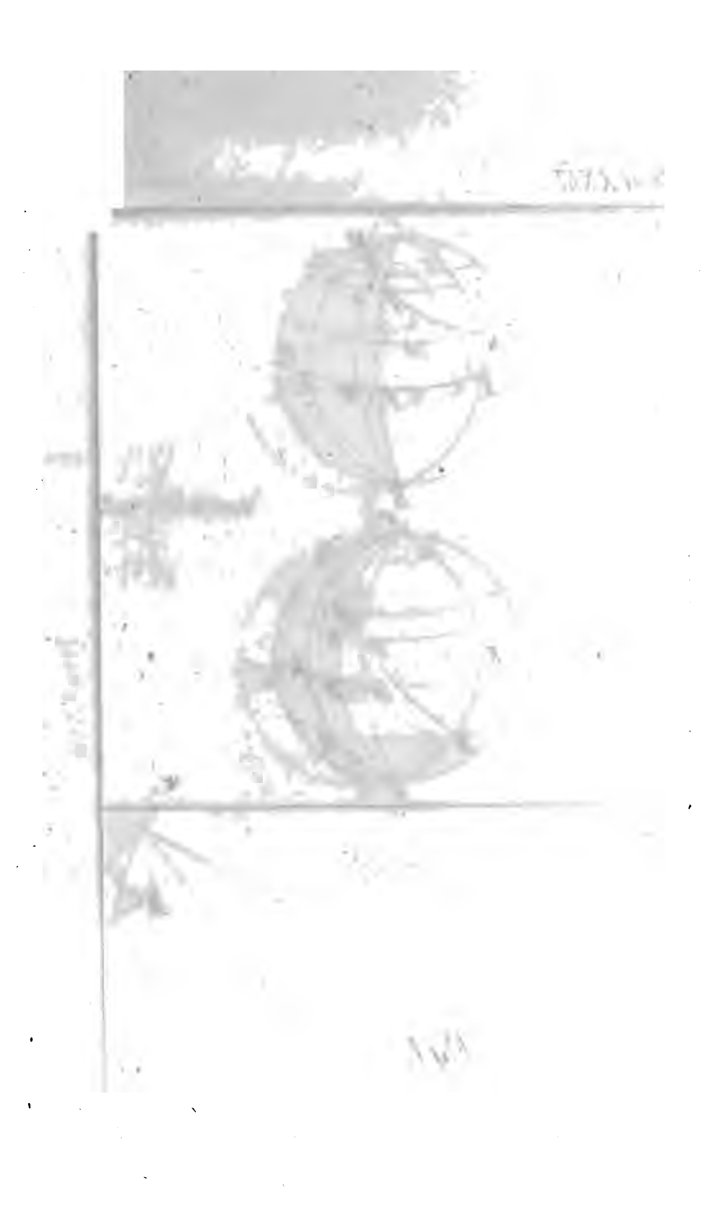
Seite 297. Z. 6. statt Westerås setze man Westerås.
„ 301. „ 9. fehlt (18).
„ 304. „ 8. zwischen „pas“ und „l'un“ setze man das W
„ 305. „ 7. statt $\sqrt{2744}$ setze man $\sqrt[3]{2744}$.

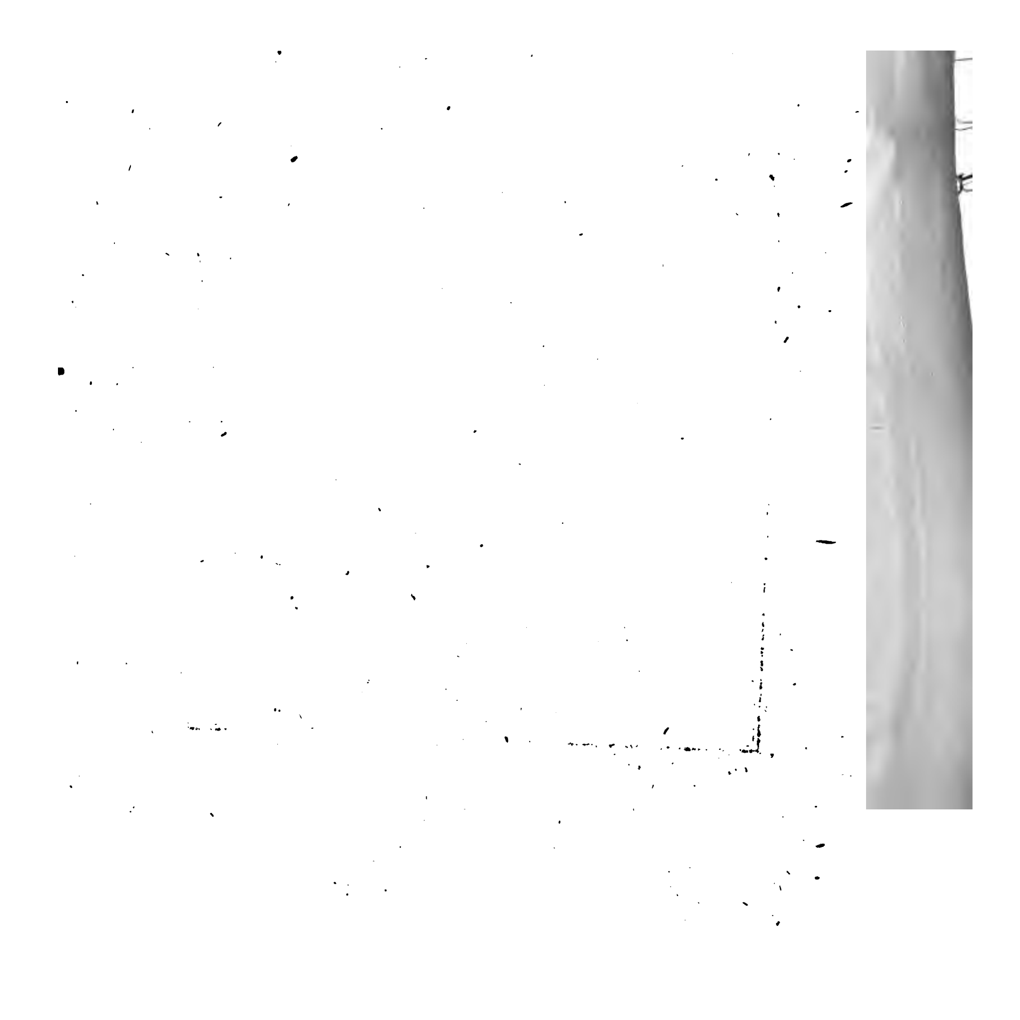
Theil XXI.

Seite 1. Z. 7. v. u. statt reclue s. m. réelle.
„ 2. „ 8. v. o. „ d'appendre „ „ d'apprendre.
„ 2. „ 23. v. o. „ (l(ϱ) „ „ l(ϱ).
„ 2. „ 4. v. u. „ valeur „ „ valeurs.
„ 3. „ 6. v. o. „ $e^{x\,l(x)}$ „ „ $e^{y\,l(x)}$.
„ 10. „ 2. v. o. „ $e^{\mu\,l(\alpha+\beta i)}$ „ „ $e^{\mu\,l(\alpha+\beta i)}$.
„ 10. „ 3. v. u. (in der Note) „ $\vartheta'=\pi-\text{Arctg}\frac{B}{A}$ „ „ $\vartheta'=\pi+\text{Arct}$
„ 19. „ 11. v. o. „ $\sqrt[3]{d^4-\frac{8}{3}d^2ce}$ „ „ $\sqrt[4]{d^4-\frac{8}{3}d}$
„ 21. „ 2. v. o. statt $a_m{}^2$ s. m. a^2_m. S. 21. Z. 3. v. o. statt $a_m{}^3$ s.
„ 21. „ 6. v. o. statt $\sqrt[m]{}$ s. m. $\sqrt[m+1]{}$.
„ 23. Z. 2. v. o. statt $a_{m-1}{}^2$ s. m. a^2_{m-1}. S. 23. Z. 4. v. o. statt $a_m{}^2$ s.
„ 24. Z. 6. v. o. statt $a_m{}^2$ s. m. a^2_m.
„ 26. „ 6. v. u. fehlt ein) nach $\frac{r+a\cos y}{a+r\cos y}$.
„ 27. „ 3. v. o. statt $\int_0^{2\pi}$ setze man $\int_0^{2m\pi}$.
„ 29. „ 4. v. u. (ohne die Note) „ $\int_\pi^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos x}$ setze man $\int_\pi^{2\pi}\frac{dx}{a+r\cos}$
wozu noch kommt, dass man die erstere der zwei Noten Seite 30. hier herüberführen und mit **) versehen muss.
„ 30. Z. 7. v. o. Das *) fällt weg; die Note (die erstere u gehört der vorigen Seite 29. zu.
„ 33. Z. 5. v. o. statt $\sqrt{a^2-b^2-c^2}$ setze man $\sqrt{b^2+c^2}$

Taf I.

Fig 3.





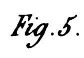
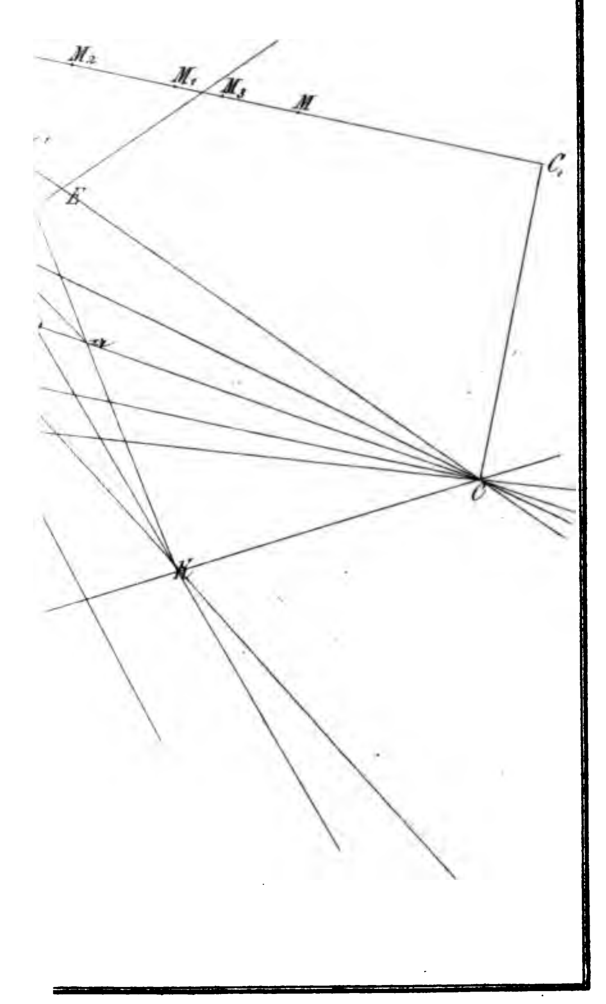


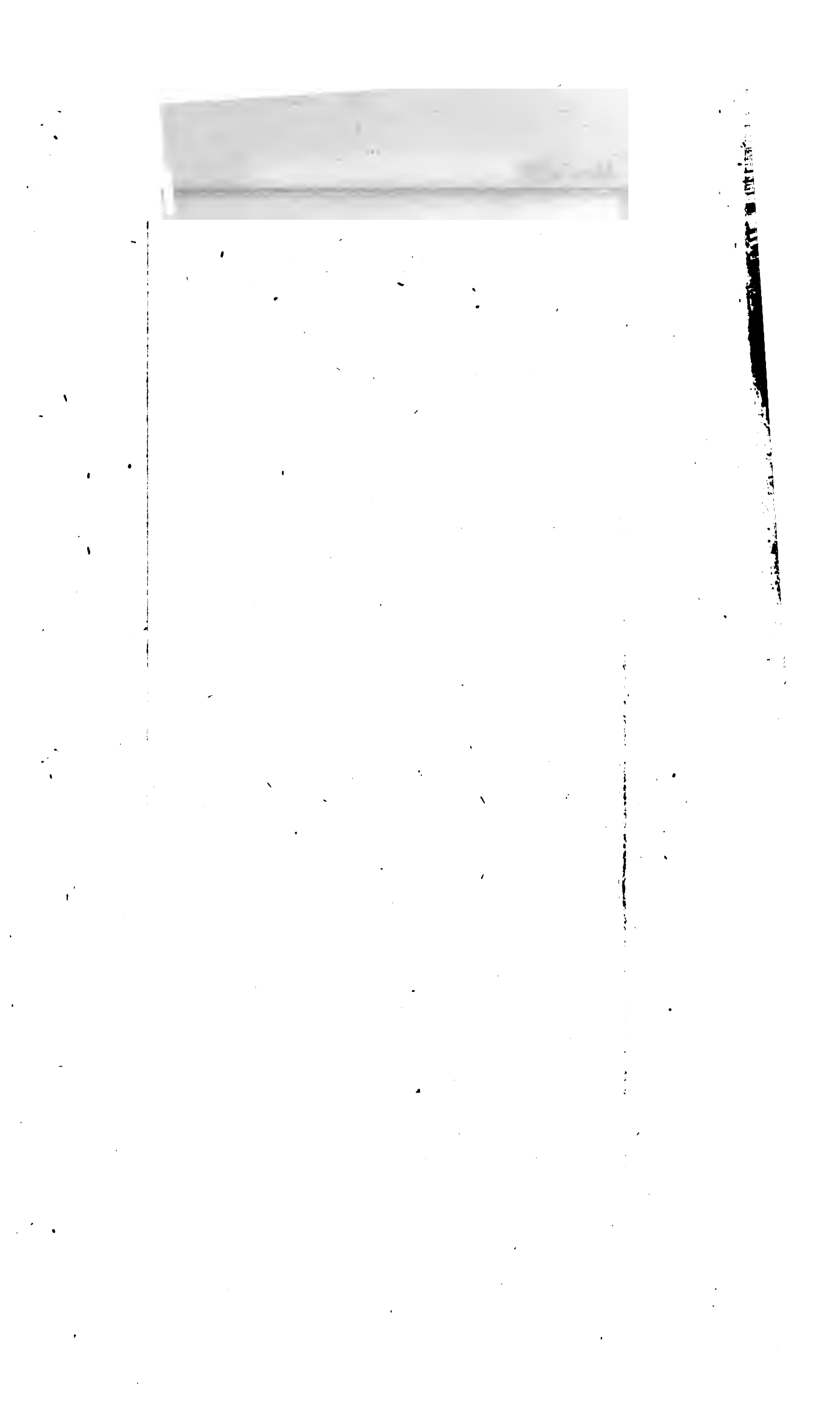
Fig. 5.



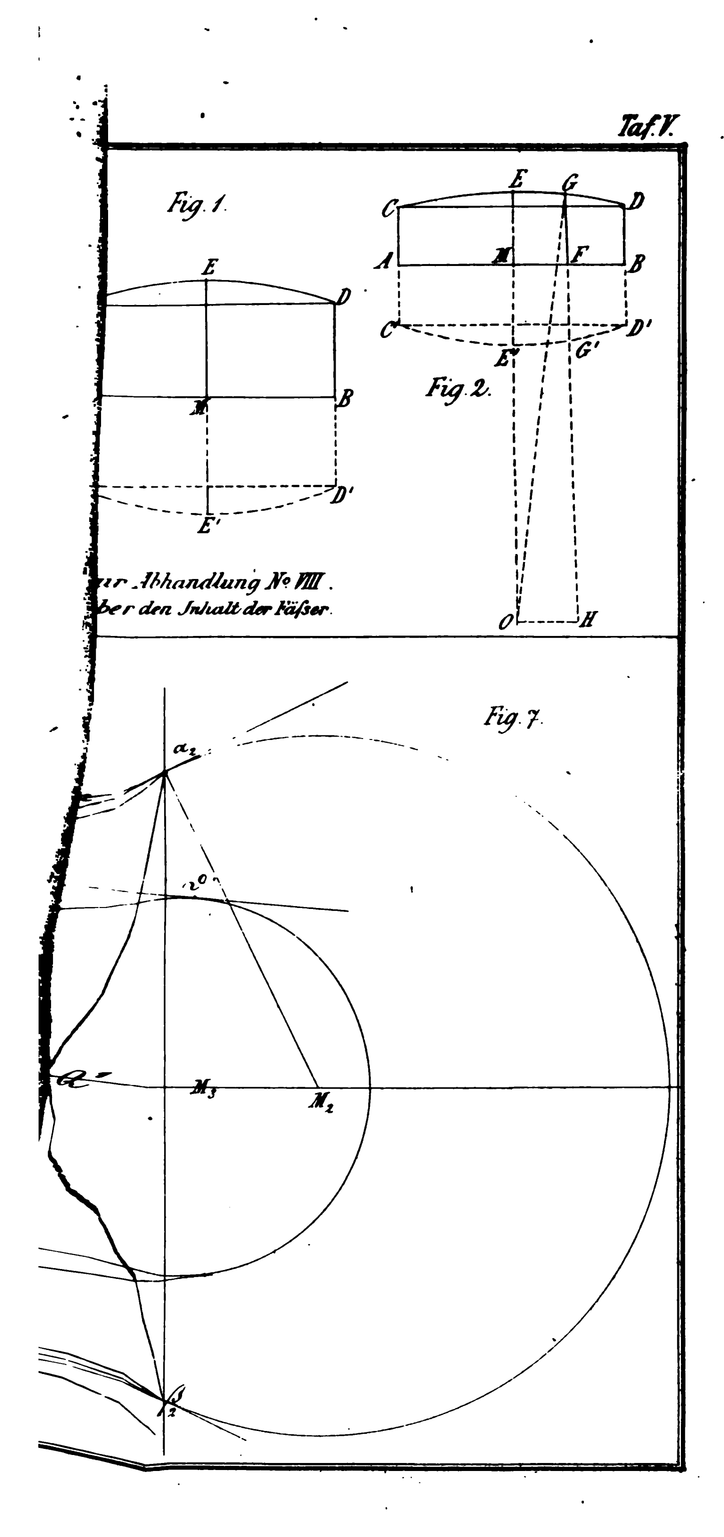
Taf. IV.

Fig. 8.

B A C b a H O B_1 A_1 M_2 M_1 M G a' A'



Taf. V.



...ur Abhandlung № VIII.
...ber den Inhalt der Fässer.



Taf. VI.

Fig. 3.

m

δ

M′ M

m′

δ

III I II

Fig. 7.

O

P

m

Q

A

B C

H F M G J

K L

N

E D P

Taf. VII.

Fig. 2.

Fig. 4.



Taf. IIII.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

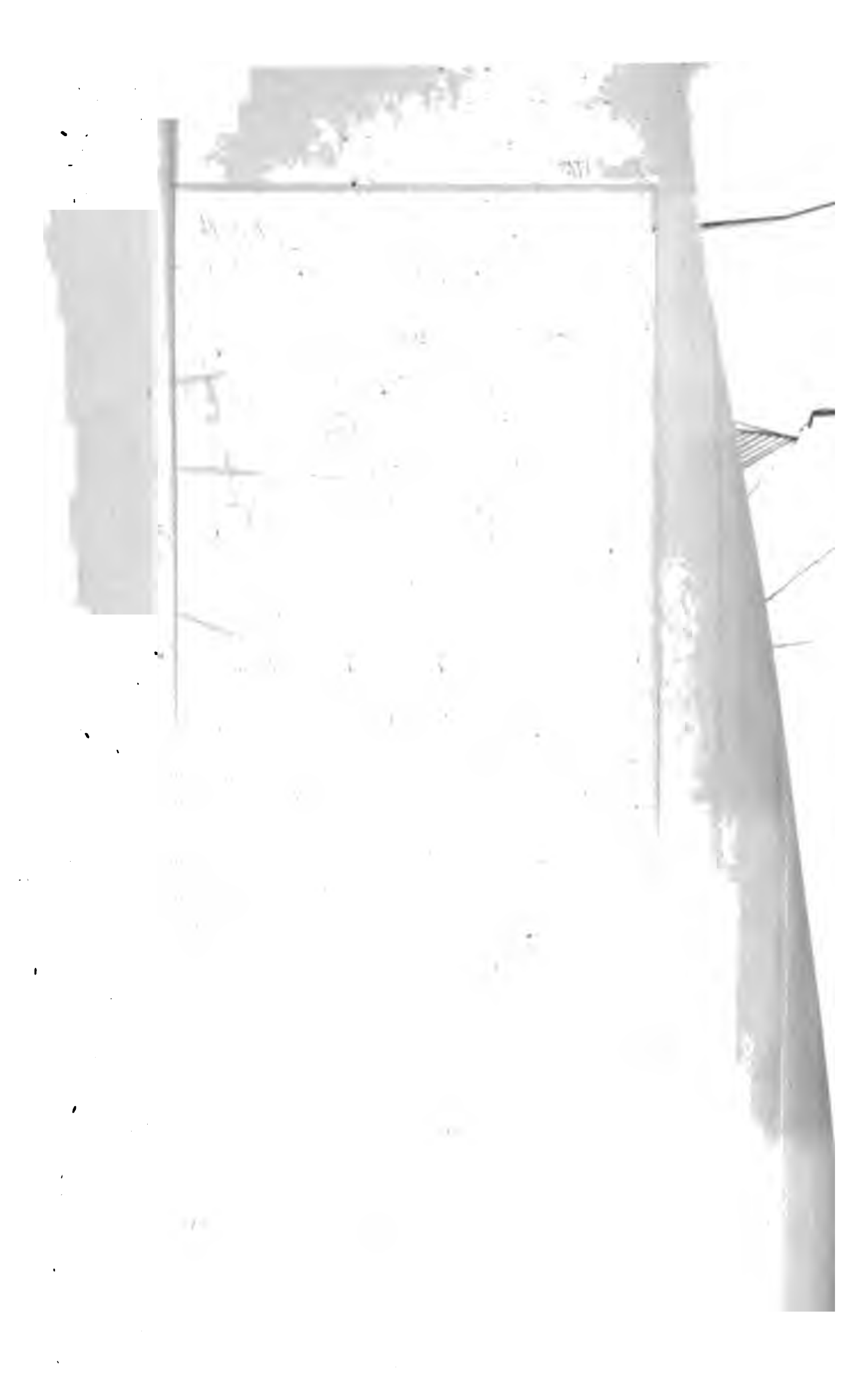
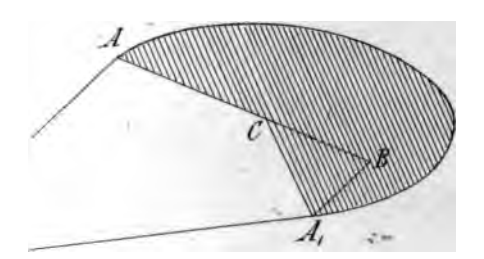
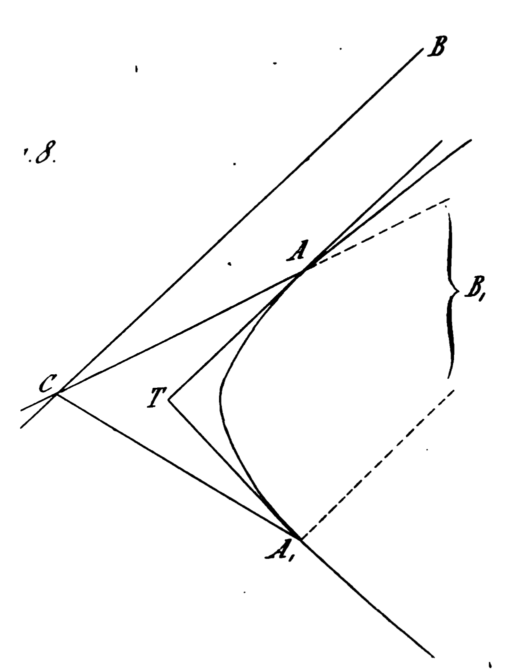




Fig. 6.





.8.

...rch A, mit BB' oder AT gezogene Parallele müssen bis zu ihrem ...längert gedacht werden.

Literarischer Bericht
LXXXIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Briefe von Leonhard Euler und von Joh. Alb. Euler Wenzeslaus Johann Gustav Karsten.
llgemeine Monatsschrift für Wissenschaft und Literatur. Mai 1854.)

Wenzeslaus Johann Gustav Karsten, geb. den 15. De-mber 1732 zu Neu-Brandenburg in Mecklenburg-Strelitz, gestor-n im Jahre 1787 als Professor der Mathematik und Naturlehre der Universität zu Halle, der leider den jetzigen Mathemati-rn nur noch wenig bekannt ist, hat sich im vorigen Jahrhundert rch seine Lehrbücher: seinen grossen Lehrbegriff der ge-mmten Mathematik, seine aus drei Theilen bestehenden rtrefflichen Anfangsgründe der mathematischen Wis-nschaften, und seinen aus zwei Theilen bestehenden Aus-g aus den Anfangsgründen der mathematischen Wis-nschaften, welcher letztere auch eine für damalige Zeit sehr te, kurze Darstellung der in den beiden ersten grösseren Wer-n nicht behandelten astronomischen Wissenschaften enthält, um Verbreitung und gründlichere Darstellung der mathematischen issenschaften ein sehr grosses Verdienst erworben, und hat in lle, wie uns alte Leute erzählt haben, für einen so ausgezeich-:en Lehrer der Mathematik gegolten, dass selbst nicht wenige nner aus den verschiedensten Ständen, die gar keine soge-nnten Gelehrten waren und werden wollten, aus Neigung, zu ihrer sbildung, an seinen Vorlesungen Theil nahmen*). Ausser den

*) Als ein Beispiel hierzu kann der Herausgeber seinen eigenen Vater führen, der Buchdrucker war, sich aber in seinem späteren Leben immer ch mit dem grössten Interesse an Karsten's Vorlesungen erinnerte.

oben genannten Werken Karsten's zeichnet sich hauptsächlich seine schon weit früher erschienene Mathesis theoretica elementaris atque sublimior. Rostochii et Gryphiswaldiae 1760, durch ungemeine Strenge und Präcision aus, ein Werk, welches u. A. auch das Verdienst hat, dass darin (S. 146.) in der Stereometrie der Unterschied zwischen Congruenz und Symmetrie, um mich des neueren Sprachgebrauchs zu bedienen, in sehr bestimmter Weise hervorgehoben wird, ein Unterschied, den selbst Kästner gar nicht gekannt zu haben scheint, und der bekanntlich zu sehr begründeten Anfechtungen von Euclid. Elem. XI. 28. vielfache Veranlassung gegeben hat. Karsten hat daher auch das grosse Verdienst, dass er wohl zuerst die jetzt gebräuchlichen Beweise durch die Exhaustionsmethode oder die Methode der Gränzen in die Stereometrie eingeführt hat. Bekannter als diese von uns hier hervorgehobenen Verdienste Karsten's um die reine Mathematik sind seine Verdienste um die bessere und gründlichere, auch namentlich für die praktische Anwendung geeignetere Darstellung der mechanischen Wissenschaften, worüber wir uns daher hier nicht weiter zu verbreiten brauchen.

Wegen des schon aus dem Vorhergehenden gewiss deutlich hervorgehenden Interesses, welches wir immer an Wenzeslaus Joh. Gust. Karsten's Schriften genommen haben, und wegen der vielfachen Belehrung, die wir selbst aus denselben geschöpft zu haben dankbar bekennen, hat es uns eine ungemeine Freude gemacht, dass sein würdiger Verwandter, Herr Prof. G. Karsten in Kiel, durch die Herausgabe der obigen Briefe diesen sehr verdienten älteren Mathematiker den jetzigen Mathematikern wieder in's Gedächtniss zurückgerufen hat. Schon als mit einem Leonhard Euler und seinem Sohne J. Albrecht Euler gewechselte Briefe sind diese Briefe an sich höchst interessant. Dieselben sind aber auch für die Geschichte der Mathematik von Bedeutung, und wir erkennen vollkommen das nicht geringe Verdienst an, das Herr Professor Karsten sich durch ihre Publication um diese Wissenschaft erworben hat. Wir lernen z. B. aus diesen Briefen, wie es gekommen ist, dass W. J. G. Karsten der Herausgeber von Euler's berühmtem Werke: Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Ed. nov. Gryphisw. 1790, — durch dessen vorzügliche Uebersetzung (Greifswald 1853.) sich neuerlichst Herr Professor Wolfers in Berlin ein höchst anerkennungswerthes Verdienst erworben hat, — wurde, und hören zu unserem Erstaunen, dass Euler keinen Verleger zu demselben finden konnte und Karsten sich vielfache Mühe geben musste, um einen Buchhändler zur Uebernahme des Verlags zu bewegen. Wir

erfahren aus diesen Briefen die wahrlich nicht erfreulichen Ursachen, welche Euler's schnellen Weggang von Berlin nach Petersburg herbeiführten, „mit seiner gantzen aus 18 Seelen bestehenden familie." Diese Briefe bringen uns ferner manche interessante Dinge über nicht wenige verdiente und unverdiente Mathematiker der damaligen Zeit, z. B. über Herrn Frederic de Castillon, der von J. A. Euler in einem vom letzten April 1765 datirten Briefe bezeichnet wird als „ein Bursche von 18 Jahren, der, wenn er das hiesige Joachimsthalische Gymnasium frequentiren wollte, höchstens in Secunda zu sitzen kommen würde", dessenungeachtet aber „Professor Matheseos" geworden sei. Auch in wissenschaftlicher Rücksicht lassen uns diese Briefe keineswegs leer ausgehen: So theilt z. B., mancher anderer interessanter Dinge nicht zu gedenken, J. A. Euler eine „von seinem Schwager und Schüler, einem hiesigen Bombardir, gefundene Trisectionem anguli mit, die nicht uneben ist und bei nicht allzugrossen Zeichnungen die Probe hält", sowie eine von Lambert angegebene geometrische *) „Rectificationem circuli" die Beachtung verdient.

Wir glauben, dass das Obige hinreichen wird, die Leser des Archiv's auf diese interessanten Briefe aufmerksam zu machen, und sagen Herrn Professor Karsten in Kiel für deren Publication unsern wärmsten Dank, möchten auch den Wunsch aussprechen, dass die Verlagshandlung der Allg. Monatsschr. f. Wiss. u. Lit. einen Abdruck derselben in einem besonderen Heftchen, mit besonderem Titel versehen, veranstalten liesse, und ersuchen schliesslich Herrn Professor G. Karsten recht sehr, auch die in seinem Besitz befindlichen Briefe von W. J. G. Karsten mit Aepinus, Lambert, Lagrange, Kästner u. A. dem mathematischen Publicum nicht vorzuenthalten, wenn sie, woran kaum zu zu zweifeln ist, ein ähnliches Interesse wie die jetzt veröffentlichten Euler'schen Briefe darbieten sollten.

Geometrie.

Zur Lehre vom Dreiecke mit dem umschriebenen Kreise und den berührenden Kreisen. Von Joh. Rogner. Aus dem Jahresberichte über die st. st. Ober-Realschule in Gratz für das Studienjahr 1852—53 besonders abgedruckt. Gratz. 1853. 4.

---

*) Natürlich annähernde.

So viel und so oft auch schon das ebene Dreieck nebst seinem umschriebenen und seinen Berührungskreisen betrachtet worden ist, hat doch der Herr Verfasser des vorliegenden, sehr lesens- und beachtenswerthen Programms diesem Gegenstande eine neue Seite abzugewinnen gewusst. Ausser den vorher genannten Kreisen zieht der Herr Verfasser nämlich noch jene in Betracht, welche zwischen jeden Tangirungskreis und den ihm zunächst liegenden Scheiteln des Dreiecks so eingetragen werden können, dass sie wechselweise einander und zugleich auch zwei Dreiecksseiten berühren. Diese, den ersteren Hauptberührungskreisen gegenüber, von dem Herrn Verfasser Nebenberührungskreise genannten Kreise sind es, welche ihm zu verschiedenen neuen interessanten und auch für Schüler lehrreichen Betrachtungen, namentlich auch zu verschiedenen bemerkenswerthen Reihensummirungen, Veranlassung gegeben haben. Es werden nach einander folgende Fragen beantwortet: 1. Nach welchem Verfahren können die Nebenberührungskreise verzeichnet werden? — 2. Nach welchem Gesetze folgen die dem nämlichen Winkel eingeschriebenen Nebenberührungskreise auf einander? — 3. Wie viele Nebenberührungskreise lassen sich zwischen einen Hauptberührungskreis und einen der ihm zunächst liegenden Scheitel des Dreiecks eintragen? — 4. Wie gross ist die Summe der Umfänge aller im nämlichen Winkel liegenden Nebenberührungskreise? — 5. Wie gross ist die Summe der Flächenräume aller im nämlichen Winkel liegenden Nebenberührungskreise? — 6. Das Wievielfache von dem Umfange des inneren Hauptberührungskreises ist die Summe der Umfänge der inneren Nebenberührungskreise? — 7. Das Wievielfache von dem Flächenraume des inneren Hauptberührungskreises ist die Summe der Flächenräume der inneren Nebenberührungskreise? — 8. Das Wievielfache von dem Umfange des umschriebenen Kreises ist die Summe der Umfänge der sämmtlichen berührenden Kreise? — 9. Das Wievielfache von dem Flächenraume des umschriebenen Kreises ist die Summe der Flächenräume der sämmtlichen berührenden Kreise?

Die als Beantwortungen dieser Fragen von dem Herrn Verfasser gefundenen Resultate zeichnen sich durch Einfachheit und Eleganz aus, so dass wir dieses Programm allen Lehrern an höheren Lehranstalten zur sorgfältigen Beachtung zu empfehlen uns gedrungen fühlen, indem wir zugleich der Meinung sind, dass sein Inhalt auch zu Uebungen für vorgerücktere Schüler sehr zweckmässig benutzt werden kann.

Mechanik.

Vor Kurzem erschien die erste Lieferung, Text und Tafeln nes Werkes:

Constructionslehre für den Maschinenbau von C. L. Moll und F. Reuleaux, Civil-Ingenieuren, Braunschweig bei Vieweg, 1854.",

elches in so naher Beziehung zu den Werken und Vorträgen des Ierrn Professor Redtenbacher steht, die derselbe seit einer eihe von Jahren an der polytechnischen Schule in Carlsruhe ber denselben Gegenstand hält, dass es in dieser Hinsicht die orgfältigste Vergleichung mit letzteren verdient, besonders da die 'erfasser noch vor $2\frac{1}{2}$ Jahren Redtenbacher's Schüler waren. edem, der an seinem Unterrichte Theil nahm, muss auf den ersten lick die grosse Uebereinstimmung der Tafeln mit dessen Vorlaen und des Textes mit seinem Werke „Resultate für den Iaschinenbau" und seinen Vorträgen, von denen ich als früheer Schüler desselben ein treu nachgeschriebenes Heft vor mir egen habe, auffallen. Die nähere Vergleichung bestätigt dieses iit wenigen Ausnahmen bis in die Einzelnheiten hinein.

Ich fühle mich sowohl gegen meinen Lehrer als gegen das elehrte und technische Publikum verpflichtet, die Art der Ueberinstimmung und die Entstehungsgeschichte des obigen Werkes, o weit es vorliegt, in Folgendem darzulegen, damit das Verdienst er Verfasser und ihr Benehmen gegen Professor Redtenbacher ichtig gewürdigt werden könne.

Der erste Abschnitt handelt von der Festigkeit der Mateialien. Die ganze Anordnung und das Einzelne im Anfange des bschnittes ist dieselbe, wie in den „Resultaten", und ich ihre als Beispiel die Nr. 35. über Arbeitsgrösse zur Verlängerung, 'erkürzung, Drehung und Biegung eines Stabes an, die fast örtlich mit der Nr. 55. der Resultate übereinstimmt. Am Ende ieses Abschnittes dagegen findet die einzige, einigermaassen erebliche Abweichung von Redtenbacher statt, indem die Verasser statt der gebräuchlichen Bruchcoëfficienten die so wenig enau zu ermittelnden Coëfficienten für stabile Festigkeit anwandten, . h. statt von der Kraft, welche zum Bruche eines Stabes nöthig st, von derjenigen ausgingen, welche seine Form bis zur Elastiitätsgrenze verändert. So lange es sich um die Bestimmung der Dimensionen eines Querschnitts von gegebener Gestalt handelt, rscheinen die gewöhnlichen Resultate und nur eine andere Sicherieit, als die gegen Bruch; sobald aber die vortheilhafteste Gestalt

des Querschnitts bestimmt werden soll, tritt die grosse Unsicherheit der Elasticitätsgrenze mit ihrem ganzen Gewichte auf und macht die Folgerungen ebenso unsicher.

Der zweite Abschnitt enthält die Einleitung in die Constructionslehre für den Maschinenbau. Es sind darin überall dieselben Grundgedanken ausgesprochen, welche Redtenbacher in seiner Einleitung aufstellt und bei jeder Gelegenheit der Anwendung wiederholt. Ganz dem Gange des Heftes folgend, sind die Grundbegriffe der Mechanik auszugsweise, die Gesetze des geometrischen Zusammenhangs, des Beharrungszustandes, die allgemeinen Regeln zur Anordnung von Maschinen und zur Bestimmung ihrer Dimensionen aus einander gesetzt. Dabei ist stets auf Dasselbe das Hauptgewicht gelegt, was Redtenbacher als besonders wichtig hervorhebt, wie auf den Begriff der Wirkungsgrösse, auf die Ursachen, welche den Beharrungszustand nothwendig herbeiführen müssen, die Bedingtheit fast aller Dimensionen bis in's Kleinste durch ein verlangtes Maximum von Zweckmässigkeit, besonders aber die Professor Redtenbacher eigenthümliche Methode der Verhältnisszahlen, von denen nachher weiter die Rede sein soll.

Der dritte Abschnitt handelt von der Construction der Maschinentheile. Man findet hier genau dieselbe Reihenfolge, wie in den Resultaten, dieselben Erwägungen wie in den Vorträgen und dieselben Regeln, mit wenigen Ausnahmen. Das eine Mal ist ein Coëfficient geändert, wie bei der Berechnung der Wellen, das andre Mal die Regel eines anderen Autors angenommen, wie bei der Construction der Schrauben; dann sind noch einige wenige Constructionen zugefügt, wie die eines hohlen Zapfens und einer hohlen Welle, einer anderen Kuppelung und einiger Wand- und Hängelager.

Die Tafeln sind der grossen Mehrzahl nach nichts anderes, als Abbildungen von den Vorlagen, welche Professor Redtenbacher construiren liess mit derselben Bezeichnung der Abhängigkeit der Dimensionen und derselben Art der Ausführung; die wenigen Abänderungen sind denen des Textes entsprechend.

Fasst man Alles zusammen, so stellt sich heraus, dass das fragliche Werk grösstentheils die Resultate Redtenbacher's enthält, versehen mit den von demselben in seinen Vorträgen gegebenen Herleitungen und aufgestellten Grundsätzen. Beide stimmen der Anordnung, dem Inhalte und theilweise dem Wortlaute nach überein. — Das grosse Verdienst, welches sich Redtenbacher schon allein durch seine „Resul-

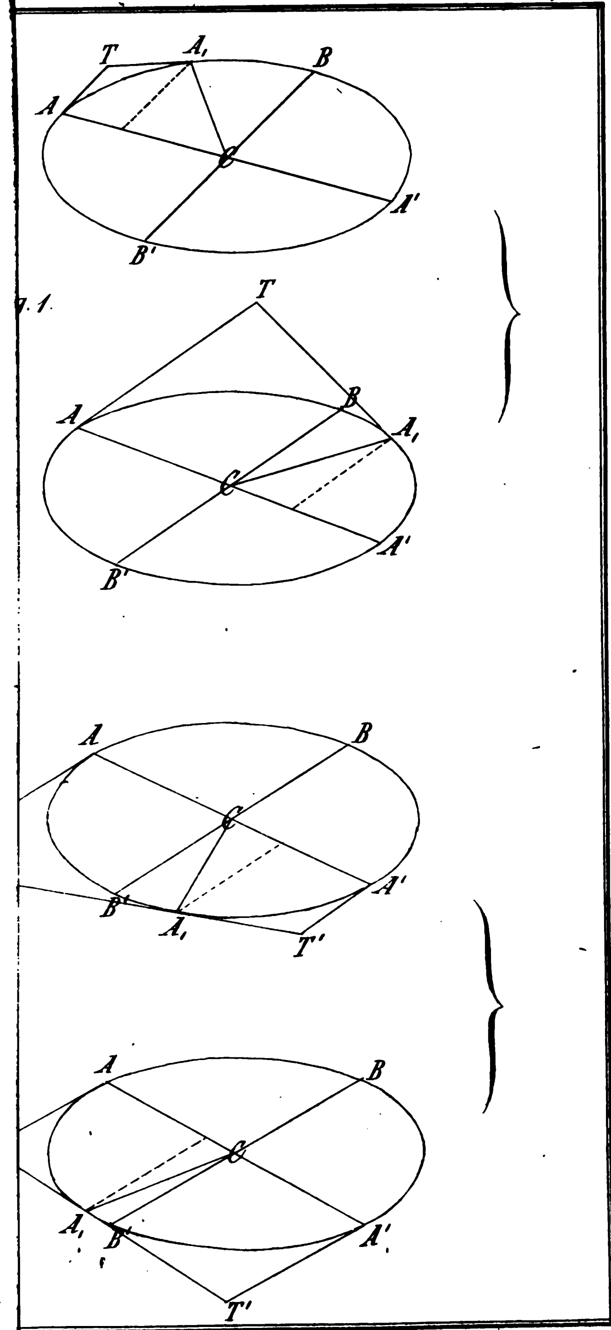
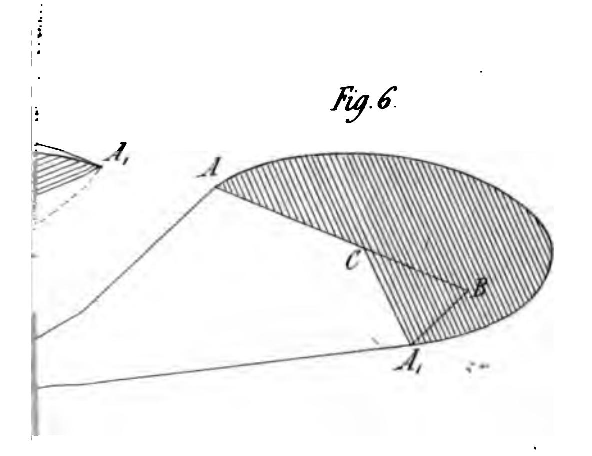

T
A,
B
A
C
A'
B'
g. 1.
T
A
B
A,
C
A'
B'
A
B
C
A'
B'
A,
T'
A
B
C
A,
B'
A'
T'



Fig. 6.



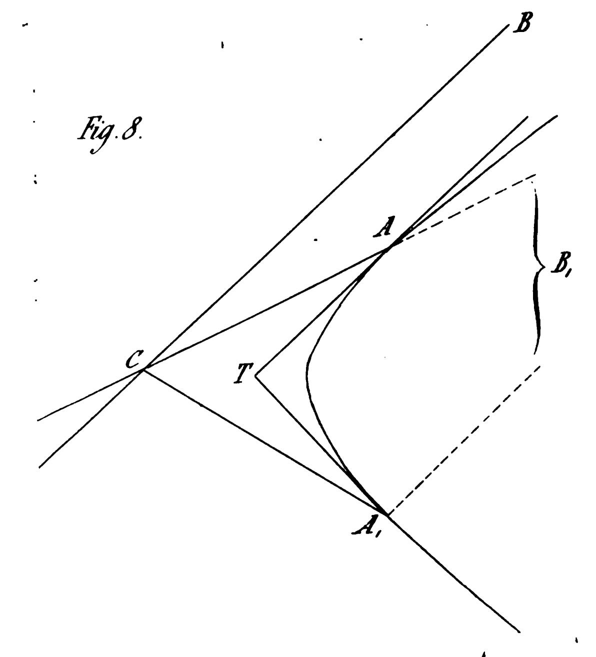


Fig. 8.

l die durch A_1 mit BB' oder AT gezogene Parallele müssen bis zu ihrem
B_1 verlängert gedacht werden.

stein, Adjuncten der k. k. Sternwarte; II. Zusätze zu den Verbesserungen zu dem Kataloge der nördlichen Argelander'schen Zonenbeobachtungen von Wilhelm Oeltzen, Assistenten der Wiener Sternwarte. In der Einleitung giebt Herr Director v. Littrow eine lehrreiche Nachricht über die bei der Reduction der Planetenbeobachtungen gebrauchten Verfahrungsweisen und die dabei in Anwendung gebrachten Formeln. Wie viel erfreuliche Früchte von der fortgesetzten Thätigkeit der k. k. Sternwarte in Wien sich noch erwarten lassen, geht aus diesem Theile der Annalen von Neuem deutlich hervor.

Neues Zeitbestimmungswerk von M. Eble, Lehrer der Mathematik und Physik an der Realanstalt zu Ellwangen, für Schulen, Gemeinden, Techniker, Forst- und Landwirthe, Mathematiker und Freunde der Himmelskunde.

Dieses für Nichtastronomen bestimmte instrumentale und graphische Hülfsmittel zur Bestimmung der Zeit ist schon von Herrn Professor Zech in Tübingen, Herrn Professor Reuschle in Stuttgart und Herrn Professor Encke in Berlin mehrfach empfohlen worden, und scheint, so viel wir bis jetzt dasselbe kennen gelernt haben, diese Empfehlung allerdings auch zu verdienen. Eine besonders deutliche Anschauung von demselben werden aber die Leser des Archivs aus der Anzeige gewinnen, welche Herr Professor v. Littrow in Wien in den „Oesterreichischen Blättern für Literatur und Kunst. Beilage zur Oesterreich.-Kaiserl. Wiener Zeitung. 27. Februar 1854. Nr. 9. über dasselbe geliefert hat, weshalb wir diese Anzeige eines so competenten Richters unsern Lesern im Folgenden wörtlich mittheilen und zugleich wünschen, dadurch etwas zur Verbreitung der genannten verdienstlichen Hülfsmittel zur Zeitbestimmung beizutragen.

„Neues gemeinfassliches Mittel für Regulirung von Uhren. Die bisherigen wahrhaft unzählbaren Versuche dem Nichtastronomen Mittel zur Regulirung der Uhren zu Gebote zu stellen, hat Herr M. Eble, Lehrer der Mathematik und Physik an der Realanstalt zu Ellwangen (Würtemberg), durch sein „Neues Zeitbestimmungswerk (Tübingen 1853)" bei Weitem übertroffen, was leichte und allgemeine Anwendbarkeit mit verhältnissmässiger Genauigkeit verbunden betrifft. Wir können daher nicht umhin, es allen Jenen, welchen daran liegt, ihre Uhren unmittelbar zu prüfen, auf das Angelegentlichste zu empfehlen.

Die Sonnenuhr, immer noch das populärste Mittel dieser Art, leidet an bedeutenden Mängeln, da ihre Aufstellung an gewisse Oertlichkeiten gebunden, und in den seltensten Fällen vollkommen verbürgt ist, überdies auf diesem Wege, wenn nicht besondere

und daher schwer zu erreichende Einrichtungen getroffen werden, nur sehr rohe Resultate zu erhalten sind. Man war deshalb von jeher bemüht, eigentlich astronomische Methoden für Jedermann zugänglich zu machen. Unter diesen Methoden bleibt die vorzüglichste, weil in wenigen Minuten ausführbare und nicht gerade an den Mittag gebundene, immer die, bei welcher man aus der Höhe oder sonstigen Stellung eines gewissen Gestirnes, z. B. der Sonne, zu irgend einer Zeit auf die eben stattfindende Stunde schliesst. Es galt aber dabei, zwei Vereinfachungen einzuführen: einmal Mittel auszudenken, durch welche die Stellung des Gestirnes ohne Komplikationen, denen nur der Astronom gewachsen ist, sicher genug erkannt wird, und dann die zur Ableitung der Zeit aus der Beobachtung nöthige Rechnung möglichst zu erleichtern. In ersterer Beziehung beschränkte man sich, wenn von den an sich sehr genauen und praktischen, aber im Gebrauche ausser dem Meridiane doch immer schon gewisse Kenntnisse voraussetzenden Erfindungen Dent's (Dipleidoskop) und Steinheil's (Passagenprisma) abgesehen wird, mit Recht im allgemeinen auf Höhen messende Werkzeuge und leistete in Herstellung solcher Instrumente von der hier erforderlichen Einfachheit manches Erspriessliche. Herr Eble hat diesen Theil seiner Aufgabe gehörig berücksichtigt, und an seinem Sextanten gegen frühere Einrichtungen wesentliche Verbesserungen angebracht. Sein eigentliches Verdienst aber, durch das er eben allen Vorgängern den Rang abgewonnen, besteht in der Erleichterung oder besser völligen Umgehung der Rechnung, indem er alte und so zu sagen verschollene Methoden, geometrische Aufgaben graphisch zu berechnen, sehr sinnreich modificirte und zu dem hier verfolgten Zwecke in einer Weise benützte, die nichts zu wünschen übrig lässt. Sein astronomisches Netz ist eine Art von Rechenstab, durch welchen alle Schwierigkeit dieses Theiles der Arbeit auch für den Ungeübtesten völlig beseitigt und eine Genauigkeit (bis auf etwa eine halbe Minute) erreicht wird, wie sie bisher kein hierzu erdachtes, ebenso leicht anwendbares Mittel bietet. Die Klarheit der beigegebenen Gebrauchsanweisung und die Billigkeit des Preises (in drei Sorten zu 3 Thlr., 3 Thlr. 18 Ngr., 4 Thlr. 10 Ngr.) vermehrt die Zugänglichkeit dieses nützlichen Apparates, dessen Präcision durch Ausführung in grösseren Verhältnissen und auf Metall sich bedeutend steigern liesse, und der durch die von Herrn Eble gegebenen Nebenanwendungen, z. B. für beiläufige Bestimmungen von Zeit und Azimut zur See auch in wissenschaftlicheren Kreisen Beachtung zu finden in hohem Maasse verdient.

K. v. Littrow."

Physik.

Herr Dr. August Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle, hat uns nachstehende Anzeige übersandt, die wir um des edlen Zweckes willen, wegen dessen die Herausgabe des angezeigten Buchs unternommen worden, nicht auf dem Umschlage, sondern im Literarischen Berichte selbst abdrucken lassen, und den Wunsch aussprechen, dass durch recht viele Abnehmer dieses Buchs der in Rede stehende Zweck kräftigst gefördert werden möge.

In Commission bei H. W. Schmidt in Halle a. d. S. ist erschienen:

Physikalische Aufgaben.

Mit Auflösungen herausgegeben

von

Dr. August Wiegand,

Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

Mit eingedruckten Holzschnitten.

Der Reinertrag der ganzen Auflage ist für den Bau eines neuen Realschulhauses in den Franckeschen Stiftungen bestimmt.

Preis 10 Sgr.

Wenn der Unterzeichnete hofft, durch Herausgabe vorgenannter Schrift einen Theil der fehlenden Geldmittel zu dem so dringend nothwendigen Bau eines Realschulhauses in den Franckeschen Stiftungen aufzubringen, so beseelt ihn hierbei die Ueberzeugung, dass die Stiftungen Aug. Herm. Francke's, welche seit Jahrhunderten so segensreich gewirkt haben, einen wohl begründeten Anspruch auf die Theilnahme und Unterstützung aller Freunde christlicher Schulbildung sich erworben haben dürften und dass die Nachwelt des grossen Stifters als ihr heiligstes Vermächtniss die Pflicht erkennen werde, an seinem grossen Werke zum Segen des Vaterlandes immer fortzuarbeiten.

Aufträge nimmt jede Buchhandlung an.

Dr. August Wiegand,
Oberlehrer an der Realschule zu Halle a. d. S.

Berichtigung.

In dem Aufsatze Nr. XXXI. in Thl. XXII. S. 444 — S. 447. ist statt θ überall Θ zu setzen. Wenn θ auch durchaus zu keinem Missverständniss führt, so ist doch an der Stelle des „mathematischen Wörterbuchs", worauf sich der Aufsatz Nr. XXXI. bezieht, überall Θ gebraucht worden. Ferner setze man noch S. 445. Z. 12. in dem Ausdrucke von $2s$ am Ende desselben statt 8 einige Punkte, nämlich ....

Wegen dieser grösseren Anzahl von Aenderungen sind der vorliegenden Nummer des Literarischen Berichts am Ende zwei Cartons beigegeben worden, die in Thl. XXII. Heft IV. statt der beiden Blätter Bog. 29. S. 443. und S. 444. und Bog. 30. S. 445. und S. 446. eingeheftet werden können.

Literarischer Bericht XC.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Extrait du Fakhrî, Traité d'Algèbre par Aboû Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhi (Manuscrit 952, supplément arabe de la Bibliothèque impériale); précedé d'un Mémoire sur l'Algèbre indéterminée chez les Arabes. Par F. Woepcke. Paris 1853. 8.

Herr Doctor Woepcke hat sich schon durch so viele vorzügliche Leistungen, die auch fast sämmtlich in dem Literarischen Berichte unsers Archivs angezeigt worden sind, um die Geschichte der Mathematik verdient gemacht, dass man jedem neuen Werke desselben erhöhete Aufmerksamkeit zuwenden muss.

Ueber die Algebra der Araber besitzen wir schon eine grössere Anzahl von Publicationen, welche der Herr Verfasser des vorliegenden Werkes in der demselben vorangeschickten „Notice sur le Fakhrî" namhaft macht und etwas genauer charakterisirt. Im Jahre 1812 erschien zu Calcutta:

The Khoolasut-ool-Hisab, a Compendium of Arithmetic and Geometry, in the arabic language, by Buhae-ood. Deen of Amool in Syria, with a translation into persian and commentary. by the late Muolowee Ruoshun Ulee of Juonpoor, to which is added a Treatise on Algebra by Nudjm-ood-Deen Ulee Khan etc. Calcutta, printed by P. Pereira in the hindoostanee press, 1812.

Wir kennen diese Schrift, welche der Herr Verfasser „le Khilâcet Alhiçâb de Behâ Eddin (+ 1622)" nennt, nicht;

nach Herrn Dr. Wöpcke's sachkundigem Urtheil kann dieselbe aber keinen Begriff geben von den Fortschritten, welche die Araber in der Algebra gemacht hatten.

Später gab Rosen zu London die Algebra des Mohammed Ben Moûça unter dem Titel:

The Algebra of Mohammed ben Musa, edited and translated by Frederic Rosen. London. 1831.

heraus und wies in diesem, auf Veranlassung des Khalifen Almamoûn verfassten Werke deutliche Spuren indischen Einflusses nach, welcher sich erklärt durch das Ansehen, das die indischen Gelehrten an dem Hofe der ersten Abassiden als Astronomen, Mathematiker und Aerzte genossen.

Durch dieses Werk gewann die allgemein angenommene Meinung, dass die Araber nicht über die bestimmten Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer unbekannten Grösse hinaus gekommen seien, neue Nahrung, bis der berühmte Sedillot auf der Kaiserlichen Bibliothek zu Paris ein Fragment der Algebra des Alkhayyâmi entdeckte, aus welchem der Nachweis geführt werden konnte, dass die Araber sich auch schon mit der Auflösung der bestimmten Gleichungen des dritten Grades beschäftigt haben.

Dass Herr Dr. Wöpcke durch die Herausgabe des vollständigen Werkes von Alkhayyâmi sich ein besonderes Verdienst um die Geschichte der Mathematik erworben hat, ist den Lesern des Archivs aus dem Literar. Ber. Nr. LXVII. bekannt. Auch hat Herr Dr. Wöpcke in diesem Werke nachgewiesen, dass die Araber den Durchschnitt zweier Kegelschnitte zur Construction der bestimmten Gleichungen des dritten und auch des vierten Grades angewandt haben.

Nach diesen Arbeiten war nun noch eine wichtige Lücke auszufüllen, indem es immer noch zweifelhaft blieb, ob die Araber sich auch mit der unbestimmten Analytik beschäftigt haben. Herr Dr. Wöpcke war so glücklich, auf der Kaiserlichen Bibliothek zu Paris ein Manuscript zu entdecken, dessen Inhalt ihm die Mittel an die Hand gab, die Fortschritte zu ermitteln, welche die Araber am Ende des 10ten Jahrhunderts in dem genannten wichtigen Theile der Algebra gemacht hatten. Dieses Werk hat zum Verfasser den Aboû Beqr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhi, war von ihm gewidmet dem Aboû Ghâlib Mohammed Ibn Khalaf, mit dem Beinamen Fakhr Almoulq, Vezir des Fürsten Bouïde Behâ Aldaoulah, Sohn des berühmten Adhad Aldaoulah, und hat auch jedenfalls zu Ehren dieses

Vezirs den Titel Alfakhrî erhalten. Dasselbe wurde wahrscheinlich am Anfange des 11ten Jahrhunderts verfasst und liefert uns die einzige Theorie des algebraischen Calculs bei den Arabern, welche wir bis jetzt besitzen, wird aber noch weit wichtiger und interessanter durch eine Sammlung von Aufgaben, welche als eine fast genaue Reproduction mehrerer Bücher des Diophant zu betrachten sind. Herr Dr. Wöpcke hat sich nun die von ihm nach unserer Meinung auch vollständig und mit grossem Scharfsinne gelöste Aufgabe gestellt, nachzuweisen:

1°. Que les Arabes connaissaient l'algèbre indéterminée.

2°. Que leurs travaux sur ce sujet sont basés sur l'ouvrage de Diophante.

3°. Qu'ils ont ajouté à l'algèbre de Diophante, tant en inventant de nouveaux procédés, qu'en proposant des problèmes de degrés plus élevés.

4°. Que jusqu'à la fin du *X*e siècle ils ont ignoré les méthodes d'analyse indéterminée qu'on trouve chez les Indiens.

5°. Que les travaux de Fibonacci n'ont pas le degré d'originalité qu'on a été tenté de leur attribuer; mais qu'ils sont en grande partie empruntés aux Arabes, et particulièrement à Alkarkhi.

Wir müssen uns leider hier mit der vorhergehenden kurzen Anzeige dieses neuen wichtigen Beitrags zur Geschichte der Mathematik, wofür die Leser mit uns Herrn Dr. Wöpcke den wärmsten Dank sagen werden, begnügen, machen aber nicht bloss in allgemeiner historischer Beziehung die Leser auf denselben aufmerksam, sondern auch in mathematischer Beziehung wegen der grossen Anzahl interessanter Probleme, die Herr Dr. Wöpcke aus dem von ihm entdeckten wichtigen Werke hier mitgetheilt hat.

Möge Herr Dr. Wöpcke nicht ermüden, das lange brach gelegene Feld der Geschichte der Mathematik fortdauernd zu bebauen, wie er so ruhmvoll angefangen! Dass hier noch viel zu ernten ist, lässt sich nach den bisher gemachten Funden kaum bezweifeln, und Dank und Anerkennung Seitens der Mathematiker können und werden solchen in jeder Beziehung trefflichen Bestrebungen nicht fehlen.

Auf dem Titel trägt das Werk den Zusatz: „Imprimé par autorisation de l'Empereur, à l'imprimérie impériale", woraus das Interesse hervorgeht, welches die Kaiserlich französische Regierung an diesen Publicationen aus den reichen Schätzen ihrer Bibliothek nimmt, und die Förderung und Unterstützung, welche sie denselben in liberalster und ruhmreichster Weise zu

Theil werden lässt, wofür die Mathematik, welche in Frankreich von jeher, vorzüglich aber seit der Zeit Napoleon I. bis jetzt, sich einer grösseren Förderung als in gleicher Weise in wenig anderen Ländern zu erfreuen gehabt hat, der Kaiserlich französischen Regierung zu dem grössten Danke sich auf das Lebhafteste verpflichtet halten muss.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet von Dr. Hermann Gerlach, Lehrer der Mathematik und Physik an der Handelsschule zu Dessau. Erster Cursus der Arithmetik. Elemente der Planimetrie. Dessau. Katz. 1853. 8. 2 Bändchen.

Dieses im Allgemeinen nur kurze, aber doch ziemlich reichhaltige Lehrbuch muss von der Handelsschule zu Dessau, für welche es jedenfalls zunächst bestimmt ist, einen sehr vortheilhaften Begriff erwecken. Bei aller Einfachheit der Darstellung ist der Strenge nirgends etwas Wesentliches vergeben, und besonders in der Geometrie findet sich ein grosser Reichthum von Uebungsaufgaben, die, so wie das Büchlein überhaupt, auch anderen Lehrern zur Beachtung empfohlen werden können.

Arithmetik.

Elementarny Wyklad Matematyki przez Jana Kantego Steczkowskiego, Professora Wszechnicy Jagiellonskiej. Cześć I. Arytmetyka. W Krakowie. 1851. Cześć II. Algebra. W Krakowie. 1852.

Wenn wir uns auch nicht rühmen dürfen, der polnischen Sprache so weit mächtig zu sein, um das vorliegende Werk vollständig lesen zu können, so ist uns doch das allgemeine Verständniss desselben mit Hülfe eines Freundes sehr wohl möglich geworden, was wir ausserdem namentlich auch der Allgemeinheit der mathematischen Zeichensprache verdanken, von welcher natürlich in diesem Werke in sehr ausgedehnter Weise Gebrauch gemacht ist. Eine Anzeige dieses Werkes liefern wir aber in diesen literarischen Berichten um so lieber, weil in polnischer Sprache verfasste mathe-

matische Werke im Ganzen nicht häufig sind, da die vielen ausgezeichneten Mathematiker, wie z. B., um nur ein Paar zu nennen, der treffliche Sniadecki*), Poczobut u. A., welche die Polen immer besessen haben, sich bei ihren Vorträgen wohl vielfach französischer Lehrbücher als Compendien bedient haben.

Das vorliegende Werk ist jedenfalls ein sehr gründliches und vollständiges Lehrbuch der Arithmetik und Algebra in äusserst deutlicher Darstellung, so dass wir nur bedauern können, dass es dem Herrn Verfasser, was, nach dem allgemeinen Titel zu urtheilen, jedenfalls seine ursprüngliche Absicht war, bis jetzt nicht möglich gewesen ist, auch die übrigen Theile der sogenannten Elementar- und vielleicht auch der höheren Mathematik in gleich ansprechender und lehrreicher Weise zu behandeln. Um dem Leser einen Begriff von der Reichhaltigkeit dieses Werkes zu verschaffen, wollen wir im Folgenden seinen Inhalt etwas genauer angeben.

Der erste Theil enthält ausser den gewöhnlichen arithmetischen Lehren, die sich in jedem Lehrbuche finden, lehrreiche allgemeine Betrachtungen über die Theiler der Zahlen, die uns besonders angesprochen haben, und eine sehr gründliche Behandlung ist auch den Decimalbrüchen, zugleich mit Rücksicht auf die abgekürzten Rechnungen, und den Kettenbrüchen, deren Anwendung zur Wurzelausziehung auch gelehrt worden ist, zu Theil geworden. Die Combinationslehre ist für den beabsichtigten Zweck ziemlich vollständig behandelt worden, und bei dem binomischen Lehrsatze hat der Herr Verfasser auch dessen Anwendung auf die Wurzelausziehung in sehr instructiver Weise, wie man diesen Gegenstand nur selten behandelt findet, gezeigt, so wie nach unserer Meinung im Allgemeinen als ein Vorzug dieses Lehrbuchs jedenfalls hervorzuheben ist, dass dasselbe mit sehr richtigem Takte und grosser Umsicht auch auf die Anwendungen zurückgeht, welche sich von den theoretischen Lehren in so reichem Maasse machen lassen. An das Binomial-Theorem schliesst sich eine kurze Behandlung des polynomischen Lehrsatzes an, und hierauf folgt die in theoretischer und praktischer Rücksicht auf gleich vorzügliche Weise behandelte Lehre von den Logarithmen, wobei auch die Einrichtung und der Gebrauch der Gauss'schen Tafeln sehr deutlich gezeigt worden ist. Den Beschluss dieses ersten Theiles macht die Lehre von den Proportionen und deren Anwendung auf die sogenannten höheren praktischen Rechnungsarten, welchem letz-

*) Der aber auch selbst mehrere in polnischer Sprache verfasste mathematische Lehrbücher herausgegeben hat.

teren Gegenstande gleichfalls eine sehr gründliche und umfassende Behandlung zu Theil geworden ist.

Der zweite, die eigentliche Algebra, d. h. die Lehre von den Gleichungen und deren Anwendung, enthaltende Theil beginnt mit einer kurzen Geschichte dieser Wissenschaft und der Entwickelung ihres Begriffs. Abweichend von dem gewöhnlichen Gange der algebraischen Elementarbücher werden dann zuerst die wichtigsten allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen bewiesen und die hauptsächlichsten Transformationen derselben gelehrt, was natürlich von dem Standpunkte der strengen Theorie aus nur vollständig gebilligt werden kann. Dem Rationalmachen der Gleichungen ist besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden, und wir sind dabei auf viele äusserst lehrreiche Beispiele, an denen das Werk überhaupt reich ist, gestossen, die wir Lehrern der Mathematik dringend zur weiteren Beachtung empfehlen. Dann folgt die Auflösung der Gleichungen des ersten, zweiten — diese auch mit Hülfe der Kettenbrüche — und dritten Grades mit einer unbekannten Grösse, und die Auflösung der höheren Gleichungen mit einer unbekannten Grösse durch Näherung, welchem letzteren Gegenstande besondere Aufmerksamkeit gewidmet worden ist. Hieran schliesst sich die Theorie der Elimination für Gleichungen des ersten Grades und, weit ausführlicher als in den meisten deutschen Lehrbüchern der Algebra, für Gleichungen höherer Grade, so dass wir auch die Behandlung des letzteren Gegenstandes zur Beachtung besonders empfehlen können. Dann wendet sich der Herr Verfasser zu der unbestimmten Analytik und kommt endlich zu einer ziemlich ausführlichen Darstellung der Differenzenrechnung, welche sodann in vortrefflichster Weise zur Entwickelung der Theorie der arithmetischen Reihen der ersten und höherer Ordnungen, zur Summirung der Reihen der Potenzen der natürlichen Zahlen, der Berechnung der Kugelhaufen, auch — was wiederum sehr mit Unrecht nur selten in Schriften dieser Art geschieht — auf die Theorie des Einschaltens, überall durch vielfache Beispiele erläutert, angewandt wird. Den Beschluss macht die Theorie der geometrischen Reihen und deren Anwendung auf die Zins- und Rentenrechnung.

Es hat uns besondere Genugthuung gewährt, dieses in mehreren Beziehungen, namentlich durch den Reichthum lehrreicher Beispiele und seine höchst instructive Richtung auf die fruchtreiche Anwendung der Theorie ausgezeichnete Werk unseren Lesern hier etwas näher bekannt machen zu können. Auch der polnischen Sprache ganz unkundige Leser und Lehrer werden von den vielen lehrreichen Rechnungsbeispielen, die selbst in vie-

len unserer Aufgabensammlungen fehlen, bei ihrem Unterrichte vielfachen zweckmässigen Gebrauch machen können. Glück wünschen wir der polnischen mathematischen Literatur zu dem Besitze eines so ausgezeichneten Lehrbuchs, und Glück wünschen wir der Universität zu Krakau zu dem Besitze eines so ausgezeichneten Lehrers, wie des Herrn Verfassers dieses Werkes!

Geometrie.

Sammlung von stereometrischen Aufgaben. Für Gymnasien und Gewerbeschulen bearbeitet von Friedrich Hofmann, Professor der Mathematik am k. Gymnasium zu Bayreuth. Bayreuth. Grau. 1854. 8.

Die empfehlenswerthe Sammlung algebraischer Aufgaben des Herrn Professor Hofmann ist im Literar. Ber. Nr. LXXVI. und LXXXVIII. angezeigt, und es sind dort zugleich die Principien angegeben worden, welche den Herrn Verfasser bei der Herausgabe dieser Aufgabensammlung geleitet haben. Die vorliegende Sammlung stereometrischer Aufgaben ist als eine erste Fortsetzung jener algebraischen Aufgabensammlung zu betrachten, und im Allgemeinen ganz nach denselben Principien bearbeitet, auf welche wir daher hier nicht von Neuem einzugehen brauchen. Die Anzahl dieser stereometrischen Aufgaben ist sehr gross und beläuft sich auf 534. Dieselben haben zum Theil sehr zweckmässig eine auf das Praktische gerichtete Tendenz, und auf den Gebrauch des Decimal- und Duodecimalmaasses ist gleichmässig Rücksicht genommen worden. Auf unreine quadratische Gleichungen führende Aufgaben sind durch ein vorgesetztes Sternchen (*) bezeichnet; doch führen auch mehrere der nicht so bezeichneten Aufgaben auf solche Gleichungen, wenn die Unbekannten nicht auf die geeignetste Weise gewählt werden; ein grosser Theil der quadratischen Gleichungen giebt rationale Resultate. Der Inhalt nach seinen Hauptabschnitten ist folgender: I. Würfel. II. Parallelepipedon. III. Prisma. IV. Cylinder. V. Pyramide. VI. Kegel. VII. Abgekürzte Pyramide. VIII. Abgekürzter Kegel. IX. Kugel. X. Kugel-Ausschnitt, Abschnitt und Zone. XI. Regelmässige Körper. XII. Vermischte Aufgaben. XIII. Stereometrische Aufgaben vom dritten oder vierten Grade.

Eben so wie die Sammlung algebraischer Aufgaben halten wir auch diese Sammlung stereometrischer Aufgaben für ein den be-

treffenden Unterricht sehr zu fördern geeignetes Hülfsmittel und machen daher alle Lehrer auf dieselbe aufmerksam, indem wir zugleich, ebenso wie bei den algebraischen Aufgaben, den Wunsch aussprechen, dass es dem Herrn Verfasser gefallen möge, auch die Resultate der Aufgaben, welche die vorliegende Sammlung noch nicht enthält, bald in einem besonderen Hefte zu veröffentlichen, wofür sich ihm alle Lehrer gewiss zu Dank verpflichtet halten werden.

Uebungsaufgaben über die Anwendung der Lehre vom Maximum und Minimum auf die Kegelschnittslinien und die Theorie der ebenen Curven überhaupt. Von Johann Rogner. Aus dem Jahresberichte der st. st. Ober-Realschule in Gratz für das Studienjahr 1853/4 besonders abgedruckt. Gratz. Kienreich. 1854. 4.

Die Anzahl recht zweckmässiger und instructiver Aufgaben für die Lehre von dem Maximum und Minimum ist nicht sehr gross, und jeder neue Beitrag dazu ist mit Dank aufzunehmen. Herr Professor Rogner an der st. st. Ober-Realschule zu Gratz hat in dem vorliegenden, eine weitere Verbreitung verdienenden Programm einen solchen Beitrag geliefert, auf den wir die Leser unserer Zeitschrift, namentlich die Lehrer der Mathematik, aufmerksam zu machen nicht unterlassen. Die Anzahl der mitgetheilten Aufgaben ist 14; sie alle mitzutheilen, fehlt uns hier der Raum, weshalb wir uns mit der ersten und letzten begnügen:

Aufgabe I. Es seien ein Kreis und auf demselben zwei Punkte gegeben. Man bestimme die Lage jener Tangente, auf welcher von den verlängerten Ordinaten jener Punkte das kleinmöglichste Segment abgeschnitten wird.

Aufgabe XIV. Man soll aus einer gegebenen Ellipse durch eine Parabel und die, durch die Durchschnittspunkte beider Curven bestimmte Sehne die grösstmögliche Fläche schneiden, wobei der Herr Verfasser, wie aus der Auflösung hervorgeht, annimmt, dass die gesuchte Parabel durch den einen Scheitel der Ellipse gehen und mit derselben die Hauptaxe gemein haben soll.

Neu scheinen die Aufgaben alle zu sein, und die Auflösungen befriedigen vollkommen, indem auch der zweite Differentialquotient überall vollständig entwickelt, und mittelst desselben das Maximum und Minimum gehörig von einander unterschieden worden ist. Auch zur Uebung im Differentiiren sind diese Aufgaben sehr geeignet.

Da nach dem Vorwort der Herr Verfasser diese Aufgaben jedenfalls auch für seine Schüler bestimmt zu haben scheint, so legt dies zugleich Zeugniss ab, dass die Mathematik auf der st. st. Ober-Realschule zu Gratz bis zu einer ziemlich beträchtlichen Höhe mit steter Rücksicht auf Anwendung getrieben wird, wozu wir dieser Lehranstalt unter der Leitung eines so ausgezeichneten Lehrers, wie des Herrn Verfassers, nur Glück wünschen können.

Trigonometrie.

Die Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Nebst vielen Aufgaben. Von Dr. T. Franke, Professor und zweitem Director der polytechnischen Schule zu Hannover. Mit einer Kupfertafel. Zweite vermehrte Auflage. Hannover. Helwing. 1854. 8.

Ein deutliches und ziemlich vollständiges, die goniometrischen und cyclometrischen Reihen jedoch nicht enthaltendes Elementar-Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, das nach einer gemischten, theils geometrischen, theils analytischen Methode verfasst ist und auch eine ziemliche Reihe von Aufgaben und eine hinreichende Anzahl ganz vollständig ausgerechneter numerischer Beispiele enthält. Es enthält auch das Legendre'sche Theorem, jedoch noch ganz eben so bewiesen und entwickelt, wie schon Legendre that, obgleich man jetzt viel bessere und lehrreichere Beweise besitzt; auch über den Flächeninhalt sphärischer Dreiecke ist das Nöthige beigebracht. Auffallend ist es, dass der Herr Verfasser die neuesten Bearbeitungen der sphärischen Trigonometrie gänzlich ignorirt hat, wodurch die Darstellung dieser Wissenschaft so ungemein erleichtert und vereinfacht worden ist, dass zur vollständigen Entwickelung der Grundformeln jetzt ein Paar Stunden ausreichen, und der Gebrauch des so fatalen Supplementar-Dreiecks ganz unnöthig gemacht wird. Das völlige Ignoriren dieser neuen, anerkanntermassen einen wesentlichen Fortschritt bedingenden Darstellungsweise ist aber um so auffallender, weil schon eine nicht geringe Anzahl von Schriften erschienen sind, welche sich die weitere Entwickelung dieser neuen Methode der Darstellung der sphärischen Trigonometrie zur ganz besondern Aufgabe gemacht haben, woraus der Werth deutlich hervorgeht, welchen die Lehrer der Mathematik auf dieselbe zu legen geneigt sind, ein Ignoriren derselben daher künftig nicht mehr statthaft sein dürfte und als ein Rückschritt betrachtet wer-

den muss, den wir am allerwenigsten in Bezug auf den noch vielfacher Verbesserungen bedürfenden und solche zulassenden mathematischen Unterricht billigen können.

Astronomie.

Die Astronomie und die Astronomen seit dem Jahre 1845. Im Lichte und Schatten unserer Zeit betrachtet von einem Astronomen. Leipzig. Remmelmann. 1854. 8.

Ein mit Sachkenntniss verfasstes, höhere Ansprüche nicht machendes, recht wohlgemeintes Schriftchen, welches wir auch jüngern Mathematikern zur Lectüre empfehlen, indem sie aus demselben in der Kürze ein im Ganzen ziemlich vollständiges und deutliches Bild von den wichtigsten Arbeiten, welche seit dem auf dem Titel genannten Jahre auf dem Felde der astronomischen Wissenschaften in theoretischer und praktischer Rücksicht geliefert worden sind, sich verschaffen können.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. LXXXVII. S. 12.)

Jahrgang 1853. XI. Band. 3. Heft. S. 464. Schönlein: Ueber Farbenveränderungen. — S. 492. Fritsch: Ueber Schneefiguren. — S. 499. Fritsch: Weitere Belege für eine seculäre Aenderung der Lufttemperatur. — S. 504. Pohl: Beiträge zur Prüfung der Mikroskope (sehr gründliche und beachtenswerthe Abhandlung.) — S. 604. Kenngott: Mineralogische Notizen. — S. 632. Pohl: Ueber Sacharometer, deren Anfertigung und Prüfung. — S. 674. Partsch: Ueber den Meteorstein-Niederfall unweit Mezö-Madaras in Siebenbürgen am 4. September 1852. — S. 675. Partsch: Auszug aus dem amtlichen Berichte über den am 4. September 1852 bei Mezö-Madaras in Siebenbürgen stattgehabten Meteoriten-Fall.

Jahrgang 1853. XI. Band. 4. Heft. S. 730. Gintl: Schreiben des Herrn Professor Zantedeschi über die Existenz und die Natur der elektrischen Ströme, welche in den Telegraphen-Leitungen beobachtet wurden. — S. 735. Littrow: Ueber das all-

meine Niveau der Meere. — S. 742. **Littrow**: Die Culminaonspunkte der östlichen Central-Alpen. — S. 750. **Kenngott**: ineralogische Notizen. — S. 773. **Fritsch**: Die Lufttemperar steigt und fällt binnen einer analogen eilfjährigen Periode, in elcher sich die Sonnenflecken vermindern und vermehren. — . 774. Bericht des w. M. Herrn Prof. **Petzval** über eine Abhandng des Herrn Ober-Ingenieurs **Johann Arcari** (betrifft das lgende, von Herrn **Arcari** gelöste Problem: „Es seien frei im aume die zwei Massen m und M im Zustande der Ruhe, es sei ein materieller elastischer Verband ohne Gewicht, dessen urprüngliche Länge gleich a ist, es sei Q eine dritte Masse, welche it der Geschwindigkeit c in der Richtung mM die letzte Masse I so stösst, dass eine Verlängerung x des Verbandes a binnen er Zeit t erfolgt, und es sei die Bewegung von m und M anzueben." Der Bericht des Herrn Professor **Petzval** spricht sich sehr sachkundiger Weise über die Arbeit des Herrn **Arcari** us.) — S. 817. **Grailich**: Bewegung des Lichts in optisch einxigen Zwillingskrystallen.

Jahrgang 1853. XI. **Band**. 5. **Heft**. S. 943.* **Vintschau**: Ricerche sulla struttura microscopica della Retina dell'.Uomo, egli Animali vertebrati et de Cefalopodi. — S. 1006. **Unger**: iniges über die Organisation der Blätter der Victoria regia Lindl. - S. 1015. **Haidinger**: Die grüne Farbe der oxalsauren Eisenxyd-Alkalien und die weisse Farbe der Eisenoxyd-Alaune. — . 1023. **Engel**: Ueber die Entwickelung des Auges und des ehörorganes. — S. 1052. **Oeltzen**: Ueber die Bahn des Plaeten Thalia. — S. 1070. **Brücke**: Ueber den Dichroismus des lutfarbestoffs.

Jahrgang 1854. XII. **Band**. 1. **Heft**. S. 3. **Haidinger**: eitrag zur Erklärung der Farben der Polarisationsbüschel durch eugung. — S. 9. **Haidinger**: Tabelle der Eisbedeckung der onau bei Galacz in den Jahren 1836 bis 1853. — S. 11. **Horntein**: Bestimmung der Bahn des ersten Kometen vom Jahre 853 aus sämmtlichen Beobachtungen. — S. 22. **Kenngott**: Mieralogische Notizen. — S. 44. **Littrow**: Bahnnähen zwischen en periodischen Gestirnen des Sonnensystems. — S. 80. **Pohl**: hysikalisch-chemische Notizen. — S. 113. **Oeltzen**: Vergleihungen zwischen den Zonenbeobachtungen von **Bessel** und **rgelander**.

Proceedings of the Royal Society (London.)

Wir hoffen in den Stand gesetzt zu werden, unsern Lesern on jetzt an in ununterbrochener Folge eine Anzeige der „**Pro-**

ceedings" der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu London liefern zu können. Wegen der grossen Wichtigkeit dieser Proceedings, und weil dieselben wohl wenigen Lesern unserer Zeitschrift zu Gesicht kommen dürften, werden wir den Inhalt derselben stets vollständig angeben, ohne bestimmte Rücksicht auf die durch das Archiv vertretenen Wissenschaften, weil doch vielleicht für den einen oder anderen Leser auch eine botanische, chemische u. s. w. Abhandlung von Interesse sein könnte, wobei wir jedoch erinnern, dass uns nur in wenigen Fällen der Raum unserer literarischen Berichte erlauben wird, mehr als die Titel der einzelnen Abhandlungen zu geben.

Vol. VII. No. I. p. 1. Continuation of a paper on Square Numbers etc. read Dec. 22. 1853. By Sir Frederick Pollock. — p. 4. The first part of a paper „On a Class of Differential Equations, including those which occur in Dynamical Problems." By W. F. Donkin, Savilian Professor of Astronomy in the University of Oxford. Der Herr Verfasser sagt am Anfange dieses Aufsatzes: „This paper is intended to contain a discussion of some properties of a class of simultaneous differential equations of the first order, including as a particular case the form (which again includes the dynamical equations)

$$x_i' = \frac{dZ}{dy_i}, \; y_i' = -\frac{dZ}{dx_i}, \ldots$$

where $x_1 \ldots . x_n$, $y_1 \ldots . y_n$ are two sets of n variables each, and accents denote total differentiation with respect to the independent variable t; Z being any function of x_1 etc., y_1 etc., which may also contain t explicitly." — p. 8. On the Growth of Land Shells. By E. J. Lowe. — p. 11. Note on the Decomposition of Sulphuric Acidl by Pentachloride of Phosphorus. By Alexander Williamson. — p. 16. On a new and more correct method of determining the Angle of Aperture of Microscopic Object-Glasses. By W. S. Gillet. — p. 18. On some new Compounds of Phenyl. By Alexander Williamson.

Vol. VII. No. 2. p. 21. Note on an indication of depth of Primaeval Seas, afforded by the remains of colour in Fossil Testacea. By Edward Forbes. — p. 24. Note on the Melting-point and Transformations of Sulphur. By B. C. Brodie. — p. 28. On the Structure and Affinities of Trigonocarpon (a fossil fruit of the Coal-measures). By Joseph D. Hooker. — p. 32. On a peculiar Arrangement of the Sanguiferous System in Terebratula and certain other Brachiopoda. By W. B. Carpenter. — p. 37. On a new Series of Sulphuretted Acids. By Dr. Aug. Kekulé.

Literarischer Bericht
XCI.

Arithmetik.

Elemente der niederen Analysis. Von Dr. **Richard Beez**, Lehrer der Mathematik an der Gewerbeschule zu Plauen. Mit 1 Figurentafel. Plauen. 1853. 8.

Wir erkennen bei diesem Schriftchen, das für den Unterricht in der ersten Klasse der Gewerbeschule zu Plauen als Leitfaden zu dienen bestimmt ist, das löbliche Bestreben, die Elemente der sogenannten algebraischen Analysis im Geiste der neueren strengeren analytischen Methoden, die hauptsächlich immer auf den Begriff der Gränze zurückgehen und z. B. die ganz vagen und verwerflichen Entwickelungen mittelst der sogenannten unbestimmten Coefficienten ganz verschmähen, darzustellen, gern und bereitwilligst an. Mit der Art und Weise aber, wie der Herr Verf. diese neueren Methoden in Anwendung bringt, können wir keineswegs überall einverstanden sein. Auf eine ausführlichere Kritik uns einzulassen, gestattet hier der Raum nicht und würde auch durch die Bedeutung des Schriftchens nicht gerechtfertigt erscheinen. Um aber unser Urtheil doch auf irgend Etwas zu basiren, wollen wir nur bemerken, dass am Ende des Schriftchens der Herr Verfasser sich auch mit dem Taylor'schen Theoreme beschäftigt. Ausser an seinem sogenannten Beweise desselben, in der Art wenigstens, wie er denselben darstellt, müssen wir billig auch schon an dem Ausdrucke, auf welchen der Herr Verfasser den Satz gebracht hat, Anstoss nehmen. Derselbe lautet nämlich bei dem Herrn Verfasser wie folgt:

„Ist $f(x+h)$ eine in dem Intervall x bis $x+h$ stetige Func-

tion, die beiden Grenzen mit einbegriffen, sind ferner die sämmtlichen Derivationen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,.... ebenfalls continuirlich, so gilt die Gleichung

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+....$$

so lange, als die Reihe rechts convergirt."

Ja freilich hat die Reihe rechts immer eine gewisse Summe, so lange sie convergirt! aber ob diese Summe in allen Fällen der Convergenz der Reihe auch wirklich $f(x+h)$ ist, wie der Satz bei dem Herrn Verfasser behauptet, das bleibt gewiss sehr fraglich und wird am allerwenigsten durch den sogenannten Beweis des Herrn Verfassers in's Licht gestellt. Dass die Summe wirklich $f(x+h)$ ist, geht vielmehr in allen Fällen erst aus einer sehr sorgfältigen Discutirung des der Taylor'schen Reihe beizufügenden sogenannten Restes derselben mit völliger Bestimmtheit hervor, aber nicht aus ihrer blossen Convergenz nach den gewöhnlichen Bedingungen derselben. Von diesem Reste, dessen sorgfältige Discutirung nun einmal bei der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe nicht umgangen werden zu können scheint, ist aber bei dem Herrn Verfasser in höchst auffallender Weise mit keinem Worte die Rede, und sein ganzes Gerede über diese Reihen ist daher ohne allen Grund und Halt. Wir glauben sehr wohl die Quelle zu kennen, aus welcher die falschen Vorstellungs- und Anschauungsweisen des Herrn Verfassers ursprünglich stammen, wollen aber darüber ein Wort hier nicht weiter verlieren, hielten uns jedoch für verpflichtet, den Lesern in Bezug auf dieses Büchlein grosse Vorsicht anzuempfehlen, und sie zu bitten, dem Herrn Verfasser ja nicht Alles auf sein Wort zu glauben. Eine strengere und weiter ausgreifende Kritik zu beanspruchen, scheint uns das Büchlein, wie schon erinnert, nicht hinreichende Berechtigung zu haben.

Geometrie.

Grundzüge der Geometrie des Maasses. Ein Lehrbuch von Dr. Oskar Schlömilch. Erster Theil, enthaltend Planimetrie und ebene Trigonometrie. Zweite Auflage. Zweiter Theil, enthaltend Stereometrie, Kegelschnitte, sphärische Trigonometrie und descriptive Geometrie. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Eisenach. Bädecker. 1854. 8. Beide Theile 2 Thlr. 15 Sgr.

Wir freuen uns, dass das günstige Urtheil, welches wir im Literarischen Berichte Nr. LIV. S. 751. über den ersten Theil dieser „Grundzüge der Geometrie des Maasses" gefällt haben, insofern eine Bestätigung gefunden hat, als von demselben schon jetzt eine neue Auflage erschienen und diesem Theile ein zweiter, die Stereometrie und damit verwandte Gegenstände enthaltender Theil beigefügt worden ist. Der erste Theil hat in dieser zweiten Auflage mehrere Zusätze und Verbesserungen erhalten, welche der Herr Verfasser in der Vorrede angiebt und die äussere Ausstattung ist in zweckmässiger Weise dahin abgeändert worden, dass, wie auch in dem zweiten Theile, die Figuren in recht gut ausgeführten Holzschnitten in den Text eingedruckt worden sind. Der Inhalt des zweiten Theils ist auf dessen Titel angezeigt, und wir können den Lesern die Versicherung geben, dass sie in demselben eine gleich ansprechende Darstellung und Entwickelung der stereometrischen Partieen der Geometrie finden werden, wie in dem ersten Theile der Planimetrie zu Theil geworden ist, wobei auch manches dem Herrn Verfasser Eigenthümliche vorkommt. Besonders anerkennen müssen wir in Bezug auf diesen zweiten Theil drei Dinge. Erstens hat der Herr Verfasser mit sehr richtigem Takte und genauer Kenntniss der Bedürfnisse des neueren mathematischen Unterrichts, besonders auch auf den zu unserer Freude immer mehr an Bedeutung gewinnenden, eine mehr praktische Richtung verfolgenden Lehranstalten, eine recht gute Darstellung der Elemente der descriptiven Geometrie in sein Buch aufgenommen. Zweitens freuen wir uns, dass er der synthetischen Darstellung der Lehre von den Kegelschnitten eine eben solche Bedeutung für den mathematischen Unterricht beilegt, wie wir selbst von jeher zu thun gewohnt gewesen sind, und deshalb auch eine solche Darstellung dieser Lehre in sein Buch aufgenommen hat, wobei wir jedoch Folgendes zu bemerken uns erlauben möchten. Der Herr Verfasser hat die Kegelschnitte gleich von vorn herein aus dem Kegel entstehen lassen, wie z. B. auch schon Apollonius gethan hat, und manche englische Schriftsteller, die bekanntlich in dieser Beziehung als Muster zu betrachten sind. Nicht wenige andere englische Schriftsteller gehen dagegen von der Entstehung der Kegelschnitte in der Ebene aus, und zeigen nur zuletzt, dass die betreffenden Linien auch mittelst Durchschneidung eines Kegels erhalten werden können. Dieser letztere Weg hat nach unserer Erfahrung für den Unterricht sich immer zweckmässiger erwiesen, theils darum, weil auf demselben der so wichtige Begriff des geometrischen Orts dem Schüler sich am Deutlichsten zur Anschauung bringen lässt, und weil ferner auf diesem Wege die Lehre von den

Kegelschnitten sich unmittelbar an die ebene Geometrie anschliesst und zu sehr vielen, höchst zweckmässigen Uebungen in der letzteren Veranlassung giebt. Jedenfalls ist auch die Eigenschaft der Linien des zweiten Grades, dass sie sich aus dem Kegel schneiden oder als Kegelschnitte betrachten lassen, eine nur secundäre oder abgeleitete Eigenschaft dieser Curven, wie wohl am Besten aus ihrer analytischen Theorie hervorgehen dürfte, und scheint daher nicht ganz geeignet zu sein, an die Spitze einer Theorie derselben gestellt zu werden, wenn auch, wie schon erinnert, dem Herrn Verfasser sehr berühmte Namen in dieser Beziehung zur Seite stehen. Auch erkennen wir die Eleganz der von dem Herrn Verfasser in seiner Weise gegebenen Darstellung gern an, unterdrücken aber auf der anderen Seite den Wunsch nicht, dass es einmal einem tüchtigen Mathematiker und Lehrer gefallen möchte, eine möglichst kurze und elegante, ganz für die Zwecke des Elementar-Unterrichts berechnete synthetische Darstellung der Lehre von den Kegelschnitten in der von uns vorher angedeuteten Weise zu liefern, die uns noch zu fehlen scheint, und gewiss selbst in dem Archive gern Aufnahme finden würde, vielleicht unter Veranstaltung eines besonderen Abdrucks für die Zwecke des Unterrichts. Drittens endlich hat der Herr Verfasser in der sphärischen Trigonometrie die frühere vielfach unbeholfene Darstellung mit Hülfe des Supplementardreiecks u. s. w. ganz verlassen, und sich, bei übrigens selbsständiger Verarbeitung, völlig der neueren, aus dem Archive Thl. XVI. Nr. II. Thl. XVII. Nr. III. jetzt wohl allgemein bekannten Darstellungsweise angeschlossen. Das Legendre'sche Theorem hat auch Aufnahme gefunden nach der ursprünglichen Darstellungsweise seines Erfinders, die wir freilich gern mit einer besseren, neueren vertauscht gesehen hätten, ohne dem Herrn Verfasser daraus einen besonderen Vorwurf machen zu wollen. Die Beschränktheit des Raumes verbietet uns, mehr über dieses empfehlenswerthe Buch zu sagen, und die oben von uns besonders hervorgehobenen Vorzüge und Eigenthümlichkeiten desselben sind keineswegs die einzigen. Wir wünschen sehr, dass demselben, namentlich in seiner jetzigen neuen Gestalt, die sehr wohl verdiente Beachtung der Leser des Archivs in jeder Beziehung auch fernerhin zu Theil werden möge, besonders auch von den Lehrern der Mathematik auf Gymnasien und Realschulen, die aus demselben vielfache, den Zwecken des Unterrichts förderliche Belehrung schöpfen können.

Ueber einen merkwürdigen Punkt im Dreiecke. Eine mathematische Aufgabe für Schüler zur Uebung im trigonometrischen Rechnen. Behandelt von Doctor

Gustav Emsmann, ordentlichem Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Frankfurt a. d. O. Zweites Heft der Mathematischen Studien für die Zwecke der Schule. Halle. Berner. 1854. 8.

Diese Schrift betrifft die folgende

Aufgabe.

Innerhalb eines Dreiecks einen Punkt zu finden, so dass die drei Winkel, welche die von diesem Punkte nach den Dreiecksecken gezogenen drei Geraden mit den, in derselben Richtung genommenen, Dreiecksseiten bilden, einander gleich sind,

welche der Herr Verfasser nach verschiedenen Methoden auflöst und daran eine grössere Anzahl von Lehrsätzen über das Dreieck und für dasselbe geltenden Relationen knüpft, die manches nicht Uninteressante darbieten, und bei deren Entwickelung sich der Herr Verfasser überall der geometrisch-trigonometrischen Methode, wenn man so sagen darf, bedient. Zugleich sind einige numerische Beispiele beigefügt. Das erste Heft dieser **Mathematischen Studien für die Zwecke der Schule**, welches den Titel führt: **Ein mathematisches Thema aus der Schule. Von Dr. A. Wiegand. Halle. Berner. 1854.** ist noch nicht zu unserer Kenntniss gelangt. Jedenfalls aber scheint das Unternehmen, solche mathematische Schulthemata in einzelnen kleineren Heftchen zu behandeln, in **pädagogischer Rücksicht** wohl Empfehlung zu verdienen.

Trigonometrie.

Die ebene Polygonometrie, vollständig dargestellt und durch zahlreiche Beispiele erläutert von Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe. Mit 39 in den Text eingedruckten Figuren in Holzschnitt. Stuttgart. Metzler. 1854. 8.

Wir empfehlen diese Schrift in mehreren Beziehungen der Aufmerksamkeit unserer Leser. Erstens hat der Herr Verfasser in derselben die Zahl der Aufgaben, welche die ebene Polygonometrie darbietet, erschöpft und eine so vollständige Darstellung derselben geliefert, dass der Lehrling in den Stand gesetzt wird,

jede sich ihm darbietende Aufgabe lösen und auch in den verwickelteren Fällen sich helfen zu können, in welcher Beziehung der Herr Verfasser jedenfalls mehr als die meisten seiner Vorgänger geleistet hat. Ganz besondere Anerkennung verdient es ferner, dass er, worin sonst so vielfach gefehlt wird, eifrig bemüht gewesen ist, dem Leser gleich in den ersten Grundsätzen die Ueberzeugung der ausnahmslosen Gültigkeit der erhaltenen Resultate zu verschaffen, weil, wie er sehr richtig bemerkt, ohne diese klare Ueberzeugung zwar wohl ein mechanisches Nachtreten vorgeschriebener Formeln, nie aber eine selbstbewusste Benutzung derselben möglich ist, eine Ansicht, die wir ganz zu der unsrigen machen, und dem Herrn Verfasser im Namen der Wissenschaft danken, dass er, wie in seinen früheren, in vielen Beziehungen ausgezeichneten Schriften, diesen Grundsatz auch in der vorliegenden zur vollständigen Geltung zu bringen sucht, und zwar in einer Weise, die jedenfalls ohne zu grosse Weitläufigkeit das erstrebte Ziel glücklich erreicht. In unmittelbarem Zusammenhange hiermit steht es auch, dass der Herr Verfasser sich keineswegs, wie meistens geschieht, bloss mit der Betrachtung solcher Polygone beschäftigt, bei denen die späteren Seiten die früheren nicht mehr durchkreuzen, sondern auch solche Figuren, bei denen eine Durchkreuzung der Seiten Statt findet, in den Kreis seiner Betrachtungen zieht und für dieselben die unbeschränkte Gültigkeit der erhaltenen Formeln nachweist. Endlich ist hervorzuheben, dass eine ziemliche Anzahl numerischer Uebungsbeispiele beigefügt ist, wodurch die Brauchbarkeit des Werkchens sowohl im Allgemeinen, als auch namentlich für solche, welche praktische Anwendungen von der Polygonometrie, deren dieselbe bekanntlich in so reichem Maasse z. B. in der Geodäsie fähig ist, machen wollen, wesentlich erhöhet wird. Die vorliegende Schrift ist von dem Herrn Verfasser zweckmässig unabhängig von jedem Lehrbuche gehalten worden, bildet jedoch mit dem „Handbuche der ebenen und sphärischen Trigonometrie“, das von ihm nächstens erscheinen wird und dem wir mit Verlangen entgegen sehen, gewissermaassen ein Ganzes. Es wird uns freuen, wenn die vorhergehenden wenigen Bemerkungen geeignet sein sollten, die Aufmerksamkeit unserer Leser auf das vorliegende empfehlenswerthe Schriftchen zu lenken.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (Siehe Liter. Ber. Nr. XC. S. 10.)

Jahrgang 1854. XII. Band. 2. Heft. S. 199. Natterer: Gasverdichtungs-Versuche. — S. 230. Grailich: Bewegung des Lichts in optisch-einaxigen Zwillingskrystallen. — S. 263. Pekárek: Ueber elektrische Lampen.

Jahrgang 1854. XII. Band. 3. Heft. S. 281. Schönemann: Theorie und Beschreibung einer neuen Brückenwage. — S. 303. Hornstein: Bestimmung der Bahn des ersten Kometen vom Jahre 1847, nebst *) Bemerkungen über den Uebergang von der Parabel zur Ellipse oder Hyperbel. — S. 320. Hornstein: Bestimmung der Bahn des ersten Kometen vom Jahre 1853. — S. 400. Haidinger: Ueber Senarmont's gefärbte Krystalle. — S. 401. Haidinger: Ueber den Pleochroismus und die Krystallstructur des Amethystes. — S. 464. A. v. Ettingshausen: Bericht über das von J. Anathon zur Beurtheilung eingereichte Manuscript: „Die natürlichen Gesetze der Musik" mit dem Motto: Wahre Musik ist Jedem verständlich. (Auf diesen höchst interessanten Bericht A. v. Ettingshausen's über ein Werk, welches für die Musik von grosser Wichtigkeit zu sein und in derselben neue Bahnen zu eröffnen scheint, machen wir alle, die für Musik sich interessiren, im Allgemeinen, insbesondere aber auch die Physiker, aufmerksam.) — S. 515. J. H. T. Müller: Allgemeine Ableitung der krystallometrischen Grundgleichungen. — S. 527. Boué: Versuch einer naturgemässen Erklärung der ehemaligen Temperatur-Verhältnisse auf dem Erdballe, insbesondere während der älteren Steinkohlen-Periode, so wie auch der Möglichkeit der Entstehung der Steinkohle in den Polargegenden. — S. 536. Grailich: Note in Betreff der Grundgestalt der Glimmer.

Jahrgang 1854. XII. Band. 4. Heft. S. 545. Haidinger: Note über gewundene Bergkrystalle. — S. 600. C. v. Ettingshausen: Ueber die Nervation der Blätter der Papilionaceen. (Schon durch die zweiundzwanzig trefflich ausgeführten Tafeln in Naturselbstdruck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei auch für den Nicht-Botaniker höchst interessant.) — S. 664. Alth: Beiträge zur Frage: Ueber den Isomorphismus homologer Verbindungen. — S. 670. Haidinger: Mittheilung aus einem Schreiben des Herrn Professor Stokes über das optische Schachbrettmuster. — S. 678. Derselbe: Dauer des Eindrucks der Polarisationsbüschel auf die Netzhaut. — S. 680. Derselbe: Berichtigung einer früheren Angabe. — S. 685. Derselbe: Die Richtung der Schwingungen des Lichtäthers im polarisirten Lichte. Mittheilung aus einem Schreiben des Herrn Prof. Stokes nebst Bemerkungen.

---

*) lehrreichen.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literarischer Bericht Nr. LXXXVII. S. 9.)

Tome XX. IIIe Partie. 1853. p. 27. A. Quetelet: Application de la télégraphie électrique à l'astronomie. — p. 28. Sur la météorologie nautique et la conférence maritime tenue à Bruxelles; note par A. Quetelet. — p. 35. Sur les étoiles filantes périodiques des 9 et 10 août; par A. Quetelet. — p. 129. Météorologie nautique. Rapport sur une demande du Gouvernement belge; par A. Quetelet. — p. 137. Sur l'organisation des caisses des veuves, avec des applications à la caisse des veuves et orphelins des officiers de l'armée belge. Mémoire de M. Liagre. Rapport de M. Schaar. — p. 142. Rapport de M. Quetelet. — p. 146. Sur la diminution de l'inclinaison magnétique en Europe. Lettre adressée le 22. Septbr. 1853 à M. Quetelet par M. Hansteen. (Ein auch in theoretischer Rücksicht sehr interessanter Brief des berühmten norwegischen Astronomen.) — p. 164. Sur l'électricité naturelle des corps. (Sehr interessante Mittheilungen von Herrn Quetelet.) — p. 267. Mémoire de M. Duprez, ayant pour titre: Sur un cas particulier de l'équilibre des liquides. Rapports de M. Crahay et de M. Plateau. — p. 270. Observations sur les horloges électriques, par le Sr Jaspar, fabricant d'instruments de physique, à Liège. Rapport de M. De Vaux. — p. 281. Description de quelques modifications apportées aux horloges électriques, par J. Jaspar. — p. 351. Sur une naine née dans les environs de Bruxelles. Note par M. Quetelet. — Ausser diesen Aufsätzen enthält der vorliegende Band noch verschiedene andere interessante Einzelheiten, die sich hier nicht alle namhaft machen lassen.

Tome XXI. Ire Partie. 1854. p. 60. Sur un mémoire de M. Montigny, et intitulé: Essai sur des effets de réfraction et de dispersion produits par l'air atmosphérique. Rapport de M. Plateau. — p. 74. Sur le nouvel Observatoire magnétique de Rome; par A. Quetelet. — p. 79. Sur le principe électrostatique de Palagi et ses experiences. Lettre de M. le professeur Zantedeschi de Padoue à M. Quetelet. — p. 84 Sur quelques particularités de formules d'analyse mathématique. Lettre de M. Genocchi à M. Quetelet. — p. 96. Sur les proportions de la race noire; par M. Quetelet. — p. 149. Sur l'origine ou la nature du calorique; par M. Martens. — p. 218. Sur la déclinaison, l'inclinaison et la force de l'aiguille magnétique à Bruxelles et sur les variations de ces trois éléments depuis quelques années; par M. A. Quetelet. — p. 278. Sur une nouvelle méthode fournie par la géométrie descriptive, pour rechercher et démontrer les propriétés de l'étendue; par M. Brasseur. — p. 282. Sur les aurores boréales; par M. A. Quetelet. (Wie es uns scheint, ein mehrfach wichtiger Aufsatz über das Nordlicht.)

Annexe aux Bulletins. 1853—1854. Enthält ausser mehreren Abhandlungen naturwissenschaftlichen und historischen Inhalts die folgende jedenfalls sehr beachtenswerthe und allgemein interessante grössere Abhandlung: Mémoire sur l'organisation des caisses des veuves avec des applications à la caisse des veuves et orphelins des officiers de l'armée belge; par M. le Capitaine Liagre.

Literarischer Bericht
XCII.

Arithmetik.

Ankündigung.

In Folge wiederholter Aufforderungen habe ich die Resultate zu meinen Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra autographirt. Diejenigen geehrten Herren Collegen, welche die Aufgaben bei ihrem Unterrichte benutzen, wollen die Resultate von der Grauschen Buchhandlung in Bayreuth beziehen.

Bayreuth im November 1854.

Professor Hofmann.

Auf der Universität zu Upsala sind neuerlich die folgenden akademischen Schriften mathematischen Inhalts erschienen, die in jeder Beziehung sehr verdienen, in Deutschland zu einer grösseren und allgemeineren Bekanntschaft zu gelangen, als den mathematischen Erzeugnissen trefflicher schwedischer Mathematiker meistens zu Theil wird:

Bidrag till Theorien om Elliptiska Functioner. Inbjudningsskrift af Promotor Carl Johan Malmstén. Upsala.

Bidrag till Läran om Continuerliga Bråk. Academisk Afhandling. Praes. Mag. Carl Johan Malmstén, Professor i Rena Mathematiken. Respp. F. W. Hultman, Y. Nyberg, S. T. Göranson, R. Rubenson, H. F. Nerén, H. Schulz, A. M. Myrberg, J. V. Wretman. Upsala.

Om Upplösningen af Fjerde Gradens Equationer. Academisk Afhandling. Praes. Mag. Carl Johan Malm-

stén, Professor i Rena Mathematiken. Resp. C. F. Rådberg. Upsala.

Om Grunderna för Differentialkalkylen. Akademisk Afhandling. Praes. Carl Johan Malmstén, Professor i Rena Mathematiken. Resp. Förf. T. R. Thalén. Upsala.

Inledning till Mathematiken. Akademisk Afhandling. Praes. Mag. Carl Johan Malmstén, Prof. i Rena Mathem. Resp. Förf. N. G. Ljungzell. Upsala.

Wir machen nochmals die Leser des Archivs auf diese des Interessanten Vieles darbietenden Abhandlungen aufmerksam, deren Inhalt wegen Mangel an Raum wir leider nicht besonders angeben können.

Theorie der analytischen Facultäten nebst ihrer Anwendung auf Analysis, Kreisfunctionen und bestimmte Integrale. Von Dr. Ludwig Oettinger, Grossherzoglich Badischem Hofrathe und Professor der Mathematik an der Universität Freiburg i. B. Freiburg i. B. Diernfelder. 1850. 4.

Dieses ausführliche Werk über die immer noch nicht hinreichend behandelte Theorie der analytischen Facultäten zerfällt in zwei Abtheilungen, wovon die erste die Theorie der Facultäten, die zweite ihre Anwendung auf Analysis, Differenzenrechnung, Kreisfunctionen und bestimmte Integrale enthält, und bietet dem Leser vielfache eigenthümliche Untersuchungen des geehrten Herrn Verfassers dar. Bei der Begründung der Theorie ging derselbe um so mehr mit Recht auf die ersten Elemente zurück, da die mit diesen Gebilden sich beschäftigenden Schriftsteller bei ihren Untersuchungen von ziemlich verschiedenen Ansichten ausgingen, wobei manche Lücken gelassen wurden. Der Bildung einer zweckmässigen Bezeichnung hat der Herr Verfasser besondere Aufmerksamkeit gewidmet, was besonders verdienstlich ist, weil bei diesem Gegenstande, wie jeder Kenner desselben zugeben wird, eine möglichst einfache und zweckmässige Bezeichnung von besonderer Bedeutung ist. Die für die Entwickelung der Facultäten in Reihen, geordnet nach den Potenzen der Grundgrösse und Zunahme, aufgestellten Sätze sind die Brücke für die von Kramp gelassene Lücke, und scheinen von besonderer Wichtigkeit zu sein, weil sie bei anderweitigen Entwickelungen in der Analysis und Differenzenrechnung von grosser Brauchbarkeit sind und dort Probleme in organischem Zusammenhang lösen, die bisher nur einzeln und getrennt und mit grosser Mühe behandelt wurden, sich auch in

ganz entfernt liegenden Zweigen der Integralrechnung, z. B. bei der Darstellung der Integral-Logarithmen, sehr dienstbar erweisen. Die Umformung der Facultäten im Allgemeinen ($a^{n|d}$) als eines Ausdrucks von drei unter einander unabhängigen (positiven und negativen, ganzen und gebrochenen) Grössen ist im Nachtrage zu Abschnitt I. und II. ausführlich behandelt, und es sind S. 146. 24 Umformungen aufgefunden worden, von denen Kramp nur 7 ohne ihre Begründung zu geben aufgestellt hat. Für die Zurückführung einer Facultät von der allgemeinen Form $a^{n|d}$ auf die specielle, deren Basis und Zunahme die Einheit ist, waren bisher nur zwei Fälle, je einer von Kramp und Gauss, und beide von Bessel entwickelt, wogegen die Theorie des Herrn Verfassers acht Umformungsgleichungen aufweist, die allen Anforderungen, welche, wie der Herr Verfasser sagt, an die Theorie eines Gegenstandes consequenter Weise gestellt werden können und müssen, zu genügen und alle Widersprüche zu lösen scheinen, worin man seit Kramp gerieth, und deren Entfernung bisher, aber nicht immer mit gewünschtem Erfolge, versucht wurde. Die Anwendung der in II. entwickelten Facultäten-Coefficienten oder Summenausdrücke für die Verbindungen mit und ohne Wiederholungen ist im dritten Abschnitte hervorgehoben. Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit der Darstellung der Kreisfunctionen durch Facultäten, und der sechste, ein überaus reiches Material darbietender Abschnitt ist der Anwendung der Facultäten auf die Darstellung der bestimmten Integrale gewidmet. Am Ende der Vorrede bemerkt der Herr Verfasser, dass die einzelnen Abschnitte dieses Werkes, die schon vor einem Jahrzehend nieder geschrieben waren, früher in Crelle's Journal erschienen sind.

Die Leser des Archivs des Weiteren wegen auf das umfangreiche Werk selbst verweisend, müssen wir uns mit der vorstehenden allgemeinen Angabe seines Inhalts hier begnügen, glauben aber, dass dasselbe jedenfalls eine gute Grundlage für weitere Untersuchungen darbietet, und wünschen daher, namentlich auch der Vollständigkeit wegen, mit der es seinen Gegenstand behandelt und die Punkte hervorhebt, welche bei demselben besondere Beachtung und weitere Entwickelung verdienen, sehr, dass es sich der Aufmerksamkeit der Lehrer unserer Zeitschrift nicht entziehen möge, wenn auch sein Inhalt allerdings vielen derselben schon aus dem Crelle'schen Journale bekannt sein wird.

Geometrie.

Samling af Geometriska Problemer utgifwen af C. F. Lindman, Math. Lector i Strengnäs. Andra upplagan. Strengnäs 1853.

Für die Güte und Empfehlungswürdigkeit dieser Sammlung geometrischer Aufgaben bürgt schon der Umstand, dass dieselbe in einer zweiten Auflage erschienen ist, wenn auch nicht der Name des Herrn Verfassers nur Ausgezeichnetes erwarten liesse. Wir machen daher die Leser des Archivs auf diese Aufgabensammlung aufmerksam.

Die Seitenfläche des schiefen Kegels. Abhandlung des Oberlehrers Tröger. Programm der Petrischule zu Danzig von Ostern 1852. Danzig. 4°.

Diese gründliche Untersuchung über die Seitenfläche des schiefen Kegels, welche die betreffenden Integrale auf die elliptischen Functionen zurückführt, verdient recht sehr noch nachträglich der Beachtung der Leser des Archivs empfohlen zu werden.

Geodäsie.

Lehrbuch der niederen Geodäsie zum Gebrauche auf forstlichen, technischen oder militärischen Lehranstalten, so wie auch zum Selbstunterrichte für jeden Freund dieser Wissenschaft von Karl Breymann, Professor an der k. k. Forstlehranstalt zu Mariabrunn. Wien. Braumüller. 1854. 8.

Dieses neue Lehrbuch der niederen Geodäsie enthält eine sehr gründliche und vollständige Anleitung zu dieser Wissenschaft, setzt dabei aber ein ziemliches Maass von Kenntnissen aus der Elementar-Mathematik, hauptsächlich aus der ebenen Trigonometrie und analytischen Geometrie oder, wie wir hier lieber sagen wollen, aus der Coordinaten-Geometrie voraus, wenn auch der Herr Verfasser allerdings sich vielfach angelegen sein lässt, das Meiste, was er namentlich aus der letzteren Wissenschaft bei seinem Vortrage gebraucht, sehr deutlich und ausführlich zu erläutern. Dass er so vielen Gebrauch von der Coordinaten-Geometrie bei der Aufnahme des Terrains gemacht hat, verdient die

grösste Anerkennung, da diese Methode einmal überhaupt nicht genug empfohlen werden kann, und dann insbesondere bei forstlichen Aufnahmen oder der Forstvermessung, welche der Herr Verfasser wohl vorzugsweise im Auge gehabt hat, durch keine andere zweckmässigere und bessere Methode sich ersetzen lässt. In Rücksicht auf Vollständigkeit der mathematischen Auflösung aller in der niederen Geodäsie vorkommenden Aufgaben nach verschiedenen Methoden durch die synthetische und analytische oder Coordinaten-Geometrie und durch die ebene Trigonometrie wüssten wir diesem Werke kaum ein anderes an die Seite zu setzen, und empfehlen es nicht bloss Praktikern, sondern auch jungen Mathematikern zu ihrer Uebung in der Auflösung solcher geodätischen Aufgaben, die wir unter allen Bedingungen für sehr lehrreich und bildend halten, recht sehr. Der Flächenberechnung hat der Herr Verfasser mit Recht besondere Aufmerksamkeit gewidmet, und, was ganz besondere Anerkennung verdient und in wenigen ähnlichen Werken sich in gleicher Vollständigkeit finden dürfte, auch auf die verschiedene Bonität des Bodens, also auf die bei allen Separationen vorkommenden Geschäfte, in sehr ausgedehnter Weise Rücksicht genommen, wobei auch manches dem Herrn Verfasser Eigenthümliche vorkommt, wie sich bei einem so kenntnissreichen Schriftsteller schon von selbst versteht. Das Höhenmessen ist gleichfalls gelehrt, insbesondere auch das barometrische, welches zugleich der einzige Gegenstand ist, bei welchem der Herr Verfasser sich genöthigt sah, zu ein Paar einfachen Formeln der Differential- und Integralrechnung seine Zuflucht zu nehmen. Sonst ist der Gebrauch dieser Wissenschaften ganz vermieden, auch bei der sogenannten Fehlerrechnung, welche überall bloss mittelst elementar-mathematischer Kenntnisse in lehrreicher Weise ausgeführt wird. Je mehr zu wünschen ist und je mehr es zur Förderung der Wissenschaften beiträgt, wenn auch aus der niederen Geodäsie oder sogenannten Feldmesskunst immer mehr und mehr das bloss Mechanische und Handwerksmässige verbannt, und überall der Anwendung einer gesunden Theorie, welche die Operationen ganz ungemein erleichtert und deren Genauigkeit bedeutend erhöht, Eingang verschafft wird: desto mehr Anerkennung verdienen Werke wie das vorliegende, denen man auf den ersten Anblick ansieht, wie hoch ihre Verfasser die Anwendung der strengen theoretischen Lehren auch bei praktischen Geschäften anschlagen und wie sehr sie deren Werth für solche Geschäfte erkennen. Noch erfreulicher aber wird ein solches Bestreben, wenn Werke, wie das vorliegende, zunächst lediglich als Grundlage für den Unterricht auf ganz eine praktische Richtung verfolgenden Lehranstalten bestimmt sind, indem dann Grundsätze, wie die oben näher bezeichneten,

nothwendig unmittelbar ihren Weg in das praktische Leben finden müssen; und in der That erregt es keine geringe Meinung von dem wissenschaftlichen Standpunkte, welche die k. k. Forstlehranstalt zu Mariabrunn einnimmt, wenn auf derselben bei dem geodätischen Unterrichte ein, eine so gründliche, vollständige und genaue Kenntniss der gesammten Elementar-Mathematik, selbst auch der analytischen Geometrie und der Anfänge der Differential- und Integralrechnung, voraussetzendes Lehrbuch, wie das vorliegende, zu Grunde gelegt werden kann, wozu wir dem Herrn Verfasser in seinem Lehrerberufe nur Glück wünschen können.

Wir haben bis hierher mehr die theoretische Seite des Buchs besprochen und in's Auge gefasst. Was die mehr praktische Seite, insbesondere die Instrumental-Kenntniss betrifft, so müssen wir dem Herrn Verfasser, weil sein Buch vorzugsweise als Grundlage für den mündlichen Unterricht in der Geodäsie bestimmt ist, darin ganz Recht geben, dass er sich ausführlicher Beschreibungen der Instrumente selbst, auch der Abbildung derselben, ganz enthalten hat, weil jeder erfahrene Lehrer weiss, dass in dieser Beziehung ein einmaliger Anblick eines Instrumentes bei verständiger Erläuterung von Seiten des Lehrers mehr thut und mehr wirkt, als eine lange Beschreibung. Nur aber darf man sich hierdurch nicht zu der Meinung verleiten lassen, als habe der Herr Verfasser gar nichts über die Instrumente gesagt; im Gegentheil sind überall die allgemeinen Bedingungen, welchen ein jedes derselben genügen muss, die Zwecke, welche man dadurch zu erreichen beabsichtigt, die hauptsächlichsten Fehler u. s. w. sorgfältig besprochen worden, so dass auch in dieser Beziehung der Herr Verfasser innerhalb der Gränzen, welche er sich selbst gesteckt hat, allen billigen Anforderungen entsprochen haben dürfte.

Wir empfehlen daher dieses Werk nicht bloss allen Denjenigen, welche sich für die Fortbildung der niederen Geodäsie interessiren und praktische geodätische Arbeiten ausführen wollen, sondern selbst auch allen Lehrern der Mathematik an höheren Lehranstalten, namentlich an Real- und Gewerbeschulen und anderen derartigen, im Bedürfnisse unserer Zeit liegenden Lehranstalten, weil dieselben aus diesem Buche manchen Stoff zu sehr zweckmässigen mathematischen, namentlich geometrischen und trigonometrischen Uebungsaufgaben für ihre Schüler, die zugleich auf einen fruchtreichen, praktischen Zielpunkt, der auf solchen Lehranstalten, bei aller Geltung der reinen Wissenschaft, immer mehr und mehr in's Auge gefasst werden sollte, hingerichtet sind, schöpfen können, und bemerken noch schliesslich, dass auch die äussere Ausstattung in jeder Beziehung vortrefflich ist.

Astronomie.

Om Lunds Observatorii Longitud. Akademisk Afhandling af Didr. Magn. Alex. Möller, F. M. Amanuens. vid Astron. Observator. Lund 1853. 4°.

Eine sehr gründliche und äusserst fleissige Untersuchung über die Länge der Universitäts-Sternwarte zu Lund, welche ganz den Ansprüchen der neueren Astronomie an solche Arbeiten genügt.

Physik.

Lärobok i Fysiken. För Kongl. Artilleri-Lärowerk å Marieberg och Kongl. Technologiska Institutet. Utarbetad af A. H. Fock. Stockholm. 1854.

Meteorologie.

Conférence maritime tenue à Bruxelles pour l'adoption d'un systeme uniforme d'observations météorologiques à la mer. (Auch mit englischem Texte.) **Aout et Septembre 1853. 4.**

Die nächste Veranlassung zu dieser Conferenz gab die Regierung der vereinigten Staaten Amerikas, hauptsächlich auf Anregung des schon so vielfach verdienten Directors des National-Observatoriums zu Washington, Herrn Lieutenants Maury. Der Haupt- und nächste Zweck derselben war, sich über ein bestimmtes gleichförmiges System zur See anzustellender meteorologischer Beobachtungen zu vereinigen und zu verständigen. Wie bereitwillig die Regierungen der meisten seefahrenden Nationen der Aufforderung des Gouvernements der vereinigten Staaten entgegenkamen, zeigt die folgende Liste der bei der Conferenz erschienenen Bevollmächtigten. Es war nämlich vertreten:

La Belgique, par A. Quetelet, Directeur de l'Observatoire royal etc. et par Victor Lahure, capitaine de vaisseau, directeur général de la marine;

Le Danemark, par P. Rothe, capitaine-lieutenant de la marine royale, directeur du depôt des cartes de la marine;

Les États-Unis, par M. F. Maury, lieutenant de la marine des

États-Unis, directeur de l'Observatoire de Washington;

La France, par A. Delamarche, ingénieur hydrographe de la marine impériale;

La Grande-Bretagne, par F. W. Beechey, capitaine de la marine royale, F. R. S. etc. membre de la section navale du board of trade;

La Norwège, par Nils Ihlen, lieutenant de la marine royale;

Les Pays-Bas, par M. H. Jansen, lieuten. de la marine royale;

Le Portugal, par J. de Mattos Corrêa, capitaine-lieutenant de la marine royale;

La Russie, par Alexis Gorkovenko, capitaine-lieutenant de la marine impériale;

La Suède, par Carl Anton Pettersson, premier-lieutenant de la marine royale.

Das vorliegende, in vielen Beziehungen sehr interessante Werk enthält nun den ausführlichen Bericht über die Verhandlungen dieser Conferenz, die Sitzungsprotokolle und die in jeder Rücksicht sehr interessanten und für jeden Meteorologen lehrreichen Entwürfe zu den, den Schiffen Behufs der Anstellung meteorologischer Beobachtungen zu ertheilenden Instructionen. Wir haben daher geglaubt, dasselbe hier der Beachtung unserer Leser empfehlen zu müssen, ohne uns leider auf eine detaillirte Angabe seines Inhalts einlassen zu können.

Preisaufgabe.

Die Redaction des vom Oesterreichischen Lloyd in Triest herausgegebenen „Illustrirten Familienbuches" hat abermals eine Preisausschreibung erlassen, und zwar diesmal für die zwei besten naturwissenschaftlichen Originalaufsätze, welche, von der strengen Form der Wissenschaft sich frei machend, Darstellungen aus der gesammten theoretischen und angewandten Naturwissenschaft mit Berücksichtigung der neuesten Forschungen enthalten sollen und auf den Raum von höchstens anderthalb Druckbogen in Quart bemessen sind. Die drei Preisrichter sind: V. Kollar, Director des k. k. Naturalienkabinetts und Prof. Dr. L. Redtenbacher in Wien, und Prof. E. A. Rossmässler in Leipzig. Der Einsendungstermin der Manuscripte an eine der beiden Hauptagenturen des Oesterreichischen Lloyd, in Wien oder in Leipzig, währt bis zum 30. April 1855, und die beiden Preise betragen, ausser dem üblichen Honorar, resp. 25 und 15 Dukaten in Gold. Hinsichtlich der näheren Bestimmungen verweisen wir auf die ausführliche officielle Anzeige dieser Preisausschreibung, welche bei dem gegenwärtig allgemein verbreiteten Interesse für die Naturwissenschaften gewiss nicht verfehlen wird, bei dem schriftstellerischen, wie bei dem lesenden Publikum einen gleich günstigen Eindruck zu machen.

